

文章编号: 1000-4750(2014)07-0234-05

弹性支承输流管道在分布随从力作用下的稳定性

许 锋, 郭长青, 黄建红

(南华大学城市建设学院, 湖南, 衡阳 421001)

摘 要: 以两端弹性支承梁的振型函数为试函数, 采用 Galerkin 法对在流动流体和分布随从力共同作用下管道的运动微分方程进行离散。通过求特征值, 研究了两端弹性支承输流管道在分布随从力作用下复频率的变化以及失稳时的临界流速。分析了支承刚度、分布随从力、流速、质量比对输流管道振动与稳定性的影响。数值计算结果表明, 支承刚度的变化对临界流速有较大的影响, 支承刚度的变化和分布随从力的大小及方向会影响输流管道失稳类型。

关键词: 输流管道; 弹性支承; 分布随从力; 稳定性; 临界流速

中图分类号: O353 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.10.0763

STABILITY OF ELASTICALLY SUPPORTED PIPES CONVEYING FLUID WITH DISTRIBUTED FOLLOWER FORCE

XU Feng, GUO Chang-qing, HUANG Jian-hong

(School of Urban Construction, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The dynamic differential equation for pipes under the co-action of a distributed follower force and flowing fluid is established, and then it is discretized with Galerkin method by choosing the modal functions of an elastically supported beam as trial functions. The complex frequency and the critical flow velocity of elastically supported pipes conveying fluid with a distributed follower force are studied via solving eigenvalues. The influences of supporting stiffness, distributed follower force, flow velocity and mass ratio on the vibrations and stability of pipes conveying fluid are analyzed. Numerical results show that the variation of supporting stiffness has a great influence on critical flow velocity, and that the types of stability of pipes conveying fluid will be changed with the supporting stiffness and the direction and magnitude of the distributed follower force.

Key words: pipes conveying fluid; elastic support; distributed follower force; stability; critical flow velocity

由于实际工程中的输流管道支承形式的多样性, 按两端理想支承来处理分析输流管道其结果与实际情形会有很大差别。对于输流管道理想支承时的稳定性研究已经有了大量的文献资料报道^[1-5], 对于弹性支承的研究目前文献也很丰富^[6-15], 但对于弹性支承输流管道受到分布随从力这种受力形式作用时振动和稳定性的情况并没有太多的报道。本文在已有研究的基础^[16]上, 考虑并分析了不同支承刚度、分布随从力及系统其他参数对管道振动和稳定性的共同影响。

1 运动方程

如图1所示, 两端弹性支承输流管道受分布随从力作用, 管内流体以恒定流速流动, 在运动过程中, 分布随从力始终保持与输流管道轴线相切。

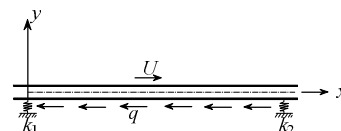


图1 分布随从力作用下的弹性支承输流管道模型

Fig.1 Model of elastically supported pipe conveying fluid with distributed follower force

收稿日期: 2012-10-19; 修改日期: 2014-03-11

通讯作者: 郭长青(1965—), 男, 湖南永兴人, 教授, 博士, 硕导, 从事流固耦合力学研究(E-mail: guocq@hotmail.com).

作者简介: 许 锋(1988—), 男, 湖南常德人, 硕士生, 从事流固耦合力学研究(E-mail: 472191970@qq.com);

黄建红(1987—), 男, 江西上饶人, 硕士生, 从事流固耦合力学研究(E-mail: huangjian_hong@126.com).

