

文章编号: 1000-4750(2012)09-0060-08

弹性力学问题自适应有限元及其局部多重网格法

刘春梅¹, 肖映雄², 舒 适¹, 钟柳强³

(1. 湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南, 湘潭 411105; 2. 湘潭大学土木工程与力学学院, 湖南, 湘潭 411105;

3. 华南师范大学数学科学学院, 广东, 广州 510631)

摘 要: 针对平面弹性力学问题, 利用最新顶点二分法, 设计了一种不需要标记振荡项和加密单元不需要满足“内节点”性质的自适应有限元法; 利用自适应加密过程中每层网格上只有局部单元需要加密这一特性, 设计了一种基于局部松弛的多重网格法。数值实验结果表明: 该文设计的自适应有限元法具有一致收敛性和拟最优计算复杂度, 基于局部松弛的多重网格法对求解弹性力学问题自适应网格下的有限元方程具有很好的计算效率和鲁棒性。

关键词: 弹性力学问题; 自适应有限元; 拟最优复杂性; 局部松弛; 多重网格法

中图分类号: O343.3; TB115 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.12.0934

ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD AND LOCAL MULTIGRID METHOD FOR ELASTICITY PROBLEMS

LIU Chun-mei¹, XIAO Ying-xiong², SHU Shi¹, ZHONG Liu-qiang³

(1. School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;

2. Civil Engineering and Mechanics College, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;

3. School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510631, China)

Abstract: In this paper, an adaptive finite element (AFEM) method is designed by using the newest vertex bisection for linear elasticity problems in two dimensions. This method marks exclusively according to the error estimator without special treatment of oscillation and performs a minimal element refinement without the interior node property. Furthermore, a type of multigrid method based on the local relaxation is applied to the AFEM discrete systems by using the special properties during refinement. The results of various numerical experiments are shown that the proposed AFEM method is uniformly convergent and has quasi-optimal numerical complexity. The resulting multigrid method is much more robust and efficient in CPU times than the usual multigrid methods.

Key words: elasticity problems; adaptive finite element method; quasi-optimal complexity; local relaxation; multigrid method

弹性力学问题的求解在科学计算和工程技术上都是很重要的问题, 如对微电子机械系统中的多体问题进行数值模拟时, 常常需要进行弹性分析^[1]。但由于问题本身及求解区域的复杂性, 一般很难得到它们的解析解, 有限元法是目前进行弹性

分析的最常用的数值方法之一^[2-3]。

在实际应用中, 有许多因素使得弹性问题产生强奇性解, 如物理区域是一个非光滑的几何区域(如凹角或裂缝等), 材料常数不连续, 应力集中等。虽然这些奇性在进行数值求解时可以通过一致加密

收稿日期: 2010-12-17; 修改日期: 2011-07-21

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划重点支持项目(91130002); 国家自然科学基金项目(10972191); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT1179); 湖南省研究生创新基金项目(CX2010B245, CX2010B246)

通讯作者: 肖映雄(1970—), 男, 湖南城步人, 教授, 博士, 从事计算固体力学研究(E-mail: xyx610xyx@yahoo.com.cn).

作者简介: 刘春梅(1981—), 女, 山西五台人, 博士生, 从事偏微分方程数值解研究(E-mail: liuchunmei8080@yahoo.com.cn);

舒 适(1962—), 男, 湖南双峰人, 教授, 博士, 博导, 从事偏微分方程数值解及多重网格法研究(E-mail: shushi@xtu.edu.cn);

钟柳强(1980—), 男, 广东兴宁人, 博士, 从事偏微分方程数值解研究(E-mail: zllq1980@gmail.com).

网格来克服,但是一致加密会引起计算代价的剧烈增加,这是因为由一致加密所带来的自由度的指数增长,它会导致包括计算机的物理内存和 CPU 时间的剧烈增长。自适应有限元方法可以根据解的性质来进行网格点的自动分布,能够有效克服由网格一致加密所导致的自由度过度增长的求解困难,用最小的计算量获得最大的计算精度,因而在现代工程计算中得到广泛的应用^[4-10]。

目前,在工程计算中广泛使用的是基于 Z-Z 型后验误差估计的自适应方法^[4-7]。在自适应有限元理论分析方面也有大量的研究工作,如文献[11]中介绍了一类自适应有限元方法的后验误差指示子,并给出该误差指示子的上下界估计;文献[8,12-13]中介绍了自适应混合有限元方法的后验误差指示子,并给出了上下界估计;文献[9]介绍了一类自适应间断有限元方法的后验误差指示子,同时说明了该误差指示子的鲁棒性。另外,在自适应有限元算法中,求解模块是影响有限元分析整体效率的主要因素之一。研究基于自适应网格的有限元离散化代数系统的快速算法是非常必要的。近年来发展的基于局部松弛的多重网格法,在自适应有限元分析中取得了很好的求解效率^[14-15]。现有的这些方法基本上是针对标量椭圆方程而设计的,对方程组的情形(如弹性力学问题),这方面的工作还很少。

本文将文献[16]中后验误差估计子和文献[17]中针对 H^1 型标量椭圆方程的自适应有限元算法的思想应用于平面弹性力学问题,再利用最新顶点二分法,设计了一种不需要标记振荡项和加密单元不需要满足“内节点”性质的自适应有限元法。然后,利用自适应加密过程中每层网格上只有局部单元需要加密这一特性,设计了一种基于局部松弛的多重网格法。数值实验结果表明,相应的自适应有限元法具有一致收敛性和拟最优计算复杂度,基于局部松弛的多重网格法对求解弹性力学问题自适应网格下的有限元方程具有很好的计算效率和鲁棒性。

1 模型问题及高次有限元离散

考虑如下平面弹性力学问题:

$$\begin{cases} -L^T(\partial_x, \partial_y)DL(\partial_x, \partial_y)u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u = g, & \text{在 } \Gamma_D \text{ 上} \\ L^T(n_x, n_y)DL(\partial_x, \partial_y)u = g_s, & \text{在 } \Gamma_S \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\Omega \in R^2$ 为有界的 Lipschitz 多边形区域,

