

文章编号: 1000-4750(2013)10-0014-05

三点弯曲缺口梁 T 应力的确定

赵艳华, 刘 津, 甘楠楠

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁, 大连 116024)

摘 要: T 应力是存在于裂纹尖端平行于裂纹方向的应力, 是裂纹尖端应力级数展开式中的常数项, 它对裂缝尖端应力场的贡献不容忽视。三点弯曲梁是普通实验室中用来测定试件断裂性能的基本几何形式, 为保证这些断裂参数确定的有效性, 必须首先确定裂纹尖端 T 应力的大小, 才能明确 T 应力对断裂参数的影响程度。该文通过有限元数值模拟得到跨高比为 4 的三点弯曲缺口梁和纯弯作用下单边裂纹尖端的 T 应力大小, 与已有文献的比较验证了有限元计算的有效性。在此基础上根据圣维南原理, 由跨高比为 4 和纯弯作用这两种情况下的 T 应力推导出一般跨高比情况下裂纹尖端的 T 应力表达式, 并以跨高比为 6、8 和 10 三种情况为例, 进行了计算并与该文的有限元计算结果进行比较, 验证了该文提出的 T 应力计算公式的可靠性。

关键词: 断裂力学; 裂纹尖端; 三点弯曲梁; T 应力; 有限元分析

中图分类号: O341 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.06.0446

DETERMINATION OF T -STRESS FOR THREE-POINT BENDING NOTCHED BEAMS

ZHAO Yan-hua, LIU Jin, GAN Nan-nan

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: The T -stress which acts parallel to a crack, which corresponds to the constant term in the stress series at the crack tip, and its influence on the stress field can not be ignored. Three-point bending beam is generally used for testing fracture parameters in ordinary laboratories. Under this circumstance, T -stress at the crack tip must be determined first to see whether its value would influence the fracture parameters. In this paper, finite element program Abaqus is used to derive the T -stress for a three-point bending beam with a span-to-depth ratio of 4 and a single-edge notched beam subjected to pure bending. Thereafter, a general expression for T -stress of three-point bending beams of arbitrary span-to-depth ratio is presented based on St. Venant Principle. T -stress of three-point bending beams with span-to-depth ratio of 6, 8 and 10 is calculated using the proposed expression, and reasonable agreement is observed with the finite element analysis.

Key words: fracture mechanics; crack tip; three-point bending beam; T -stress; finite element analysis

T 应力是裂纹尖端平行于裂纹平面的应力, 是裂纹尖端应力场的第二非奇异性, 也是常数项, 不随离裂纹尖端的距离而变。 T 应力的存在对传统的单参数, 即应力强度因子 K 确定裂纹尖端应力场理念提出挑战。在双向应力作用下, 忽略 T 应力的存在不能解释横向荷载的影响, 也有悖边界弹性问题

解的唯一性^[1]。 T 应力对弹性材料裂纹起裂方向的判定以及断裂韧度的大小影响也是不容忽视的。以线弹性材料的 I 型断裂为例, 当 T 应力比较大时, 裂纹扩展方向会偏离原来的裂纹线, 而且开裂时临界应力强度因子也小于材料的断裂韧度^[2-3]。对弹塑性材料, T 应力对裂纹尖端塑性区的大小、形状

收稿日期: 2012-06-24; 修改日期: 2013-01-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(50708014)

通讯作者: 赵艳华(1974—), 女, 山西介休人, 副教授, 博士, 从事混凝土断裂力学研究(E-mail: yanhuazh@dlut.edu.cn).

作者简介: 刘 津(1989—), 女, 天津人, 硕士生, 从事混凝土断裂性能研究(E-mail: 814969159@qq.com);

甘楠楠(1987—), 女, 山东枣庄人, 硕士生, 从事混凝土断裂性能研究(E-mail: gannan_nan@126.com).