管道采用 Bernoulli-Euler 梁模型, 位置 x 处任意时刻 t 的挠度记为 $w(x, t)$, 其梁模型振动微分方程为^[17]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q(L-x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M+m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: w 为管道横向位移; EI 为管道抗弯刚度; L 为管道长度; q 为沿管道切线方向的分布随心力; m 为管道单位长度质量; M 为单位长度上管内流体的质量; U 为管内流体流速。

引入如下的无量纲量, 将式(1)化为无量纲形式:

$$\begin{aligned} h &= \frac{w}{L}, x = \frac{x}{L}, t = \sqrt{\frac{EI}{M+m}} \frac{t}{L^2}, \\ b &= \frac{M}{M+m}, g = \frac{qL^3}{EI}, u = \sqrt{\frac{M}{EI}} LU, \\ \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + [u^2 + g(1-x)] \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2u\sqrt{b} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

采用 Galerkin 方法将式(2)在模态空间内展开, 设:

$$h(x, t) = \sum_{i=1}^N y_i(x) T_i(t) \quad (3)$$

其中 $y_i(x)$ 为两端弹性支承梁的第 i 阶振型函数^[2], 则式(2)化为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i^{(4)} T_i + [u^2 + g(1-x)] \sum_{i=1}^N y_i'' T_i + \\ 2\sqrt{b} u \sum_{i=1}^N y_i' \dot{T}_i + \sum_{i=1}^N y_i \ddot{T}_i = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)两边同乘以 $y_j(x)$, $j=1, 2, \dots, N$ 然后在区间 $[0, 1]$ 上进行积分, 经过计算和整理后可得:

$$\mathbf{\ddot{T}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{B}^{-1} 2\sqrt{b} u \mathbf{B}_2; \\ \mathbf{K} &= \mathbf{B}^{-1} \{ \mathbf{B}_1 + [u^2 - g(1-x)] \mathbf{B}_3 \}; \\ B(i, j) &= \int_0^1 y_i(x) y_j(x) dx; \\ B_1(i, j) &= \int_0^1 y_i^{(4)}(x) y_j(x) dx; \\ B_2(i, j) &= \int_0^1 y_i'(x) y_j(x) dx; \\ B_3(i, j) &= \int_0^1 y_i''(x) y_j(x) dx; \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}^T, i, j = 1, 2, \dots, N.$$

为便于求解, 引入状态参数:

$$\mathbf{z} = [z_1, \mathbf{L}, z_N, z_{N+1}, \mathbf{L}, z]^\top = [T_1, \mathbf{L}, T_N, T_1', \mathbf{L}, T_N']^\top \quad (6)$$

将二阶线性微分方程式(5)化为一阶线性微分方程组:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (7)$$

式中系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中非零元素为:

$$\begin{aligned} a_{j, N+j} &= 1, \\ a_{N+j, i} &= -d_{ij} l_i^4 - (u^2 + g) \int_0^1 y_i'' y_j dx + g \int_0^1 x y_i'' y_j dx, \\ a_{N+j, N+i} &= -2u\sqrt{b} \int_0^1 y_i' y_j dx, \\ i &= 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

2 模态函数与频率方程

图 1 所示两端弹性支承梁的边界条件为:

$$\begin{cases} y''(0) = 0, EI y'''(0) = -K_1 y(0) \\ y''(L) = 0, EI y'''(L) = K_2 y(L) \end{cases} \quad (9)$$

式中, K_1 、 K_2 为弹性支承刚度系数。

引入无量纲 $k_1 = \frac{K_1}{EI}$ 、 $k_2 = \frac{K_2}{EI}$ (为以后讨论的方便, 本文取 $k_1 = k_2 = k$)。

通过边界条件求得梁模型横向弯曲振动模态函数为:

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \sin \lambda \xi + \frac{D_2}{D_0} \cos \lambda \xi + \\ &\frac{D_3}{D_0} \sinh \lambda \xi + \frac{D_2}{D_0} \cosh \lambda \xi \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} D_0 &= 2 \sinh l L + F (\cosh L - \cosh l L), \\ D_2 &= F (\sinh l L - \sin l L), \\ D_3 &= 2 \sin l L + F (\cos l L - \cosh l L), \\ F &= \frac{EI (l L)^3}{K_1 L^3}. \end{aligned}$$