$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_S$ 且 $\Gamma_D \cap \Gamma_S \neq \emptyset$; u 为位移向量; f 为外力; g_s 为边界 Γ_S 上的面力; $n = (n_x, n_y)^T$ 为边界 Γ_S 的单位外法线向量; 算子 $L(a, b)$ 和 D 分别为:

$$L(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

这里, λ, μ 为拉梅常数,它们可由弹性模量 E 和泊松比 ν 表示为:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2)$$

引入空间 $H_{\Gamma_D}^1 = \{u | u \in (H^1(\Omega))^2, u|_{\Gamma_D} = 0\}$ 及 $H_{\Gamma_S}^1 = \{u | u \in (H^1(\Omega))^2, u|_{\Gamma_D} = g\}$, 则问题式(1)对应的变分问题可描述为: 求 $u \in H_{\Gamma_S}^1$, 使得对任意的 $v \in H_{\Gamma_D}^1$, 下式总成立:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (3)$$

其中, $a(u, v) = \int_{\Omega} (L(\partial_x, \partial_y)v)^T DL(\partial_x, \partial_y)u dx dy$,

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f \cdot v dx dy + \int_{\Gamma_S} g_s \cdot v ds.$$

假设 T 是 Ω 的一个协调的形状正则的网格剖分。定义其上相应的 p 次有限元空间为:

$$V^{(p)} =$$

$$\{v_T^{(p)} | v_T^{(p)} \in (C(\bar{\Omega}))^2, v_T^{(p)}|_{\tau} \in (P_p(\tau))^2, \forall \tau \in T\}$$

其中, $P_p(\tau)$ 表示单元 τ 上次数不超过 p 的多项式的集合。图 1 分别给出了线性元、二阶元和三阶元对应的单元节点分布情况。

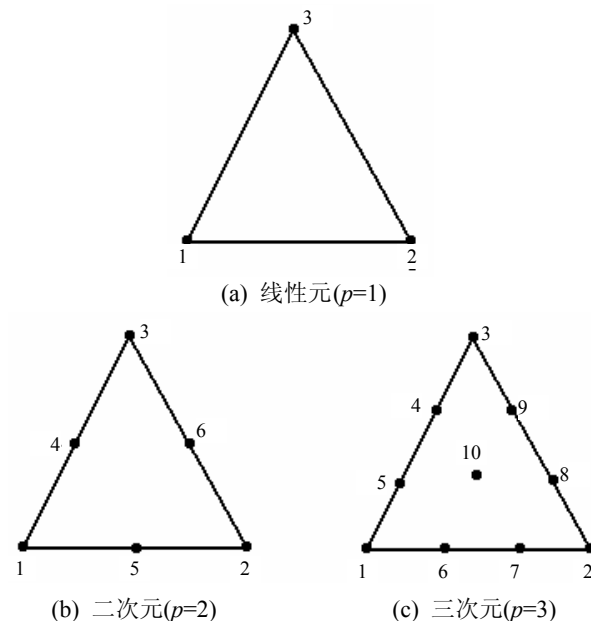


图 1 几种典型单元的节点分布

Fig.1 Nodes of some typical elements

变分问题式(3)的有限元提法为: 求 $\mathbf{u}_T^{(p)} \in V^{(p)} \cap \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1$, 使得对任意的 $\mathbf{v}_T^{(p)} \in V^{(p)} \cap \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1$, 下式总成立:

$$a(\mathbf{u}_T^{(p)}, \mathbf{v}_T^{(p)}) = \langle \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_T^{(p)} \rangle \quad (4)$$

设问题式(4)的有限元方程的矩阵形式为:

$$\mathbf{A}_T^{(p)} \mathbf{U}_T^{(p)} = \mathbf{F}_T^{(p)} \quad (5)$$

在实际计算中, 有许多因素可能导致问题产生强奇性, 这些奇性在进行数值求解时虽然可通过一致加密网格来克服, 但相应地会导致计算机的物理内存和计算 CPU 时间的剧烈增长。而自适应方法可根据解的性态来进行网格点的自动分布, 用最小的计算量可获得最大的计算精度。下面, 我们介绍一种不需要标记振荡项和加密单元不需要满足“内节点”性质的自适应有限元方法。然后, 利用自适应加密过程中每层网格上只有局部单元需要加密这一特性, 设计了一种基于局部松弛的多重网格法。

2 自适应有限元法

本节介绍本文设计的适应有限元法(Adaptive Finite Element method, AFEM)。

给定一个初始剖分 $\mathbf{T}_0$, 通过局部加密得到一个嵌套的协调的网格序列 $\{\mathbf{T}_k\}_{k \geq 1}$, 其中 $\mathbf{T}_k \rightarrow \mathbf{T}_{k+1}$ 主要由如下 4 个模块构成:

求解 $\rightarrow$ 估计 $\rightarrow$ 标记 $\rightarrow$ 加密

下面, 我们对上述 4 个模块进行简单介绍。

1) 求解模块。

对给定函数 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}_S$ 及给定的协调网格 $\mathbf{T}_k$, 求得离散变分问题式(4)的解 $\mathbf{u}_k^{(p)} \in V_k^{(p)}$, 其中 $V_k^{(p)}$ 是定义在网格剖分 $\mathbf{T}_k$ 上的 p 次有限元空间。

2) 估计模块。

该模块主要计算 $\mathbf{T}_k$ 上各个单元的误差指示子。为此, 我们首先介绍弹性力学问题的误差指示子。给定一个协调的网格剖分 $\mathbf{T}_k$, 对于任意满足 $e = \tau_1 \cap \tau_2$ 的内部边, 其中 τ_1 和 τ_2 分别是 $\mathbf{T}_k$ 中的单元, 设 $\mathbf{n}_e = (n_x, n_y)^T$ 为边 e 的一个指定的单位外法向量, 则定义跨边 e 的跳跃量为:

$$[q]_e = (q|_{\tau_1})|_e - (q|_{\tau_2})|_e \quad (6)$$

对任意 $\tau \in \mathbf{T}_k$ 和内部边 e , 基于单元的残量和跨边的跳跃量分别为:

$$R(\mathbf{u}_k^{(p)})|_{\tau} = (\mathbf{f} - \mathbf{L}\mathbf{u}_k^{(p)})|_{\tau},$$

$$J(\mathbf{u}_k^{(p)})|_e = [\mathbf{L}^T(n_x, n_y)\mathbf{D}\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)}]|_e。$$