以及裂纹的扩展路径也有明显的影响^[4]。因此在断裂力学界 T 应力引起了越来越多的重视,甚至将其和应力强度因子 K 一起作为双参数来建立材料断裂性能的判定准则^[5]。

对简单的几何和加载形式容易得到裂纹尖端的应力强度因子 K 和 T 应力的解析解,而对于较复杂的几何形式或者加载方式,则可以通过数值方法求解。应力强度因子 K 是断裂力学中的传统参数,体现裂纹尖端的奇异性,是控制裂纹尖端应力场的主要参数。经过近百年的发展大多数几何形状和加载条件下的应力强度因子 K 已经汇聚成册^[6]。可对于 T 应力的计算,目前只有少数文献提供 T 应力的计算表达式,而且也是对纯弯或者纯拉等简单加载形式。目前 T 应力的数值计算方法也有很多,如应力差分法^[7]、边界配置法^[8]、利用最小势能或余能定理的可变技术^[9]或者采用杂交单元 HCE 进行计算^[10]等。近年来一直专注 T 应力计算的 Fett 提出格林函数确定 T 应力的方法,并给出了各类几何形状和加载条件下的格林函数^[11]。

三点弯曲缺口梁是实验室测试材料断裂性能的主要试件,但在测试计算过程中未考虑 T 应力的影响。在这些情况下忽略 T 应力是否合理,或者说判断 T 应力的存在是否对断裂参数有影响,首先需要确定裂纹尖端 T 应力的大小。目前针对单边裂纹的 T 应力计算有部分数值结果,比如跨高比为 12^[12],或者缝高比范围在[0.1, 0.6]。虽然通过直接拉伸和纯弯构件可以得到单边裂纹的格林函数,但三点弯曲梁沿裂纹线上的应力分布由于受到集中力的影响,在受压区很复杂^[13],与格林函数相乘再进行积分进行 T 应力的计算不适合工程应用。本文利用通用的 Abaqus 有限元程序得到两种跨高比情况下的裂纹尖端 T 应力,在此基础上根据圣维南原理,得到三点弯曲梁跨高比 $\beta \geq 2$ 情况下的 T 应力,并与本文的有限元计算结果进行了比较,验证了本文方法的有效性和可靠性。

1 三点弯曲缺口梁 T 应力的有限元计算

在 Abaqus 程序的有限元计算中,裂纹尖端的 T 应力计算是基于关联积分方法(interaction integral method)^[14],详细背景可参考 Abaqus 的相关帮助文件。这里仅作简单介绍。记 J 为实际的应力场产生的 J 积分,另外考虑一虚拟辅助的半无限大裂纹应

力场,在裂纹尖端作用有平行于裂纹方向的集中荷载 f ,这种情况下裂纹尖端应力场产生的 J 积分记为 J^{aux} 。将实际和虚拟辅助的应力场二者叠加,则总的 J^{I} 积分为:

$$J^{\text{I}} = J + J^{\text{aux}} + I \quad (1)$$

其中, I 为实际的应力场与虚拟的应力场相关联的积分,定义为:

$$I = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} n \cdot M \cdot q d\Gamma \quad (2)$$

其中:

$$M = \sigma : \varepsilon_{\text{aux}}^{\text{L}} I - \sigma \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{aux}}^{\text{L}} - \sigma_{\text{aux}}^{\text{L}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

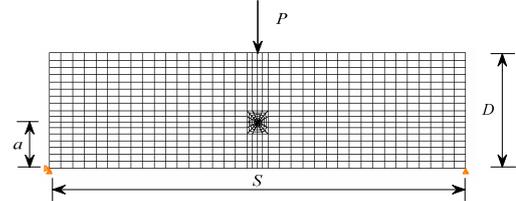
式(2)和式(3)中: Γ 是环绕裂纹尖端的围线; q 是虚拟裂纹尖端的扩展; σ 、 ε 分别代表实际应力场中的应力和应变; $\sigma_{\text{aux}}^{\text{L}}$ 和 $\varepsilon_{\text{aux}}^{\text{L}}$ 代表虚拟应力场 f 产生的应力和应变。

根据选取的虚拟应力场 f ,对于平面应变问题:

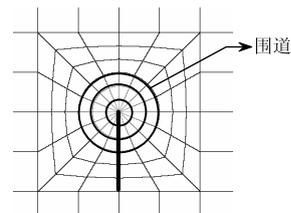
$$T = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{I}{f} \quad (4)$$