对于本文所按 $k_1 = k_2 = k$ 讨论的情形, 经取 $k=100$ 时的图形数据结果与文献[17]对比一致, 说明模态函数推导正确。

3 弹性支承输流管道的计算结果分析

3.1 发散失稳的临界流速

取式(4)的截断项数 $N=2$, 由 $|A-HI|=0$ 可得特征方程:

$$H^4 + p_2 H^2 + p_1 H + p_0 = 0 \quad (11)$$

其中:

$$p_0 = a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41},$$

$$p_1 = -a_{32}a_{43} - a_{34}a_{41},$$

$$p_2 = a_{34}a_{43} - a_{31} - a_{42}.$$

特征方程式(11)有零特征值的条件为 $p_0=0$, 通过该条件求得分别在当 $k=1$ 、 $k=50$ 、 $k=100$ 、 $k=400$ 、 $\beta=0.2$ 时的简支梁输流管道发散失稳无量纲临界流速 u_c 随无量纲分布随从力 γ ($\gamma < 0$ 时表明流速方向与随从力方向相同)的变化关系, 如图 2 所示。

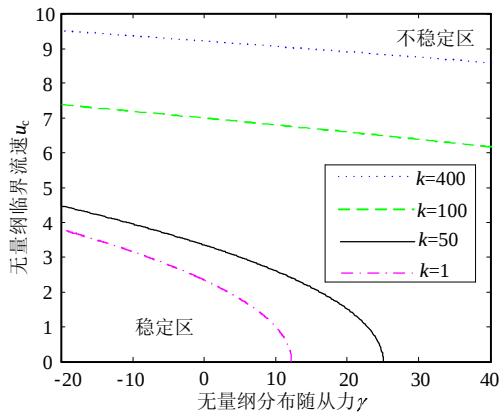


图 2 k 取不同值时输流管道无量纲临界流速随无量纲分布随从力的变化

Fig.2 Dimensionless critical flow velocity vs Dimensionless distributed follower force for various support stiffness k

从图 2 我们可以清楚地看出: 当质量比取 $\beta=0.2$ 时, 对于支承刚度一定的输流管道, 其发散失稳无量纲临界流速随无量纲分布随从力的增大而减小; 与流速方向相同的分布随从力($\gamma < 0$)使流速增大, 这与文献[16]得到的结论一致。对于一定的分布随从力, 随着支承刚度的增大, 输流管道的临界流速也随之增大, 但增大的幅度却有减小且稳定区的范围也在变小。当无量纲分布随从力 $g=14$, 方向与流速方向相同时, 对于刚度 $k=1$ 的弹性支承下的输流管道已经发生发散失稳。

为了研究其他参数对系统临界值的影响, 本文还研究了 $k=100$ 时无量纲临界流速随不同质量比及无量纲分布随从力的变化, 发现无论质量比取何值, 所得到的无量纲临界流速与无量纲分布随从力

的关系曲线图都是重合的, 表明在分布随从力作用下, 系统的临界流速与质量比无关。这一现象可以从无量纲化运动微分方程式(2)中得到解释: 质量比 β 仅出现在科氏力项中, 而系统发散时科氏力趋于 0, 与文献[16]得到的结论一致。

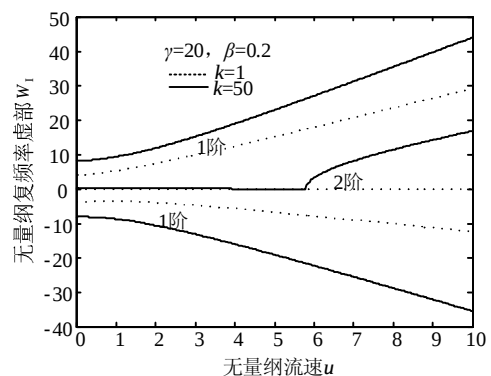
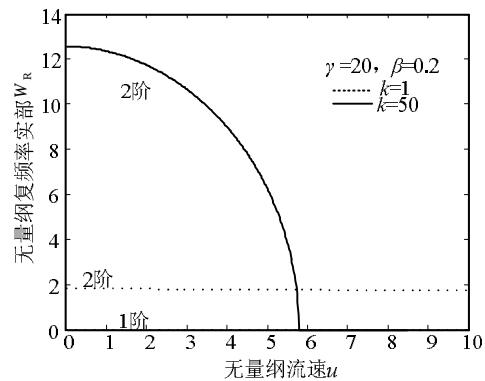
3.2 不同参数对振动与稳定性的影响