对给定的 $\tau \in \mathbf{T}_k$, 其后验误差指示子可定义为:

$$\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau) = h_{\tau}^2 \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,\tau}^2 + h_{\tau} \sum_{e \in \partial\tau \setminus \partial\Omega} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,e}^2 \quad (7)$$

其中, $h_{\tau} = |\tau|^{1/2}$ 。

任意的集合 $M_k \subseteq \mathbf{T}_k$, 定义 $\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, M_k) = \sum_{\tau \in M_k} \eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau)$ 。对于给定的网格剖分 $\mathbf{T}_k$, 利用离散变分问题式(4)的解 $\mathbf{u}_k^{(p)}$ 及误差指示子的定义, 则可得 $\mathbf{T}_k$ 中每个单元的误差指示子。具体算法如下:

算法 1(误差指示子的计算) 已知 $\mathbf{f}$ 、网格剖分 $\mathbf{T}_k$ 及离散变分问题的 $\mathbf{u}_k^{(p)}$, 则单元 $\tau \in \mathbf{T}_k$ 的误差指示子 $\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau)$ 的计算流程为:

① 计算单元 τ 的尺寸 $h_{\tau} = |\tau|^{1/2}$ 。

② 利用数值积分公式计算 $\|\mathbf{f} - \mathbf{L}\mathbf{u}_k^{(p)}\|_{0,\tau}^2$ 。

③ 计算单元 τ 的三条边的跳量。不妨设当前处理的边为 e , 若 e 为边界边, 则该边的跳量为零; 否则, 分如下三步处理:

Ⓐ 计算边 e 基于单元 τ 的单位外法向量 $\mathbf{n}_e = (n_x, n_y)^T$ 。

Ⓑ 获得与边 e 相邻的另一个单元的编号, 不妨设为 τ_1 , 并计算 $\mathbf{L}^T(n_x, n_y)\mathbf{D}\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)}|_{\tau}$ 和 $\mathbf{L}^T(n_x, n_y)\mathbf{D}\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)}|_{\tau_1}$ 。

Ⓒ 计算边 e 上的跳量:

$$\|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,e}^2 = (\mathbf{L}^T(n_x, n_y)\mathbf{D}\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)}|_{\tau} - \mathbf{L}^T(n_x, n_y)\mathbf{D}\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)}|_{\tau_1})^2$$

④ 累加得单元 τ 的误差指示子 $\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau)$, 即

$$\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau) = h_{\tau}^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{L}\mathbf{u}_k^{(p)}\|_{0,\tau}^2 + h_{\tau} \sum_{e \in \partial\tau \setminus \partial\Omega} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,e}^2$$

3) 标记模块。

本文采用文献[18]中提出的 Dörfler 标记策略来选择需要加密的单元集合。对给定的网格剖分 $\mathbf{T}_k$, 单元误差指示子序列 $\{\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau)\}_{\tau \in \mathbf{T}_k}$ 及标记参数 $\theta \in (0, 1)$, 选取一个满足如下 Dörfler 标记条件且单元个数最少的集合 M_k :

$$\eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, M_k) \geq \theta \eta_{T_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{T}_k) \quad (8)$$

注 1: 在自适应有限元法的最优复杂性分析中, 可以证明, 存在 θ 的一个上界 $\theta^* < 1$, 使得自适应有限元算方法是最优的, 因此 $\theta < 1$ 。对平面弹性力学问题, 一般可取 $\theta = 0.5$ 。

4) 加密模块。

本文采用最新顶点二分法 (newest vertex bisection) 生成网格 T_{k+1} 。设 τ 是一个标记了最新顶点 (该点所对的边最长) 的三角形单元, 最新顶点二分法就是将单元 τ 中最新顶点所对的边一分为二, 得到 2 个新的单元, 并为 2 个子单元标记最新顶点, 如图 2(a) 所示。这种加密单元并不需要满足“内节点”性质 (图 2(b) 为含内节点的单元剖分)。对于任意的形状正则的网格剖分 T_k 和一个包含标记单元的子集合 $M_k \subset T_k$, 采用最新顶点二分法可以得到一个形状正则的协调的网格剖分 T_{k+1} , 有关详细介绍请参见文献[10]。

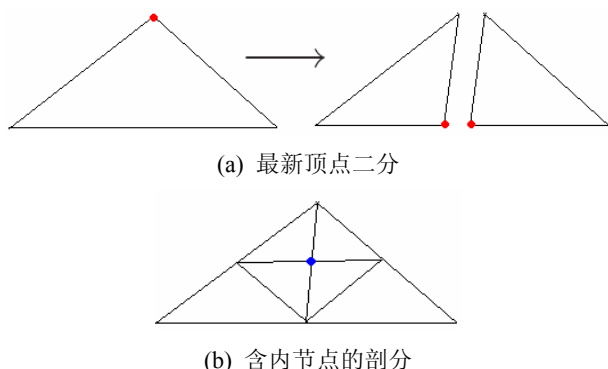


图 2 两种不同的单元加密方法

Fig.2 Two different refinement methods

利用上述 4 个模块及算法 1, 可以得到求解弹性力学问题的自适应有限元算法。

算法 2 (AFEM 算法) 设 f, g_s 为给定的函数, θ 和 ε 分别为给定的 Dörfler 参数和控制精度, 求解弹性力学问题的自适应有限元法的算法流程为:

- ① 给定一个初始网格 T_0 , 令 $k=0$ 。
- ② 调用求解模块, 获得 T_k 上的数值解 $u_k^{(p)}$ 。
- ③ 调用算法 1, 获得 $\eta_{T_k}^2(u_k^{(p)}, \tau)$, 若 $\eta^2(u_k^{(p)}, T_k) \leq \varepsilon$, 则算法结束; 否则, 做以下各步:
- ④ 调用标记模块, 获得网格 T_k 上需要加密的单元集合 M_k 。
- ⑤ 调用加密模块, 生成网格 T_{k+1} 。
- ⑥ 令 $k=k+1$, 转至②。