其中: E 为材料的弹性模量; ν 为材料的泊松比。

根据以上基本理论,对图 1 所示的三点弯曲缺口梁进行了裂纹尖端 T 应力的计算。材料取线弹性, $E=30\text{MPa}$, $\nu=0.3$,荷载取 $P=100\text{N}$ 。在选定跨高比的情况下,初始裂纹长度与高度的比值 a/D 的范围从 0.1 到 0.9,步长为 0.1。在有限元计算过程中对裂尖大约 $D/10$ 范围内网格进行细分,用 collapse element 模拟裂尖奇异性,单元采用平面应变 8 节点单元 CPE8。图 1 为跨高比 $\beta=4$,缝高比 $a/D=0.4$ 的三点弯曲缺口梁网格划分。



(a) 网格划分



(b) 裂纹尖端网格放大图

图 1 三点弯曲缺口梁网格划分示意图($\beta=4$, $a/D=0.4$)

Fig.1 FE mesh of three-point bending notched beam

$$(\beta=4, a/D=0.4)$$

在 Abaqus 有限元计算中,采用围绕裂纹尖端的围道积分进行求解。从式(1)可以看出,关联积分 I 理论上具有与路径无关的特性,因此围道积分可以任意选取。为提高计算的准确性,Abaqus 采用的围道远离裂纹尖端,因此区域积分在普通的网格划分就能得到精确度比较高的关联积分 I 。因此在计算过程中,选取了围绕裂纹尖端的 4 个围道,但计算结果只取远离裂纹尖端的第 3 个或第 4 个围道,而且这两个围道的计算结果几乎一致,保证了关联积分 I 的线性无关。

对裂纹尖端应力强度因子的计算,Abaqus 有限元程序也采用了关联积分方法。文献[15-16]采用 Abaqus 程序进行了裂缝尖端应力强度因子的数值计算。为检验本文有限元程序计算 T 应力的可靠性,论文同时对裂纹尖端的应力强度因子进行了计算,并与现有的应力强度因子手册中提供的闭合解进

行比较。表 1 列出了 $\beta=4$ 和纯弯两种情况下裂纹尖端应力强度因子 $K/\sigma\sqrt{\pi a}$ (其中 $\sigma = \frac{6M}{BD^2}$,

$M = \frac{PS}{4}$ 为跨中弯矩)的比较结果。

表 1 有限元计算结果应力强度因子 $K/(\sigma\sqrt{\pi a})$ 与已有成果比较

Table 1 Comparison of stress intensity factor $K/(\sigma\sqrt{\pi a})$ from the present FEM calculation and solutions in the literature

$\alpha=a/D$	$\beta=4$		纯弯	
	本文计算结果	文献[6]	本文计算结果	文献[6]
0.1	0.980	1.007	1.046	1.041
0.2	0.977	0.988	1.055	1.035
0.3	1.039	1.045	1.124	1.098
0.4	1.174	1.179	1.260	1.234
0.5	1.406	1.416	1.497	1.475
0.6	1.819	1.831	1.913	1.898
0.7	2.624	2.630	2.724	2.716
0.8	4.562	4.543	4.670	4.674
0.9	12.291	12.221	12.444	12.469

表 2 有限元计算结果 T/σ 与已有成果比较

Table 2 Comparison of T/σ from the present FEM calculation and solutions in the literature

$\alpha=a/D$	跨高比 $\beta=4$			跨高比 $\beta=12$			纯弯		
	本文计算结果	文献[11]	文献[10]	本文计算结果	文献[10]	文献[12]	本文计算结果	文献[12]	文献[11]
0.1	-0.349	-0.356	-0.348	-0.369	-0.367	-0.369	-0.379	-0.379	—
0.2	-0.236	-0.233	-0.236	-0.239	-0.237	-0.239	-0.239	-0.241	-0.234
0.3	-0.130	-0.129	-0.129	-0.098	-0.096	-0.099	-0.080	-0.082	-0.080
0.4	-0.005	-0.003	-0.004	0.077	0.078	0.075	0.120	0.116	0.122
0.5	0.175	0.176	0.178	0.320	0.321	0.318	0.397	0.391	0.396
0.6	0.483	0.481	0.489	0.714	0.712	0.712	0.833	0.827	0.831
0.7	1.147	1.144	—	1.495	—	1.486	1.670	1.660	1.678
0.8	3.054	2.800	—	3.647	—	3.636	3.914	3.910	3.950
0.9	14.111	11.500	—	15.167	—	15.160	15.779	15.720	14.000

