

文章编号: 1000-4750(2014)05-0049-07

含椭圆型孔洞有限大电致伸缩材料板的二维问题

张 宁, 高存法

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 基于电致伸缩材料的基本方程, 该文采用 Faber 级数方法研究了含有椭圆型孔洞的有限大电致伸缩材料板在受到电载荷作用下的二维问题。采用各向同性体平面理论中的复势方法, 以 Faber 级数、保角映射及最小二乘边界配置技术为工具, 提出了含有单个椭圆孔的有限大电致伸缩材料板在电载荷作用下的级数解, 详细讨论了板的尺寸、孔洞的尺寸、孔洞的分布以及洞内的电场对于孔边应力的影响规律。最后通过几组数值算例, 讨论了各种参数的变化对孔周应力集中的影响, 并就特殊情况与文献中的一些结果进行了比较, 结果表明最小二乘边界配置法具有精度高、收敛速度快等优点。

关键词: 电致伸缩材料; Faber 级数; 保角映射; 椭圆孔洞; 电载荷; 最小二乘边界配置法

中图分类号: O343.4 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.11.0906

SOLUTION OF AN ELLIPTICAL HOLE IN A FINITE ELECTROSTRICTIVE SOLID

ZHANG Ning, GAO Cun-fa

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Based on the complex potential method in the plane theory of isotropic elasticity, a series solution for the stress field of a finite plate containing an elliptical hole subjected to electrical loads is studied by means of the Faber series expansion. The key point is that the technique of least squares boundary collocation is employed twice. According to this method mentioned above, electric field and stress field can be obtained, respectively. The effects of plate size, hole size, hole distribution and electric field inside the elliptical hole on the stress field around the elliptical hole are studied in detail. Several conclusions valuable to practices are drawn. Finally, the effects of the parameters on the hole stress concentration and the stress intensity factors are studied through several numerical examples. It is shown from the obtained results for special examples that the least squares boundary collocation technique presented has many advantages such as high accuracy and good convergence.

Key words: electrostrictive materials; Faber series; conformal mapping; elliptical hole; electrical loads; least squares boundary collocation technique

电致伸缩材料由于其具有高敏感性和反应性而被广泛应用于各种智能器件中^[1]。与传统固体材料一样, 电致伸缩材料内部也不可避免的会出现各种缺陷, 如夹杂、裂纹以及孔洞等。因此对含有裂纹等缺陷的电致伸缩材料的研究就显得十分重要。例如, Smith 和 Warren^[2]对含有扁椭圆缺陷以

及刚性夹杂的无限大电致伸缩材料板做了详细的分析, 求出了椭圆端部的应力场。McMeeking^[3-4]求解了含裂纹或夹杂电介质的二维问题。蒋泉^[5]对电致伸缩材料中的缺陷问题进行了一系列的研究, 得出了一系列很有意义的解。Gao 等^[6]利用椭圆空洞模型讨论了 Maxwell 应力的效应对于电致伸缩材

收稿日期: 2012-11-28; 修改日期: 2013-03-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(11232007)

通讯作者: 高存法(1962—), 男, 安徽人, 教授, 博士, 主要从事功能材料结构强度研究(E-mail: cfgao@nuaa.edu.cn)。

作者简介: 张 宁(1983—), 男, 江苏泰州人, 博士生, 主要从事功能材料结构强度研究(E-mail: zhangning805@nuaa.edu.cn)。

料内部裂纹扩展的影响,并且还将研究工作扩展到多个共线裂纹时的情况^[7]。

但是,在先前所有的文献当中,电致伸缩材料板都被假定为无限大时的情况,而在实际工程应用中,结构的尺寸都是有限的,需要考虑板的实际大小对于缺陷的影响。但是,确定有限尺寸带裂纹体的应力场及应力强度因子,由于数学上存在着很大困难,目前还只能采用数值解法和近似分析解法。解析法结果准确,但只适用于个别的无限大域情况;数值法采用有限元方法,所能解决的问题广,但计算量大,对于应力变化剧烈的含孔板计算精度低;而半解析半数值方法则兼顾了前两者的特点。