与通常的 AFEM 算法相比, 上述算法由于不需要标记振荡项, 加密单元也不需要满足“内节点”性质, 所以便于程序实现。

3 基于局部松弛的多重网格法

在上述 AFEM 算法中, 求解模块是其中的主要模块, 它是影响有限元分析整体效率的主要因素之一。近年来发展的基于局部松弛的多重网格法, 在

自适应有限元分析中取得了很好的求解效率。本文, 我们将这种方法应用于弹性力学问题自适应网格下线性有限元方程的求解, 数值实验结果表明, 这种多重网格法具有很好的计算效率和鲁棒性。

设 T_0 和 V_0 分别为初始网格及相应的线性有限元空间, T_k ($1 \leq k \leq J$) 为利用 AFEM 算法 2 得到的嵌套网格序列, 其中 T_k 是由 T_{k-1} 加密生成的, V_k 为相应的线性有限元空间, N_k 是 T_k 上所有内部节点构成的集合。对任意的节点 $x \in N_k$, 记 ϕ_k^x 为 V_k 中对应于 x 的基函数。通常的多重网格法是对 N_k 中所有节点均进行磨光处理 (如调用 Gauss-Seidel 松弛迭代对 N_k 中所有节点均进行磨光), 而基于局部松弛的多重网格法仅需对 N_k 中与加密单元相关的部分节点进行磨光。为此, 定义如下指标集:

$$\bar{N}_k = \{x \in N_k : \text{supp}(\phi_k^x) \cap \text{supp}(\phi_k^{x^*}) \neq \emptyset, \\ x^* \text{ 是 } N_k \text{ 中任意的新增节点}\} \quad (9)$$

为方便起见, 记 $\bar{N}_k = \{x_k^j, j=1, \dots, \bar{n}_k\}$, $\phi_k^j = \phi_k^{x_k^j}$ 为对应于节点 x_k^j 的节点基函数, 其中, $\bar{n}_k = |\bar{N}_k|$, 这里 $|\bar{N}_k|$ 表示集合 $\bar{N}_k$ 中的元素个数。图 3 给出了一种简单加密情形下的三种指标集合。

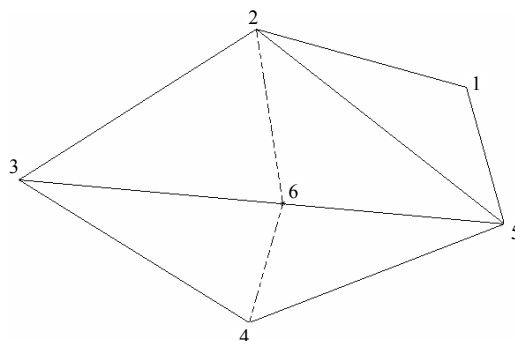


图 3 $N_{k-1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 及 $\bar{N}_k = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Fig.3 $N_{k-1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $\bar{N}_k = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

设弹性力学问题在自适应网格 T_k 下的线性有限元方程为:

$$A_k u_k = f_k, \quad 1 \leq k \leq J \quad (10)$$

对任意的 j ($1 \leq j \leq \bar{n}_k$), 定义算子 $P_k^j : V_J \rightarrow \text{span}(\phi_k^j)$, 且满足:

$$a(P_k^j w, \phi_k^j) = a(w, \phi_k^j), \quad \forall w \in V_J \quad (11)$$

这样, 基于 $\bar{N}_k, 1 \leq k \leq J$ 的局部 Gauss-Seidel 松弛算子可定义为:

$$\mathbf{R}_k = \left(\mathbf{I} - \prod_{j=1}^{\bar{n}_k} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_k^j) \right) \mathbf{A}_k^{-1} \quad (12)$$

求解式(10)的 V-cycle 多重网格迭代格式为:

$$\mathbf{u}_k^{(m+1)} = \mathbf{u}_k^{(m)} + \mathbf{B}_k(\mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^{(m)}), \quad m=0,1,\mathbf{L} \quad (13)$$

对任意给定的 $\mathbf{g} \in V_k$, 算子 $\mathbf{B}_k: V_k \rightarrow V_k$ ($1 \leq k \leq J$), 计算 $\mathbf{B}_k \mathbf{g}$ 的非递归形式的算法为:

算法 3 (计算 $\mathbf{B}_k \mathbf{g}$)

$\mathbf{r} = \mathbf{g}$

For $i = k, k-1, \mathbf{L}, 1$

$\mathbf{v}_i = 0$

$\mathbf{r}_i = 0$

$\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i + \mathbf{R}_i(\mathbf{r} - \mathbf{A}_i \mathbf{v}_i)$

$\mathbf{r}_i \leftarrow \mathbf{r}(ns_i)$

$\mathbf{r} \leftarrow (\mathbf{P}_{i-1}^i)^T (\mathbf{r} - \mathbf{A}_i \mathbf{v}_i)$

End For

$\mathbf{b} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{r}$

For $i = 1, 2, \mathbf{L}, k$

$\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{v}_i + \mathbf{P}_{i-1}^i \mathbf{b}$

$\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} + \mathbf{R}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{b})$

End For

$\mathbf{B}_k \mathbf{g} = \mathbf{b}$

其中, $ns_i = \{k_1, \mathbf{L}, k_{\bar{n}_i}\}$, $\mathbf{r}(ns_i)$ 是由向量 $\mathbf{r}$ 的第 $k_1, k_2, \mathbf{L}, k_{\bar{n}_i}$ 个分量构成的向量。

注 2: 在上述算法 3 中, 第 i 层所有的计算仅涉及 $\bar{N}_i$ 中的节点, 而对 $N_i \setminus \bar{N}_i$ 中的节点并不做处理。因此, 对给定的 $\mathbf{g} \in V_k$, 计算 $\mathbf{B}_k \mathbf{g}$ 的每一次迭代只需进行 $O(\bar{n}_k)$ 次运算。

最后, 我们得到求解弹性力学问题自适应网格剖分下有限元方程式(10)的非递归形式的 V-cycle 多重网格迭代算法。

算法 4 (基于局部松弛的多重网格迭代)