从表 1 看出,在缝高比[0.1, 0.9]范围内,有限元计算得到的 K 与裂缝分析应力手册中提供的解符合得非常好。因此同样用关联积分得到的 T 应力的在缝高比[0.1, 0.9]范围内也是有效可靠的。据此,对 $\beta=4$ 、12 以及纯弯情况下的 T 应力进行了有限元计算,结果见表 2。同时表 2 也列出了其他文献提供的一些数值结果。

从表 2 所列的几种情况看,对于跨高比 $\beta=12$ 和纯弯状态下,缝高比 $\alpha=a/D$ 在[0.1, 0.9],本文的 Abaqus 有限元计算得到的裂纹尖端 T 应力与文献[12]的计算结果比较接近;对于跨高比 $\beta=4$ 和纯弯状态,缝高比 $\alpha \leq 0.6$ 时,Abaqus 有限元计算结果与采用权函数方法得到的 T 应力^[11]接近,而当缝高比较大时($\alpha \geq 0.8$)时,Abaqus 计算结果与文献[11]

误差较大。

根据有限元计算结果,对 $\beta=4$ 和纯弯这两种情况下的 T 应力进行了曲线拟合,以便在下一节中进行一般跨高比的 T 应力计算。

对 $\beta=4$:

$$\left(\frac{T}{\sigma}\right)_4 = \frac{0.9582\alpha^3 - 2.1562\alpha^2 + 1.8127\alpha - 0.4405}{(1-\alpha)^2} \quad (5)$$

对纯弯状态:

$$\left(\frac{T}{\sigma}\right)_b = \frac{0.9012\alpha^3 - 2.438\alpha^2 + 2.1988\alpha - 0.5034}{(1-\alpha)^2} \quad (6)$$

拟合式(5)和式(6)与计算数据点的相关系数 R^2 都在 99%以上。

2 三点弯曲梁 T 应力计算

对跨高比为 β 三点弯曲缺口梁(如图 2 所示), 根据圣维南原理, 当 β 和 γ 的取值范围都大于 2 时, 在距跨中 $D\gamma/2$ 的两边加一对平衡力系, 不会改变裂纹尖端的应力状态。据此可以将图 2(a)的受力分解为图 2(b)和图 2(c)的叠加, 而图 2(a)所示的裂纹尖端应力强度因子可以用图 2(b)和图 2(c)两种情况下的应力强度因子进行叠加得到^[17]。作为裂纹尖端应力场中的常数项, T 应力也可以进行叠加计算:

$$T_{\beta} = T_{\gamma} + T_b \quad (7)$$

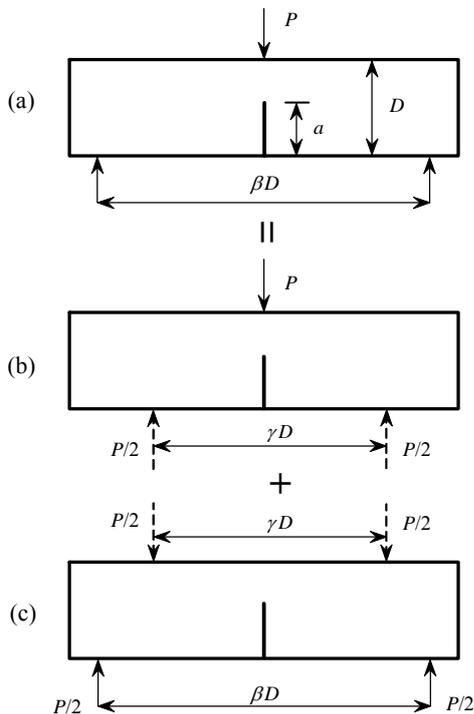


图 2 三点弯曲缺口梁 T 应力计算图示
Fig.2 Illustration of T -stress calculation in three-point bending notched beam

设

$$\frac{T_{\beta}BD^2}{M_{\beta}} = t_{\beta}, \quad \frac{T_{\gamma}BD^2}{M_{\gamma}} = t_{\gamma}, \quad \frac{T_bBD^2}{M_b} = t_b \quad (8)$$