本文应用半解析半数值方法在考虑板的尺寸以及孔洞内电场的影响下采用保角变换-边界配点方法针对含有椭圆孔洞的有限大电致伸缩材料板的二维问题展开研究。

1 电致伸缩材料的基本方程

对于没有线性压电效应的各向同性电致伸缩材料,在等温条件下的本构关系可以写成^[8-9]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{2}(a_1 E_i E_j + a_2 E_k E_k \delta_{ij}) \\ D_i = (\varepsilon_m \delta_{ij} + a_1 e_{ij} + a_2 e_{kk} \delta_{ij}) E_j \end{cases} \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 、 D_i 、 e_{ij} 、 E_i 分别为应力、电位移、应变和电场强度; a_1 、 a_2 为等温条件下的两个互相独立的电致伸缩系数; ε_m 为无应变情况下的介电常数; δ_{ij} 为 Kronecker delta; G 和 λ 为 Lamé 常数。

根据文献[8],电致伸缩材料的力学平衡方程可用伪总应力 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 表示为:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^M \quad (2)$$

其中: σ_{ij} 为外加机械载荷所引起的应力; σ_{ij}^M 为 Maxwell 应力,其表示式如下:

$$\sigma_{ij}^M = \varepsilon_m E_i E_j - \frac{1}{2} \varepsilon_m E_k E_k \delta_{ij} \quad (3)$$

边界上的伪总面力表示为:

$$\tilde{X}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j = \bar{X}_i^m + \sigma_{ij}^M n_j \quad (4)$$

其中, $\bar{X}_i^m$ 表示边界上的外加机械力。

电致伸缩材料的本构方程是非线性的,处理起来比较困难。因此本文做了一些近似处理:小变形情况下,忽略应变对介电常数和电场的影响,利用关系式 $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$ 将电场与力场解耦,先求出静电场,再利用已知的电场求解力场。

根据这一假设,二维问题的静电场可以表示为如下:

$$D_k = \varepsilon E_k \quad (5)$$

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad (6)$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

将式(5)与式(6)代入到式(7)中可得:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (8)$$

式(8)的通解为:

$$\varphi = \text{Re}[w(z)], \quad z = x_1 + ix_2 \quad (9)$$

其中, $w(z)$ 表示未知电势函数。

将式(9)代入到式(6)中可得:

$$E_1 = -\text{Re}[w'(z)], \quad E_2 = \text{Im}[w'(z)] \quad (10)$$

那么将式(10)代入到式(6)中可得:

$$D_1 = -\varepsilon \text{Re}[w'(z)], \quad D_2 = \varepsilon \text{Im}[w'(z)] \quad (11)$$

利用电场边界条件求出电势函数 $w(z)$ 之后,所有应力场也就能得到,最终结果概括如下^[8]:

伪总应力 $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{11} = \kappa w'(z) \overline{w'(z)} + 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{11} + 2i\tilde{\sigma}_{12} = \kappa w''(z) \overline{w(z)} + 2[\bar{z}\phi''(z) + \phi'(z)] \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\kappa = -(1-2\nu)(a_1 + a_2)/[4(1-\nu)]$, $\phi(z)$ 和 $\phi(z)$ 为两个电-弹复势函数。

Maxwell 应力 σ_{ij}^M :

$$\begin{cases} \sigma_{22}^M + \sigma_{11}^M = 0 \\ \sigma_{22}^M - \sigma_{11}^M + 2i\sigma_{12}^M = -\varepsilon_m \Omega'(z) \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\Omega'(z) = [w'(z)]^2$ 。

2 电势函数求解

考虑一个含有椭圆型孔洞的有限大电致伸缩材料板,板的上下表面受有电载荷 E_2 的作用,如图1所示。板的长度为 $2W$, 宽度为 $2H$, 椭圆型孔洞的长、短半轴分别为 a 和 b 。材料和孔洞内部介质的介电常数分别为 ε_m 和 ε_0 。椭圆左端点距离板的左边界的距离假设为 e 。