① 令 $m=0$, 给定控制精度 tol , 对任意迭代初值 $\mathbf{u}_k^{(0)}$, 计算 $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^{(0)}$ 。

② 由算法 3, 求 $\mathbf{B}_k \mathbf{r}^{(m)}$ 及 $\mathbf{u}_k^{(m+1)} = \mathbf{u}_k^{(m)} + \mathbf{B}_k \mathbf{r}^{(m)}$ 。

③ 计算 $\mathbf{r}^{(m+1)} = \mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^{(m+1)}$, 若 $\|\mathbf{r}^{(m+1)}\| / \|\mathbf{r}^{(0)}\| \leq tol$, 则算法结束; 否则, 令 $m = m+1$, $\mathbf{u}_k^{(m)} = \mathbf{u}_k^{(m-1)}$, $\mathbf{r}^{(m)} = \mathbf{r}^{(m-1)}$, 转②。

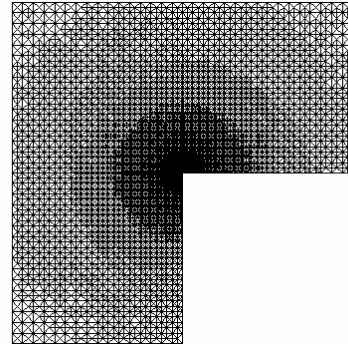
4 数值试验及结果分析

本节通过几个典型算例来验证上述 AFEM 算法的收敛性及基于局部松弛的多重网格法对求解

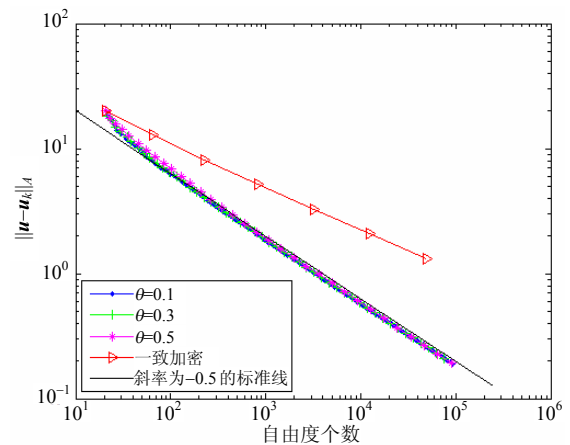
自适应网格下线性有限元方程的计算效率和鲁棒性。在这些数值算例中, 取弹性模量 $E = 3000\text{MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 能量范数 $\|\cdot\|_A = a(\cdot, \cdot)^{1/2}$, 多重网格法的控制精度 $tol = 10^{-8}$ 。本文所有表格中, J 表示自适应网格加密次数, N_{elem} 表示不同自适应网格层上的单元数, N_{itrs} 和 $\bar{N}_{itrs}$ 分别表示多重网格法(简记为 MG)和基于局部松弛的多重网格法(简记为 Local MG)的迭代次数, $E_{rel} = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_J\|_A / \|\mathbf{u}\|_A$, 其中, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_J$ 分别为问题的精确解和有限元解。

算例 1. L-型区域问题。

设 $\Omega = [-1, 1]^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$, 选择适当的 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}_S$, 使得弹性力学问题的精确解为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, 其中, $u_1(x, y) = u_2(x, y) = r^{2/3} \sin(2\theta/3)$ 。图 4 和图 5 分别给出了取不同 θ 值时线性元和二次元对应的误差曲线图。为了说明本文设计的 AFEM 算法的优越性, 图 4 和图 5 中还列出了一致加密网格下的误差下降情况。在误差曲线图中, 斜率为 $-1/2$ (线性元)和 -1 (二次元)的标准线是可以上下移动的。



(a) $\theta = 0.5$ 时加密 24 次的网格图



(b) $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时误差曲线图

图 4 线性元

Fig.4 Case of linear element

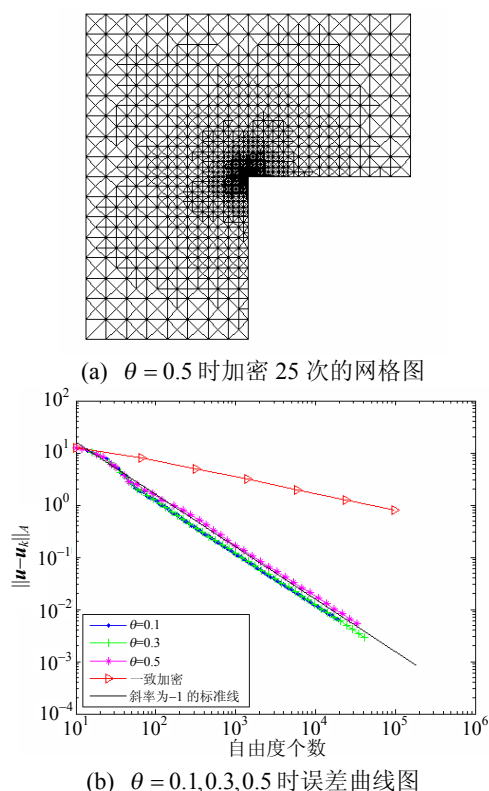


图 5 二次元

Fig.5 Case of quadratic element

同时, 利用所设计的基于局部松弛的多重网格法求解算例 1 中自适应网格下的线性有限元方程, 相应的数值结果分别如表 1 和图 6 所示。另外, 为了说明本文设计的求解方法的优越性, 我们还列出了通常多重网格法的数值结果。

算例 2. 双奇点问题。

设 $\Omega = [-1, 1]^2$, 选择适当的 f 和 g_s , 使得真解函数 $u = (u_1, u_2)^T$ 为:

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = 1.0 / ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + 0.01) + 1.0 / ((x + 0.5)^2 + (y + 0.5)^2 + 0.01)$$

图 7 和图 8 分别给出了取不同 θ 值时自适应线性元和二次元对应的误差曲线图。利用基于局部松弛的多重网格法求解自适应网格下的线性有限元方程, 相应的数值结果分别如表 2 和图 9 所示。