其中: B 、 D 分别为三点弯曲缺口梁试件的厚度和高度; M_{β} 、 M_{γ} 和 M_b 分别对应图 2(a)、图 2(b)和图 2(c)三种情况下的梁跨中弯矩, 即:

$$M_{\beta} = \frac{P\beta D}{4}, \quad M_{\gamma} = \frac{P\gamma D}{4}, \quad M_b = \frac{P(\beta - \gamma)D}{4} \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(7)经整理可得:

$$t_{\beta} = t_b - \frac{\gamma}{\beta}(t_b - t_{\gamma}) \quad (10)$$

从式(10)可以看出, 跨高比为 β 的三点弯曲梁

裂纹尖端的 T 应力大小可以由纯弯构件的 T 应力大小 t_b 和另外一跨高比为 γ 对应的 T 应力大小 t_{γ} 求得。由于 γ 是任意的, 因此式(10)等号右边的第二项 $\gamma(t_b - t_{\gamma})$ 应是一常数项。方便起见, 这里取 $\gamma=4$ 。则三点弯曲梁裂纹尖端的 T 应力计算公式简化为:

$$t_{\beta} = t_b - \frac{4}{\beta}(t_b - t_4) \quad (11)$$

式(11)隐含着三点弯曲梁跨中裂纹尖端的应力场与同样弯矩作用下的裂纹尖端应力场并不相同, 由于集中力作用在裂纹线上, 集中力的存在对裂纹线上的应力状态是有影响的。因此利用权函数方法求解裂纹尖端的断裂参数时, 裂纹线上的应力分布不能采用简单梁理论计算。事实上矩形截面三点弯曲梁跨中应力理论解是一无穷级数的形式^[13]。因此采用格林函数进行三点弯曲缺口梁尖端 T 应力计算时, 三点弯曲梁上跨中应力分布的复杂性将给计算带来困难, 所以权函数方法不是计算三点弯曲缺口梁裂纹尖端断裂参数的最佳选择。

文献[18]在推导横向弯曲作用下裂纹尖端应力强度因子时曾解释了跨中集中力的影响, 由于 T 应力也是裂纹尖端应力场的分量, 因此跨中集中力的影响同样适用于 T 应力。裂纹平面承受相同弯矩作用时, 在裂纹尖端产生的应力场应该是相同的, 但对三点弯曲梁来说, 作用在裂纹面上的集中力在裂纹面及其附近会产生一局部的压应力场, 从而降低弯矩产生的应力场, 两者之间可以进行叠加, 用公式表示如下:

$$T_{\beta} = T_b - T_p \quad (12)$$

其中: T_{β} 表示跨高比为 β 的三点弯曲梁裂纹尖端的 T 应力; T_b 表示同弯矩作用下裂纹尖端的 T 应力; $-T_p$ 表示集中力产生的附加压应力场导致的裂纹尖端 T 应力, 取负值是让 T_p 为正。 T_p 的含义是相应的附加拉应力场产生的 T 应力, 假定 T_p 一般形式为:

$$T_p = t_p \frac{P}{BD} \quad (13)$$

将式(13)和式(8)代入式(12), 经整理可得:

$$t_{\beta} = t_b - \frac{4}{\beta}t_p \quad (14)$$

将式(14)与式(11)进行比较, 得到:

$$t_p = t_b - t_4 \quad (15)$$

式(15)的推导是对式(11)的另一种解释, 即三点弯曲缺口梁的 T 应力是由同样弯矩作用和集中力共同影响的结果。

利用式(8)和式(11)以及弯矩和应力的关系式 $\sigma = \frac{6M}{BD^2}$, 最终可以得到跨高比 $\beta \geq 2$ 情况下(圣维南原理成立的前提下)的 T 应力:

$$\left(\frac{T}{\sigma}\right)_{\beta} = \left(\frac{T}{\sigma}\right)_b - \frac{4}{\beta} \left[\left(\frac{T}{\sigma}\right)_b - \left(\frac{T}{\sigma}\right)_4 \right] \quad (16)$$

其中, $\left(\frac{T}{\sigma}\right)_b$ 和 $\left(\frac{T}{\sigma}\right)_4$ 在上一节已经得到其拟合公式, 即式(5)和式(6)。