假设孔洞内部的电势为 φ_0 , 则根据式(9)有:

$$\varphi_0 = \text{Re}[w_0(z)], \quad z = x_1 + ix_2 \quad (14)$$

其中, $w_0(z)$ 为孔洞内部电场复势函数。假设裂纹内部的电场强度分量 (E_1^0, E_2^0), 则根据式(10)与

式(11)可知, 电位移分量(D_1^0, D_2^0)可以表示为:

$$E_1^0 = -\operatorname{Re}[W_0(z)], \quad E_2^0 = \operatorname{Im}[W_0(z)] \quad (15)$$

$$D_1^0 = -e_0 \operatorname{Re}[W_0(z)], \quad D_2^0 = e_0 \operatorname{Im}[W_0(z)] \quad (16)$$

其中, $W_0(z) = dw_0(z)/dz$, e_0 为空气的介电常数。

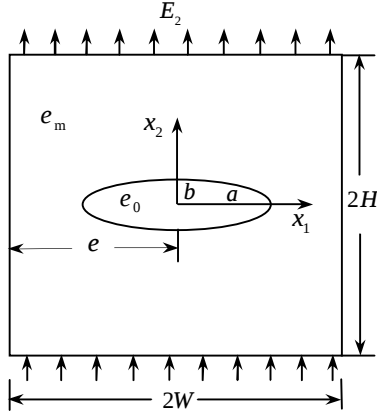


图1 含有孔洞的电致伸缩材料板受外加电场作用

Fig.1 An elliptical crack in an electrostrictive plate under an electric load

那么由高斯定理可知:

$$\int_s D_n^0 ds = e_0 \operatorname{Im}[w_0(z)] \quad (17)$$

假设有限大板上的电位移为 D_n , 电场复势函数为 $w(z)$, 则同理可得:

$$\int_s D_n ds = e_m \operatorname{Im}[w(z)] \quad (18)$$

则结合式(17)与式(18)可有:

$$e_0 \operatorname{Im}[w_0(z)] = e_m \operatorname{Im}[w(z)] \quad (19)$$

又根据椭圆孔洞边界电势连续条件可得:

$$\operatorname{Re}[w_0(z)] = \operatorname{Re}[w(z)] \quad (20)$$

这样, 我们就得到式(19)与式(20)这两个电场边界条件。

为了便于求解 $w(z)$, 引入保角变换函数:

$$z = w(z) = R \left(z + \frac{m}{z} \right) \quad (21)$$

其中, $R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$, 将 z 平面中椭圆孔的外部保角映射到 z 平面上单位圆的外部。此时, 可以将电势函数 $w_0(z)$ 、 $w(z)$ 分别写为 Faber 级数的形式:

$$w_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z^k + m^k z^{-k}) \quad (22)$$

$$w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_k H_{n,k} (z^n + m^n z^{-n}) \quad (23)$$

其中, a_k 、 b_k 、 c_k 为待求复系数。 $H_{n,k}$ 为 Faber 级数的系数, 其表达式如下:

$$H_{n,k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (a+b) e^{iq} + \frac{1}{2} (a-b) e^{-iq} \right]^k e^{-inq} dq \quad (24)$$

则将式(22)与式(23)代入到式(19)与式(20)中, 取有限项 N , 并令方程左右两边相同幂次 s^n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$) 的系数相等, 即可得到确定各待定系数的 $4N$ 个方程, 由于方程数不足以满足未知数个数。为此需要借助于板上外边界条件来确定。

那么利用最小二乘边界配置法^[10], 在外边界上取点 z_n ($n = 1, 2, \dots, M$, $M \geq 2N$), 将式(23)以及点 z_n 代入到式(15)中, 可得到满足边界条件的 M 个方程。这 M 个线性方程与由内边界得到的 $4N$ 个方程联立求解, 即可确定所有未知待定系数, 从而确定电势函数 $w_0(z)$ 以及 $w(z)$ 。