表 1 两种多重网格法求解算例 1 所得的数值结果

Table 1 Numerical results of two different multigrid methods for example 1

J	N_{elem}	E_{rel}	N_{itrs}	$\bar{N}_{itrs}$
5	72	1.39×10^{-1}	6	6
10	223	7.69×10^{-2}	7	7
15	850	3.73×10^{-2}	8	8
20	3799	1.72×10^{-2}	8	8
25	18345	7.74×10^{-3}	8	8
30	92612	3.42×10^{-3}	7	8
33	247581	2.09×10^{-3}	9	9

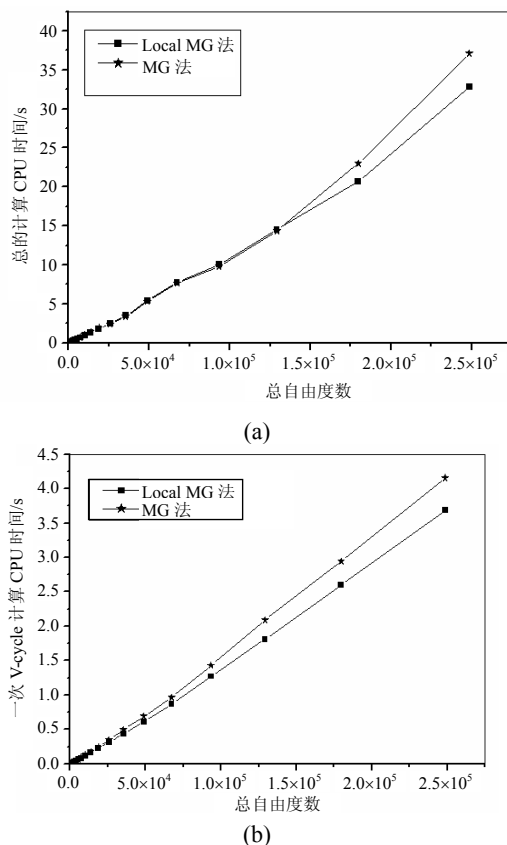


图 6 两种多重网格法求解自适应网格下线性有限元方程的总 CPU 时间和一次 V-cycle CPU 时间 /s

Fig.6 The total CPU times in seconds and the CPU times of one V-cycle for two different multigrids

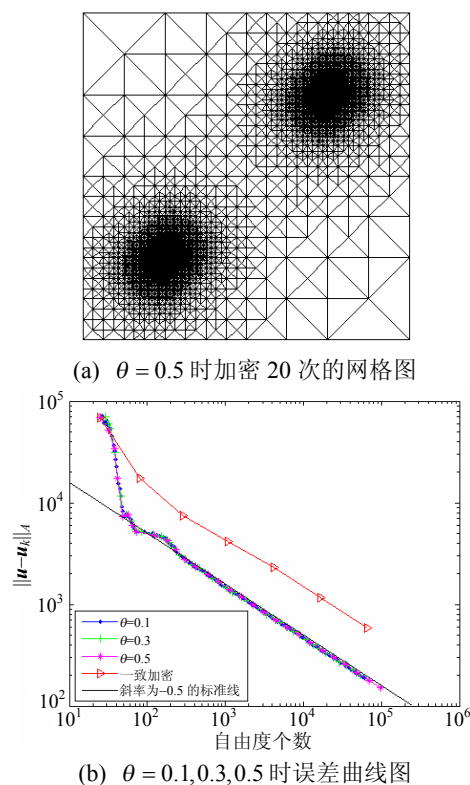
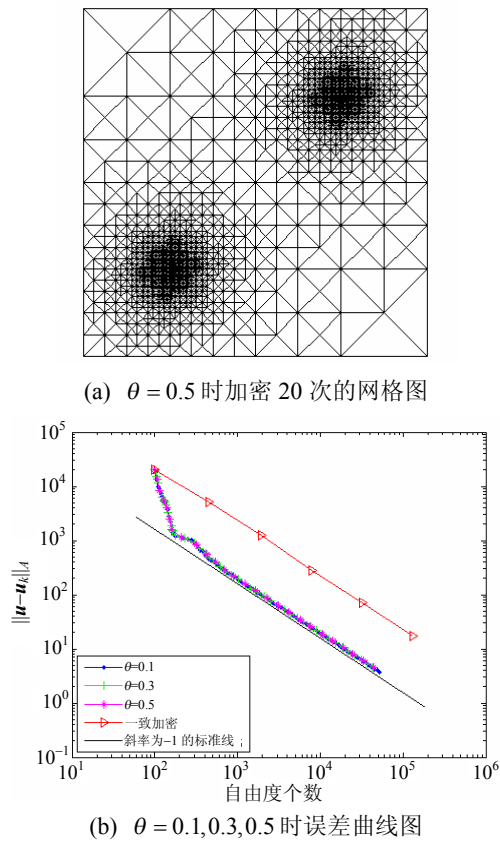