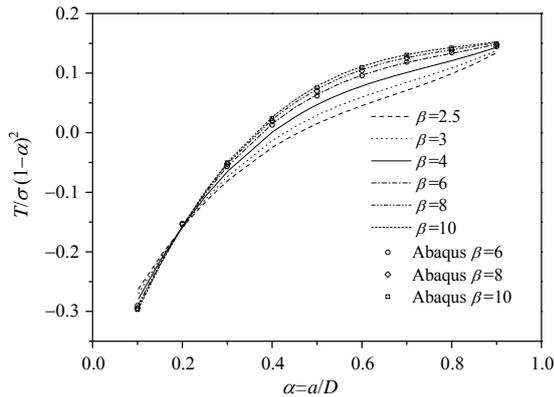


图3 三点弯曲缺口梁 T 应力计算结果

Fig.3 Calculation of T -stress in three-point bending notched beam

图3给出了根据式(16)得到的不同跨高比情况下, 三点弯曲缺口梁裂纹尖端 T 应力随裂缝长度的变化情况。为保证圣维南原理的有效性, 跨高比 β 选取了 2.5、3、4、6、8、10 几种情况。从图3可以看出, 随着试件裂纹尺寸的增大, 裂纹尖端的 T 应力数值也在增大, 经历从负到正的变化。根据修正的最大切应力准则^[2], 当 $T < 0$ 或 $T > 0$ 但值较小时, T 应力不会对材料的断裂韧度和起裂方向产生影响; 当 $T > 0$ 而且数值较大时, 将会对裂纹的起裂方向和材料断裂韧度的确定有明显影响。对于实验室确定混凝土断裂韧度经常采用的标准三点弯曲梁而言, $T=0$ 的位置大约在 $a/D=0.4$ 处, 因此不会对混凝土断裂韧度的准确确定有影响。从图3还可以看出, 对于缝高比 $\alpha > 0.2$ 的试件, 随着跨高比的增大, T 应力也是增大的, 说明跨高比对 T 应力的影响还是很明显的。不过当 β 较大时(如 $\beta > 6$ 时), 跨高比的影响不很明显, 因为大跨高比的试件已经接近纯弯状态了, 集中荷载的局部影响相比较弱。另外, 由于 T 应力不能通过试验直接验证, 图3同时给出了式(16)确定的 $\beta=6、8$ 和 10 三种情况下的裂纹尖端的 T 应力与有限元计算结果的比较, 符合得较好。

3 结论

本文根据圣维南原理由纯弯和标准三点弯曲缺口梁裂纹尖端的 T 应力推导了跨高比 $\beta \geq 2$ 时裂纹尖端 T 应力的计算公式。同时解释了在承受相同弯矩作用下, 三点弯曲梁和受弯构件裂纹尖端的应力场是不同的, 两者的差距可以用作用在裂纹面的集中力在裂纹面及附近引起的局部压应力场解释。

目前确定 T 应力采用的格林函数方法, 即假定格林函数的形式, 通过直接拉伸和纯弯状态的 T 应力求得格林函数中的系数, 然后将其与三点弯曲梁跨中截面的正应力分布函数相乘在裂纹区间进行积分得到。由于三点弯曲梁跨中截面的正应力分布复杂, 所以格林函数在三点弯曲梁 T 应力的计算过程中并不占优势。文献[11]的 T 应力也仅以表格的形式给出了若干跨高比, 若干缝高比情况下的计算结果。相比而言, 本文给出的计算方法更为实用, 手算即可完成。

参考文献:

- [1] Peter M H, James D L. Combination of finite element analysis and analytical crack tip solution for mixed mode fracture [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 50(5/6): 849-868.
- [2] 赵艳华, 陈晋, 张华. T 应力对 I-II 复合型裂纹扩展的影响[J]. *工程力学*, 2010, 27(4): 5-12.
Zhao Yanhua, Chen Jin, Zhang Hua. Influence of T -stress on crack propagation for I-II mixed mode loading [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(4): 5-12. (in Chinese)
- [3] Zhao S Q, Guo S H. Two-parameter criterion for crack growth under compressive loading [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2009, 46(8): 1389-1393.
- [4] Larrsson S G, Carlsson A J. Influence of non-singular term and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1973, 21: 263-77.
- [5] Hadj Meliani M, Matvienko Y G, Pluvina G. Two-parameter fracture criterion ($K_{p,c}-T_{ef,c}$) based on notch fracture mechanics [J]. *International Journal of Fracture*, 2011, 167(2): 173-182.
- [6] Hiroshi Tada, Paris P C, Irwin G R. *The stress analysis of cracks handbook* [M]. New York: ASME Press, 2000.
- [7] Yang B, Ravi-Chandar K. Evaluation of elastic T -stress by the stress difference method [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, 64(5): 589-605.
- [8] Fett T. T -stresses in rectangular plates and circular disks [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 60(5/6): 631-652.