3 电-弹势函数求解

电-弹势函数的形式可以表示为:

$$\begin{cases} f(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+K)} \ln z + G_1 z + f^*(z) \\ j(z) = \frac{K(X - iY)}{2\pi(1+K)} \ln z + G_2 z + j^*(z) \end{cases} \quad (25)$$

因为椭圆孔周表面不受力, 且材料板仅在板边界受有电场作用, 所以有 $X = Y = G_1 = G_2 = 0$ 。

则式(25)就变为:

$$f(z) = f^*(z), \quad j(z) = j^*(z) \quad (26)$$

同样地, 式(26)也可以展为 Faber 级数的形式, 并且经过式(21)保角变换之后, 可以写为:

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z^k + m^k z^{-k}) \quad (27)$$

$$j_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (z^k + m^k z^{-k}) \quad (28)$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} h_k H_{l,k} (z^l + m^l z^{-l}) \quad (29)$$

$$j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} p_k H_{l,k} (z^l + m^l z^{-l}) \quad (30)$$

其中: $f_0(z)$ 、 $j_0(z)$ 为椭圆洞内的两个电-弹势函数; $f(z)$ 、 $j(z)$ 为有限大板上的两个电-弹势函数; d_k 、 f_k 、 g_k 、 h_k 、 u_k 、 p_k 为待求复系数。

将式(27)~式(30)孔周应力和位移连续条件中, 然后取有限项 N , 并且令方程左右两边相同幂次 s^n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$) 的系数相等, 则比较 s^n 系数可得:

$$R(d_n - m d_{n-2}) - R[m^{n+1} \cdot n \cdot \bar{d}_n + m^{n-2} \cdot (n-2) \cdot \bar{d}_{n-2}] +$$