给定不同的无量纲流速 u 、无量纲分布随从力 γ 和质量比 β 以及不同的支承刚度 k , 可求出矩阵 A 的两对特征值 H 。

特征值也可用无量纲复频率 Ω 替代表示:

$$\Omega = -iH = \alpha - i\omega \equiv \Omega_R + i\Omega_I$$

由于 A 为实矩阵, 其特征值 H 总是成对出现(一对共轭复数或实数), 每对特征值对应系统的一个振动模态, 相应的 Ω 是一对虚部相同、实数相反(一般只取一个正值表示频率)或虚部不同、实部为 0 的复频率。为了更为清晰直观的研究不同支承输流管道在流动流体和分布随从力共同作用下的失稳方式和特点, 图 3 给出了 $\gamma=20$ 、 $\beta=0.2$ 、 k 取不同值时无量纲频率的实部、虚部随无量纲流速 u 的变化关系。图 4 给出了 $k=100$ 、 $\beta=0.4$ 、 γ 取不同值时输流管道无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速 u 的变化。图 5 给出了 $k=50$ 、 $\beta=0.4$ 、 u 取不同值时输流管道无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速的变化。



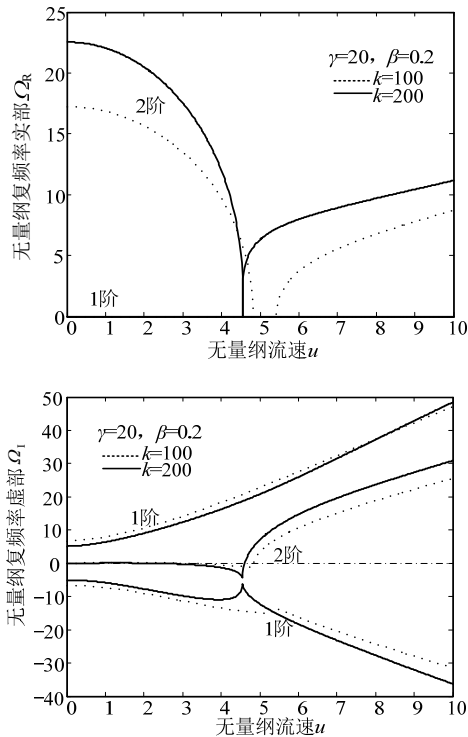


图3 不同支承刚度下输流管道无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速的变化

Fig.3 Dimensionless complex frequencies vs dimensionless flow velocity for various support stiffness k

从图3可以清楚地看到：对于分布随从力和质量比都比较小的情况($\gamma=20, \beta=0.2$)，随着无量纲流速的不断增大，支承刚度 $k=1, k=50$ 的系统其一阶模态复频率的实部均为正，而虚部则一正一负，系统的失稳方式均为发散失稳，二阶模态一直处于稳定(复频率实部，虚部都为正)。随着支承刚度的增加($k=100, k=200$)，系统的一阶模态失稳方式分别会在 $u=5.4, u=4.6$ 后由微弱的颤振失稳变为微弱的发散失稳(复频率实部由零变为正，虚部各有一支始终为负)，二阶模态则分别在 $u=3.5, u=3.2$ 从稳定变为颤振失稳(复频率实部为正，虚部从正变为负)，而后又分别在 $u=4.9, u=4.7$ 处又由颤振失稳重新获得稳定。