图 7 线性元

Fig.7 Case of linear element



(a) $\theta = 0.5$ 时加密 20 次的网格图

(b) $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时误差曲线图

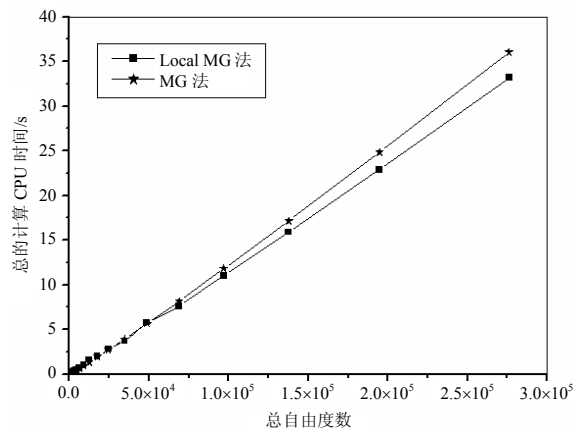
图 8 二次元

Fig.8 Case of quadratic element

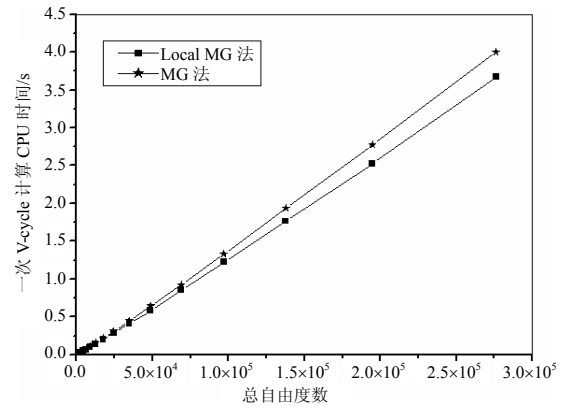
表 2 两种多重网格法求解算例 2 所得的数值结果

Table 2 Numerical results of two different multigrid methods for example 2

J	N_{elem}	E_{rel}	N_{itrs}	$\bar{N}_{itrs}$
5	192	3.56×10^{-1}	6	6
10	840	1.59×10^{-1}	8	10
15	4456	6.82×10^{-2}	9	10
20	24312	2.89×10^{-2}	9	10
23	68856	1.72×10^{-2}	9	9
25	137564	1.21×10^{-2}	9	9
27	275912	8.59×10^{-3}	9	9



(a)



(b)

图 9 两种多重网格法求解自适应网格下线性有限元方程的总 CPU 时间和一次 V-cycle CPU 时间 /s

Fig.9 The total CPU times in seconds and the CPU times of one V-cycle for two different multigrids

算例 3. 边界层奇性问题。

设 $\Omega = [0, 4]^2$ ，解函数在边界 $y = 0$ 和在边界 $x = 0$ 具有奇性。图 10 给出了 $\theta = 0.5$ 时自适应网格加密图，加密单元均集中在解函数有奇性的地方。图 11 给出了取不同 θ 值时自适应线性元和二次元对应的误差曲线图。利用基于局部松弛的多重网格法求解自适应网格下的线性有限元方程，相应的数值结果总结如表 3 所示。

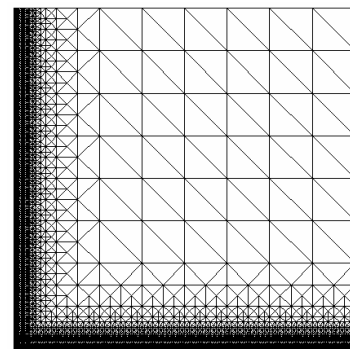
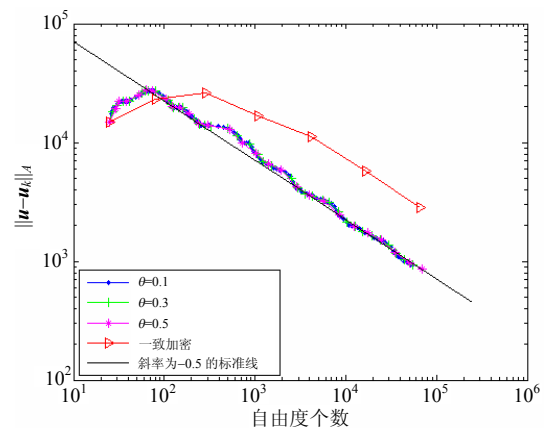


图 10 $\theta = 0.5$ 时加密 20 次的网格图

Fig.10 The 20th refined mesh when $\theta = 0.5$



(a) 线性元

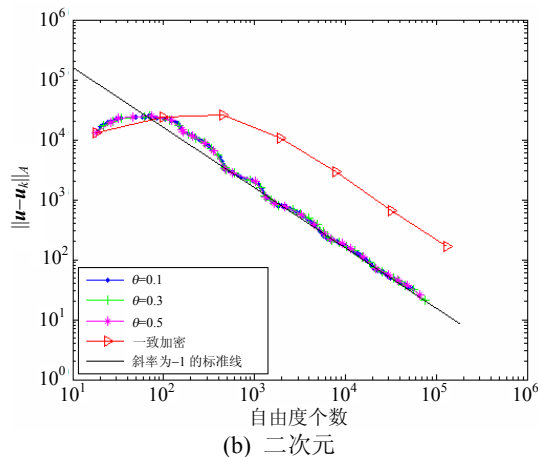
图 11 $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时误差曲线图Fig.11 The error graphs when $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$

表 3 两种多重网格法求解算例 3 所得的数值结果

Table 3 Numerical results of two different multigrid methods for example 3

J	N_{elem}	E_{rel}	N_{itrs}	$\bar{N}_{itrs}$
10	1012	2.79×10^{-1}	7	8
15	5305	1.04×10^{-1}	9	9
20	33760	4.19×10^{-2}	8	8
22	68284	2.89×10^{-2}	7	8
24	137019	2.07×10^{-2}	7	8
26	275410	1.45×10^{-2}	7	8

以上数值结果表明:

1) 本文设计的自适应有限元方法是收敛的, 且具有拟最优计算复杂性, 即图 4、图 5、图 7、图 8、图 11 中误差曲线随单元数的增加而下降并且平行于斜率为 $-1/2$ (线性元) 和 -1 (二次元) 的标准线, 达到了用最小的计算量获得最大计算精度的目标。另外, 当标记参数 $\theta \in (0.1, 0.5)$ 时, 相应的自适应算法具有很好的数值稳定性。

2) 基于局部松弛的多重网格法仅需对与加密单元相关的部分节点进行磨光, 与标准的多重网格法相比, 在迭代次数相当的情况下, 它所需计算 CPU 时间应更少, 具有更好的计算效率, 从而表明本文设计的基于局部松弛的多重网格法具有最优性。

5 结论

有限元方法是处理弹性力学问题最为有效的数值方法之一, 但要精细地解算这类问题仍很困难, 我们一直面临大规模、高效率、高精度等难题困扰。由于实际问题的解的光滑性不高, 尽管使用高次元 (p -方法) 可提高计算精度, 但高次元在计算中有时会遇到不收敛与稳定性的问题。一种行之有