$$\begin{aligned}
& R(m^n \cdot \bar{f}_n - m^{n-1} \cdot \bar{f}_{n-2}) - R \left[\sum_{k=1}^N h_k (H_{n,k} - m \cdot H_{n-2,k}) \right] + \\
& R[m \cdot n \cdot \bar{g}_n + (n-2) \bar{g}_{n-2}] + R \left\{ \sum_{k=1}^N \bar{h}_k [\overline{H_{n-2,k}} \cdot \right. \\
& (n-2) \cdot m^{n-2} + \overline{H_{n,k}} \cdot n \cdot m^{n+1}] \} - R(\bar{u}_n - m \bar{u}_{n-2}) - R \\
& \left[\sum_{k=1}^N \bar{p}_k (\overline{H_{n,k}} \cdot m^n - m^{n-1} \cdot \overline{H_{n-2,k}}) \right] = -\frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N k a_j \bar{a}_k \cdot \\
& (\sigma^{1+j-k} - m^k \sigma^{1+j+k} + m^j \sigma^{1-j-k} - m^{j+k} \sigma^{1-j+k}) - \frac{\kappa}{2} \cdot \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j \bar{b}_k k \cdot \sigma^{1-j+k} + \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N b_j \bar{c}_k \overline{H_{l,k}} (l \cdot \sigma^{1-j-l} - \\
& l \cdot m^l \cdot \sigma^{1-j+l}) - \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N j \cdot \bar{b}_j \cdot c_k \cdot H_{l,k} (\sigma^{1+j+l} + \\
& m^l \cdot \sigma^{1+j-l}) + \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c_i c_k H_{j,i} \overline{H_{l,k}} (l \cdot \sigma^{1+j-l} - \\
& l \cdot m^l \cdot \sigma^{1+j+l} + l \cdot m^j \cdot \sigma^{1-j-l} - l \cdot m^{j+l} \cdot \sigma^{1-j+l}) \quad (31) \\
& KR(d_n - m d_{n-2}) + R[m^{n+1} \cdot n \cdot \bar{d}_n + m^{n-2} \cdot (n-2) \cdot \bar{d}_{n-2}] - \\
& R(m^n \cdot \bar{f}_n - m^{n-1} \cdot \bar{f}_{n-2}) - KR \left[\sum_{k=1}^N h_k (H_{n,k} - m \cdot H_{n-2,k}) \right] - \\
& R[m \cdot n \cdot \bar{g}_n + (n-2) \bar{g}_{n-2}] - R \left\{ \sum_{k=1}^N \bar{h}_k [\overline{H_{n-2,k}} \cdot \right. \\
& (n-2) \cdot m^{n-2} + \overline{H_{n,k}} \cdot n \cdot m^{n+1}] \} + R(\bar{u}_n - m \bar{u}_{n-2}) + R \cdot \\
& \left[\sum_{k=1}^N \bar{p}_k (\overline{H_{n,k}} \cdot m^n - m^{n-1} \cdot \overline{H_{n-2,k}}) \right] = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N k a_j \bar{a}_k \cdot \\
& (\sigma^{1+j-k} - m^k \sigma^{1+j+k} + m^j \sigma^{1-j-k} - m^{j+k} \sigma^{1-j+k}) + \frac{\kappa}{2} \cdot \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j \bar{b}_k k \cdot \sigma^{1-j+k} - \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N b_j \bar{c}_k \overline{H_{l,k}} (l \cdot \sigma^{1-j-l} - \\
& l \cdot m^l \cdot \sigma^{1-j+l}) + \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N j \cdot \bar{b}_j \cdot c_k \cdot H_{l,k} (\sigma^{1+j+l} + \\
& m^l \cdot \sigma^{1+j-l}) - \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c_i c_k H_{j,i} \overline{H_{l,k}} (l \cdot \sigma^{1+j-l} - \\
& l \cdot m^l \cdot \sigma^{1+j+l} + l \cdot m^j \cdot \sigma^{1-j-l} - l \cdot m^{j+l} \cdot \sigma^{1-j+l}) - \chi \cdot \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^k \bar{a}_j \bar{a}_k \cdot j \cdot k \cdot m^{i-1} \left(\frac{\sigma^{2i-j-k+1}}{2i-j-k+1} - m^j \cdot \right. \\
& \frac{\sigma^{2i+j-k+1}}{2i+j-k+1} - m \cdot \frac{\sigma^{2i-j-k+3}}{2i-j-k+1} + m^{j+1} \cdot \\
& \left. \frac{\sigma^{2i+j-k+3}}{2i+j-k+1} \right) - 2\chi \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^l j \cdot l \cdot m^{i-1} \cdot \bar{b}_j \cdot \bar{c}_k \cdot \\
& \overline{H_{l,k}} \cdot \frac{(\sigma^{2i+j-l+1} - m \cdot \sigma^{2i+j-l+3})}{2i+j-l+1} + \chi \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{Q=1}^l m^{Q-1} \cdot j \cdot l \cdot \bar{c}_i \cdot \bar{c}_k \cdot \overline{H_{j,i}} \cdot \overline{H_{l,k}} \cdot \\
& \left(\frac{\sigma^{2Q-j-l+1}}{2Q-j-l+1} - m^j \cdot \frac{\sigma^{2Q+j-l+1}}{2Q+j-l+1} - m \cdot \frac{\sigma^{2Q-j-l+3}}{2Q-j-l+1} + \right. \\
& \left. m^{j+1} \cdot \frac{\sigma^{2Q+j-l+3}}{2Q+j-l+1} \right) + \chi \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M j \cdot k \cdot \bar{b}_j \cdot \bar{b}_k \cdot m^{i-1} \cdot \\
& \frac{(\sigma^{2i+j+k+1} - m \cdot \sigma^{2i+j+k+3})}{2i+j+k+1} \quad (32)
\end{aligned}$$

再对式(31)与式(32)分别取共轭, 则最终可得到满足椭圆孔周边界条件所得的 $4N$ 个方程, 由于以上方程右边的系数已经在上一节中求出, 因此我们只需确定 d_k 、 $\bar{d}_k$ 、 $\bar{f}_k$ 、 g_k 、 $\bar{g}_k$ 、 h_k 、 $\bar{h}_k$ 、 $\bar{u}_k$ 、 $\bar{p}_k$ 这 $9N$ 个未知系数。由于未知数个数远大于方程数, 为此仍需要借助于板上的外边界条件来确定。