(参考文献[9]-[18]转第27页)

- [17] 刘海锋, 罗尧治, 娄荣. 圆管网格结构的自适应有限元分析方法研究[J]. 工程力学, 2012, 29(1): 46—51.
Liu Haifeng, Luo Yaoshi, Lou Rong. Adaptive finite element procedure for pipe section latticed shell structures [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(1): 46—51. (in Chinese)
- [18] GB 50017-2003, 钢结构设计规范[S]. 北京: 中国计划

- 出版社, 2003.
GB 50017-2003, Code for design of steel structures [S]. Beijing: China Planning Press, 2003. (in Chinese)
- [19] 范钦珊. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 52—61.
Fan Qinsan. Material mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002: 52—61. (in Chinese)

附录:

令:

$$y_1 = \frac{12\omega(k^2 + 3k\omega)}{4(k+3\omega)^2 - k^2}, \quad y_2 = \frac{6k^2\omega}{4(k+3\omega)^2 - k^2}$$

对 y_1 、 y_2 求关于 k 的导数为:

$$y_1' = \frac{252k^2\omega^2 + 1728\omega^3k + 2592\omega^4}{[4(k+3\omega)^2 - k^2]^2},$$

$$y_2' = \frac{432k\omega^3 + 32k^2\omega^2}{[4(k+3\omega)^2 - k^2]^2}.$$

因为 $k > 0$ 、 $\omega > 0$, 所以 $y_1' > 0$ 、 $y_2' > 0$ 。因此, y_1 、

y_2 为增函数。

式(14)、式(15)可改写为:

$$\Delta m = y_1 |\theta_i| + 0.5y_2 |\theta_j| + 1.5 \frac{y_1}{L^2} |v_i - v_j|,$$

$$\Delta m = \left(\frac{\omega}{l} - y_1 \right) |\theta_i| + \left(\frac{\omega}{l} - 0.5 \right) y_2 |\theta_j| - 1.5 \frac{y_1}{L^2} |v_i - v_j|$$

可见: 在式(14)中, Δm 是 k 的增函数, 而在式(15)中, Δm 是 k 的减函数。

(上接第 18 页)

- [9] Leever P S, Radon J C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries [J]. International Journal of Fracture, 1982, 19: 311—325.
- [10] Karihaloo B L, Xiao Q Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend beam [J]. International Journal of Fracture, 2001, 112(2): 111—128.
- [11] Fett T. A compendium of T-stress solutions [R]. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 1998.
- [12] Sham T L. The determination of the elastic T-term using higher order function [J]. International Journal of Fracture, 1991, 48: 81—102.
- [13] Filon L N G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading [M]. Philosophical Transactions of the Royal Society, A, 201, 1903: 63—155.
- [14] Kfoury A P. Some evaluation of the elastic T-term using Eshelby's method [J]. International Journal of Fracture, 1986, 30: 301—315.
- [15] 李强, 王伟, 韩现民. 压缩载荷下闭合斜裂纹的分支裂纹渐近扩展分析[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 223—229

- Li Qiang, Wang Wei, Han Xianmin. Asymptotic propagation of the branch crack path of the closed inclined flaw under compressive loading [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 223—229. (in Chinese)
- [16] 李强, 张力霆, 齐清兰, 张昀青, 张军. 压缩载荷下闭合裂纹的曲线分支裂纹模型研究[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 294—300.
Li Qiang, Zhang Liting, Qi Qinglan, Zhang Yunqing, Zhang Jun. Study of the curve branch crack model for the closed flaw under compressive loading [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(4): 294—300. (in Chinese)
- [17] Guinea G V, Pastor J Y, Planas J, Elices M. Stress intensity factor, compliance and CMOD for a general three-point-bend beam [J]. International Journal of Fracture, 1998, 89: 103—116.
- [18] 冶金工业部钢铁研究院断裂力学组. 单边裂纹梁横向力弯曲下的 K_I 和 K_{II} [J]. 力学学报, 1977, 4: 308—313.
Fracture Mechanics Group of Central Iron and Steel Research Institute, Ministry of Metallurgical Industry. K_I and K_{II} of single-edge beam under transverse bending [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1977, 4: 308—313. (in Chinese)