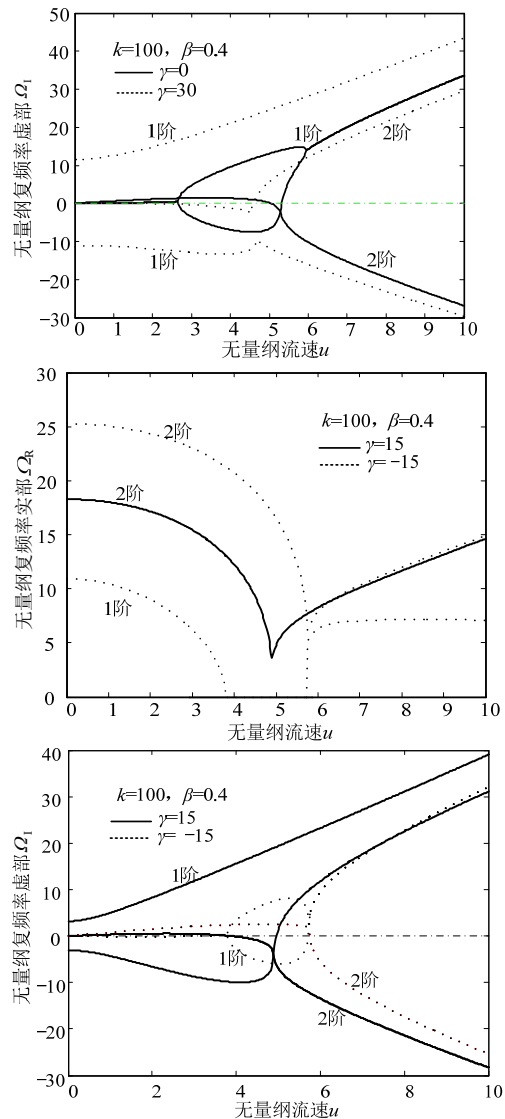
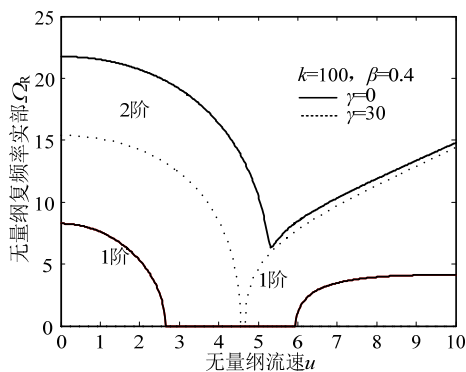


图4 不同分布随从力下输流管道无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速的变化

Fig.4 Dimensionless complex frequencies vs dimensionless flow velocity for various follower force

对支承刚度较大，质量比较小的这种典型情况，图4给出了 $k=100, \beta=0.4, \gamma$ 取不同值时无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速的变化关系。随无量纲流速的增加：当 $\gamma=0$ 时系统的一阶模态会在 $u=2.7$ 后出现一个暂时的发散失稳，然后在 $u=5.8$ 处重新获得稳定；而其二阶模态则会在 $u=5.7$ 处由稳定变为颤振失稳(复频率实部始终为正，虚部由正变为负)。当 $\gamma=30$ 时，系统的一阶模态发散失稳，二阶模态会出现一个由稳定变为微弱颤振失稳然后又重获稳定的过程(复频率的实部为正，虚部由正变为负然后又变为正)。对于 $\gamma=15, -15$ 的情况可以看出，与 $\gamma=0$ 情况相比除了发散点处的流速不一样外，一阶、二阶的失稳方式的变化过程都大致一样。