再次利用最小二乘边界配置法, 在外边界取点 $z'_n (n=1, 2, \dots, M, M \geq 5N)$ 。然后将式(29)、式(30)以及点 z'_n 代入到伪总应力边界条件式(12)中可得到满足边界条件的 M 个方程:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N g_k (z_n + \sqrt{z_n^2 - 4mR^2})^{-k} (2R)^k + \sum_{k=1}^N h_k z_n^k + \\
& z_n \left[\frac{1}{\sqrt{z_n^2 - 4mR^2}} \sum_{k=1}^N \bar{g}_k \cdot (2R)^k \cdot \right. \\
& \left. (-k)(z_n + \sqrt{z_n^2 - 4mR^2})^{-k} + \sum_{k=1}^N k \cdot \bar{h}_k \cdot z_n^{k-1} \right] + \\
& \sum_{k=1}^N \bar{u}_k (z_n + \sqrt{z_n^2 - 4mR^2})^{-k} (2R)^k + \sum_{k=1}^N \bar{p}_k z_n^k = \\
& i \int (\tilde{X}_1 + i \tilde{X}_2) ds - \frac{\kappa}{2} \left[\sum_{k=1}^N b_k (z_n + \sqrt{z_n^2 - 4mR^2})^{-k} \cdot \right. \\
& \left. (2R)^k + \sum_{k=1}^N c_k z_n^k \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{z_n^2 - 4mR^2}} \sum_{k=1}^N \bar{b}_k \cdot (2R)^k \cdot (-k) \cdot \right. \\
& \left. (z_n + \sqrt{z_n^2 - 4mR^2})^{-k} + \sum_{k=1}^N k \cdot \bar{c}_k \cdot z_n^{k-1} \right] \quad (33)
\end{aligned}$$

这 M 个线性方程与由内边界得到的 $4N$ 个方程联立求解, 再结合上一小节中求得的系数 a_k 、 b_k 和 c_k , 即可确定所有未知待定系数, 从而求得复应力函数 $\phi(z)$ 、 $\bar{\phi}(z)$ 。将它们代入到式(7)中, 就可得到该问题的应力场的解答。

4 数值算例

以 PMN 电致伸缩材料作为算例, 材料常数

如下:

$$E = 281 \text{ GPa}, \quad m = 0.26, \quad e_m = 6.64 \times 10^{-8} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, \\ a_1 = 2.704 \times 10^{-5} \text{ F/m}, \quad a_2 = -4.899 \times 10^{-6} \text{ F/m}, \quad a = 0.01 \text{ m}.$$

4.1 有限大板与无限大板的孔周应力比较

为了验证保角变换-边界配点法在求解含有椭圆孔洞的有限大电致伸缩材料板孔周应力的精确性,先利用 MATLAB^[11]算出有限大板中椭圆孔周应力的数值解,然后将数值结果退化为无限大板时的情况再与无限大板中椭圆孔周应力的解析解结果^[5]进行比较发现,用数值法计算得出的结果与解析解结果基本吻合,其误差不足 2%,精度比较高,而且该误差还将随着板尺寸的增加而减小。

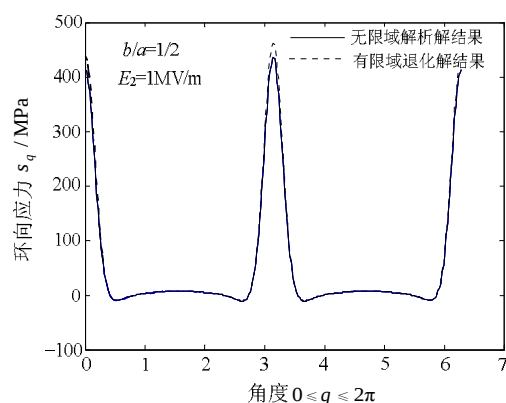


图2 无限大板与有限大板的孔周应力比较

Fig.2 Stress around an elliptical hole in an infinite and finite plate

4.2 收敛性分析

当一个含有椭圆孔洞的有限大电致伸缩材料板在上下表面受到大小为 1MV/m 的电场 E_2 作用时,图 3 描述了不同级数项数以及配点数($N=3, M=20, N=5, M=30, N=7, M=40, N=9, M=50, N=15, M=80$)的计算结果比较。