效的方法是利用自适应低阶有限元法。

本文的目的就是为平面弹性力学问题, 设计了一种不需要标记振荡项和加密单元不需要满足“内节点”性质的自适应有限元法, 通过利用自适应加密过程中每层网格上只有局部单元需要加密这一特性, 设计了一种求解自适应网格下的有限元方程的基于局部松弛的多重网格法。尽管我们仅做了极为有限的数值实验, 但所得到的数值结果还是相当令人鼓舞的。当然, 我们还需要对更一般的问题进行更广泛的数值测试和相应的算法理论分析。文中的算法思想和分析方法也可以被推广到弹塑性或动力学问题的有限元计算中。

参考文献:

- [1] Senturia S, Aluru N, White J. Simulating the behavior of MEMS devices: Computational methods and needs [J]. IEEE Computational Science and Engineering, 1997, 4: 30—43.
- [2] Senturia S, Harris R, Johnson B, et al. A computer-aided design system for micro-electromechanical systems [J]. Journal of Micro-electromechanical Systems, 1992, 1: 3—13.
- [3] Brenner C, Li Yengsung. Linear finite element methods for planar linear elasticity [J]. Mathematics of Computation, 1992, 59: 321—338.
- [4] 陈竹昌, 王建华, 王卫中. 自适应多层网格有限元求解应力集中问题[J]. 同济大学学报, 1994, 22(3): 203—208.
Chen Zhuchang, Wang Jianhua, Wang Weizhong. Adaptive multigrid FEM for stress concentration [J]. Journal of Tongji University, 1994, 22(3): 203—208. (in Chinese)
- [5] 梁力, 林韵梅. 有限元网格修正的自适应分析及其应用[J]. 工程力学, 1995, 12(2): 109—118.
Liang Li, Lin Yunmei. Adaptive mesh refinement of finite element method and its application [J]. Engineering Mechanics, 1995, 12(2): 109—118. (in Chinese)
- [6] 王建华. 线弹性有限元的自适应加密与多层网格法求解[J]. 河海大学学报, 1994, 22(3): 16—22.
Wang Jianhua. Adaptive refinement and multigrid solution for linear finite element method [J]. Journal of Hohai University, 1994, 22(3): 16—22. (in Chinese)
- [7] 王建华, 殷宗泽, 赵维炳. 自适应多层网格有限元网格生成器研制[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1): 86—92.
Wang Jianhua, Yin Zongze, Zhao Weibing. Implementation of the mesh generator for adaptive multigrid finite element method [J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1995, 12(1): 86—92. (in Chinese)

(参考文献[8]—[18]转第 91 页)

析解和数值算例。为求解梯度材料中任意形孔对反平面剪切波的散射与动应力集中问题提供一种方法。

参考文献:

- [1] Rousseau C E, Tippur H V. Influence of elastic gradient profiles on dynamically loaded functionally graded materials: cracks along the gradient [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(45): 7839—7856.
- [2] Kennedy T C, Kim J B. Dynamic stress concentrations in micropolar elastic materials [J]. *Computers and Structures*, 1992, 45: 53—60.
- [3] Li C Y, Weng G J. Dynamic stress intensity factor of a cylindrical interface crack with a functionally graded interlayer [J]. *Mechanics of Materials*, 2000, 33: 325—333.
- [4] 胡超, 马兴瑞, 黄文虎. 含双圆孔平板弹性波散射与动应力分析[J]. *力学学报*, 1998, 30(5): 587—596.
Hu Chao, Ma Xingrui, Huang Wenhui. Dynamic stress concentrations in thin plates with two circular cutouts 1) [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 30(5): 587—596. (in Chinese)
- [5] Pao Y H, Chao C C. Diffractions of flexural waves by a cavity in an elastic plate [J]. *AIAA Journal*, 1964, 2(11): 2004—2010.
- [6] 胡超, 刘殿魁. 无限大板开孔弹性波的散射及动应力 [J]. *力学学报*, 1995, 增刊 1: 125—134.
Hu Chao, Liu Diankui. Application of method of complex function to dynamic stress concentrations in thin plate with cutouts [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, Suppl 1: 125—134. (in Chinese)
- [7] Datta S K, Shah A H. Scattering of SH waves by embedded cavities [J]. *Wave Motion*, 1982, 4: 265—283.
- [8] Pao Y H. Dynamical stress concentration in an elastic plate [J]. *J Appl Mech*, 1962(3): 299—305.
- [9] Pao Y H, Mow C C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations [M]. New York: Crane and Russak, 1973: 154—183.
- [10] Fang Xueqian, Hu Chao. Dynamic stress concentration of a circular cutout buried in semi-infinite plate subjected to flexural waves [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, 3(74): 382—385.

(上接第 67 页)

- [8] Cai Z Q, Korsawe J, Starke G. An adaptive least squares mixed finite element method for the stress displacement formulation of linear elasticity [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2005, 21(1): 132—148.
- [9] Whiler T P. Locking free adaptive discontinuous galerkin FEM for linear elasticity problem [J]. *Mathematics of Computation*, 2006, 75(255): 1087—1102.
- [10] Chen L, Zhang C S. A coarsening algorithm on adaptive grids by newest vertex bisection and its applications [J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2010, 28(6): 767—789.
- [11] Verfürth R. A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problem [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 176: 419—440.
- [12] Carstensen C, Dolzmann G, Funken S A, Helm D S. Locking-free adaptive mixed finite element methods in linear elasticity [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190(13): 1701—1718.
- [13] Lonsing M, Verfürth R. A posteriori error estimators for mixed finite element methods in linear elasticity [J]. *Numerische Mathematik*, 2004, 97: 757—778.
- [14] Mitchell W F. Optimal multilevel iterative methods for adaptive grids [J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, 13: 146—167.
- [15] Wu H J, Chen Z M. Uniform convergence of multigrid V-cycle on adaptively refined finite element meshes for second order elliptic problems [J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2006, 49(10): 1405—1429.
- [16] Carstensen C. Convergence of adaptive finite element methods in computations mechanics [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 59(9): 2119—2130.
- [17] Cascon J, Kreuzer C, Nochetto R, Siebert K. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, 46: 2524—2550.
- [18] Dörfler W. A convergent adaptive algorithm for poisson's equation [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, 33(3): 1106—1124.