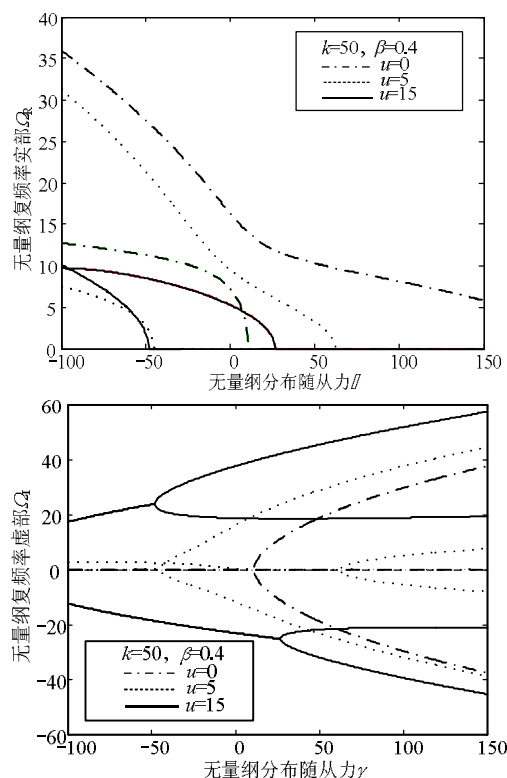


图5 不同无量纲流速下输流管道无量纲复频率的实部、虚部随无量纲分布随从力的变化

Fig.5 Dimensionless complex frequencies vs dimensionless distributed follower force for various flow velocity

图5给出了 $k=50$ 、 $\beta=0.4$ 、 u 取不同值时复频率的实部，虚部随无量纲分布随从力的变化关系曲线图。当无量纲流速 $u=0$ 时，在分布随从力作用下，系统的失稳方式主要是发散失稳。当无量纲流速 $u=5$ 时，复频率虚部的四个分支有正有负，系统会表现出从稳定到发散失稳的失稳方式。当无量纲流速 $u=15$ 时，系统在分布随从力变化情况下会出现由颤振失稳到发散失稳的变化，且还可以从图中看出，当分布随从力方向与流速方向相反时，大小在一定范围内，系统不会出现失稳情况。

4 结论

本文讨论的两端弹性支承输流管道是根据可能的工程实际选择的刚度并在支承刚度变化的基础上，分析研究了输流管道在受到分布随从力的作用下的振动与稳定性，得到如下结论：

(1) 支承刚度取不同值时输流管道无量纲临界流速随无量纲分布随从力的变化有很大的不同：当刚度比较小时，增大分布随从力会明显的增大输流管道的临界流速；若刚度较大时，分布随从力的变化对临界流速的变化的影响不明显。

(2) 输流管道的失稳方式与支承刚度的大小有关：随从力保持定值时，随着流速的增大，刚度较小的管道只会出现发散失稳；对于刚度较大的支承，管道既会颤振失稳，也会出现发散失稳。

(3) 若保持支承刚度、分布随从力分别为某一定值，由于分布随从力的不同，输流管道会出现随着流速的增大会表现出颤振失稳的情况，也有从发散失稳到重获稳定的过程。

(4) 输流管道的失稳方式与分布随从力的方向、流速大小有关：当支承刚度保持恒定时，流速较小的管道会表现出从稳定到发散失稳的失稳方式；流速较大时会出现由颤振失稳到发散失稳的转变，当分布随从力方向与流速方向相反且大小在一定范围时，系统不会出现失稳。

参考文献：

- [1] 侯赛因 K. 多参数系统的振动和稳定性[M]. 张文, 译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1985.
Houseyin K. Vibrations and stability of multiple parameter systems [M]. Translated by Zhang Wen. Shanghai: Scientific and Technical Publishers, 1985. (in Chinese)
- [2] Paidoussis M P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow, Vol. 1 [M]. London: Academic Press, 1998.
- [3] Paidoussis M P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 310(3): 462—492.
- [4] Paidoussis M P, Li G X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem [J]. Journal of Fluids and Structures, 1993, 7(2): 137—204.
- [5] Bishop R E D, Fawzy I. Free and forced oscillation of a vertical tube containing a flowing fluid [J]. Philosophical Transactions, the Royal Society (London), 1976, 284 (1316): 1—47.
- [6] Tijsseling A S. Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review [J]. Journal of Fluids and Structures, 1996, 10(1): 109—146.
- [7] 闻立洲. 含有流动液体的复合材料管道的振动[J]. 复合材料学报, 1991, 8(1): 45—52.
Wen Lizhou. On the vibration of composite material pipes containing flowing fluid [J]. Acta Materiae Composite Sinica, 1991, 8(1): 45—52. (in Chinese)
- [8] 倪樵, 黄玉盈. 正交异性输液管的振动与稳定性分析[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(3): 95—97.
Ni Qiao, Huang Yuying. Vibration and stability analysis of orthotropic pipe conveying fluid [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2001, 29(3): 95—97. (in Chinese)

(参考文献[9]—[17]转第256页)

- 2010: 59—61. (in Chinese)
- [12] Giurgiutiu V. Tuned lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2005, 16(4): 291—305.
- [13] Kim S B, Sohn H. Instantaneous reference-free crack detection based on polarization characteristics of piezoelectric materials [J]. *Smart Materials and Structures*, 2007, 16(6): 2375—2387.
- [14] Soni S, Das S, Banerjee S, et al. Simulation of damage-features in complex joint using guided waves [C]// *Proc. SPIE 6926, Modeling, Signal Processing, and Control for Smart Structures 2008*, 69260O (April 03, 2008); doi:10.1117/12.776468.
- [15] 严刚. 基于应力波和时频分析的复合材料结构损伤监测和识别[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2005: 9—16.
- Yan Gang. Damage detection and identification for composites using stress waves and time-frequency analysis [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2005: 9—16. (in Chinese)

(上接第 238 页)

- [9] 金基铎, 杨晓东, 尹峰. 两端铰支输流管道在脉动内流作用下的稳定性和参数共振[J]. *航空学报*, 2003, 24(4): 317—322.
- Jin Jiduo, Yang Xiaodong, Yin Feng. Stability and parametric resonances of a pinned-pinned pipe conveying pulsating fluid [J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2003, 24(4): 317—322. (in Chinese)
- [10] Wiggert D C, Tijsseling A S. Fluid transients and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, 54(5): 455—481.
- [11] Paidoussis M P, Issid N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, 33(2): 267—294.
- [12] Ashley H, Haviland G. Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1950, 17(3): 229—232.
- [13] Feodos'ev V P. Vibrations and stability of a pipe when liquid flows through it [J]. *Inzhenernyi Sbornik*, 1951, 10: 169—170.
- [14] 金基铎, 宋志勇, 杨晓东. 两端固定输流管道的稳定性和参数共振[J]. *振动工程学报*, 2004, 17(2): 190—195.
- Jin Jiduo, Song Zhiyong, Yang Xiaodong. Stability and parametric resonances of clamped-clamped pipe conveying fluid [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(2): 190—195. (in Chinese)
- [15] 吴天新, 陆鑫森. 钻柱内外沿轴向流动的钻井液对钻柱横向振动的影响[J]. *振动与冲击*, 1995, 14(2): 1—6.
- Wu Tianxin, Lu Xinsen. The influence of the annular and the internal drilling fluids flowing in axial on the lateral vibrations of a drill collar [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1995, 14(2): 1—6. (in Chinese)
- [16] 郭长青, 刘红涛, 王晓锋, 张楚汉. 输流管道在分布随力作用下的振动和稳定性[J]. *工程力学*, 2010, 27(4): 190—196.
- Guo Changqing, Liu Hongtao, Wang Xiaofeng, Zhang Chuhan. Vibration and stability of pipes conveying fluid with distributed follower force [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(4): 190—196. (in Chinese)
- [17] 包日东, 冯颖, 毕文军. 弹性支承输流管道的动力学特性[J]. *机械设计与制造*, 2010(3): 129—131.
- Bao Ridong, Feng Ying, Bi Wenjun. Dynamic characteristics of pipeline conveying fluid with elastic supports [J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2010(3): 129—131. (in Chinese)