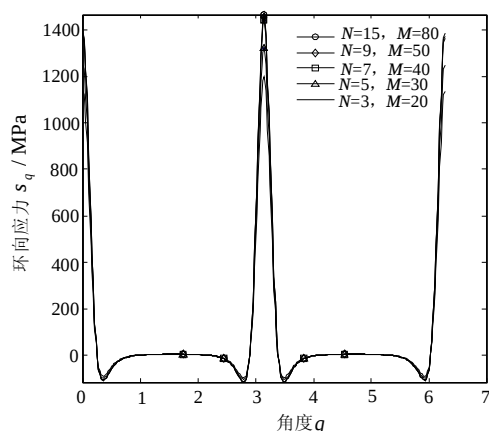


图3 不同 N 和 M 取值时的计算结果比较

Fig.3 comparison of compute results under different N and M values

$M=80$)对椭圆孔周应力的影响,从图中可以看出,当配点数均满足方程数个数大于未知数个数的要求时,随着级数项数 N 越来越大,计算结果逐渐趋于相同。当级数项数 N 取 7 及以上时,可以看出计算结果几乎一致,因此可以得出结论:当 $N=7$ 时,级数收敛。故此,本文中的算例,均取级数项数 $N=7$,配点数 $M=40$ 。

4.3 正方形板的尺寸对中心椭圆孔周应力的影响

图 4 给出了椭圆位于中心时正方形板的尺寸对于椭圆孔周应力的影响,从图中可以看出,板的大小对于孔周应力的影响很大,结构尺寸越小,椭圆孔周应力就变得越大,这与实际情况是相吻合的。

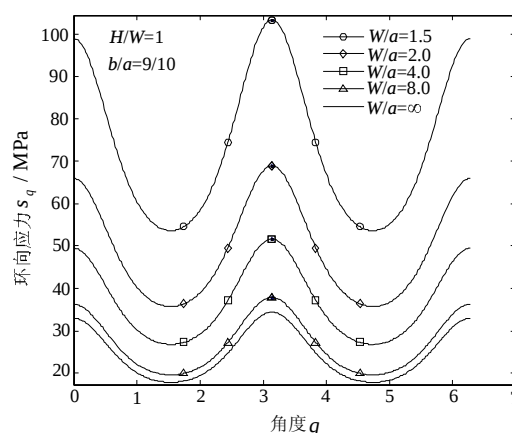


图4 不同结构尺寸下的孔周应力分布($b/a=9/10$)

Fig.4 Variation of hoop stress s_q at the rim of the hole with different plate size for $b/a=9/10$

4.4 矩形板的高宽比对中心椭圆孔周应力的影响

当电致伸缩材料板为矩形板时,孔洞仍然位于板的中心,其到左边距或右边距的位置比为: $W:a=2$ 。由于仅在板的上下表面作用有电荷载 $E_2=1\text{MV/m}$,因此我们调整板的高度 H ,分别考虑 $H/W=0.6, 1, 1.5, 7.5, 15$ 这 5 种不同高宽比对孔周应力分布的影响。从图 5 可以看出,随着板高度的逐渐增加,孔周应力变得越来越小,在椭圆长半轴处的应力集中现象也随之变得越来越不明显。

4.5 椭圆孔洞的位置对孔周应力的影响

如图 1 所示,考虑一个含有偏心椭圆孔洞的电致伸缩材料板,了便于计算和比较,假定材料板为正方形板,即 $H/W=1$,且固定板宽与椭圆长轴的长度比为 $W/a=30$ 。如果 e/a 相对较小(例如 $e/a=4, 1.5, 1$),就相当于半无限大板的情况,此时仅反映了板的一条自由边对孔洞环向应力的影响。

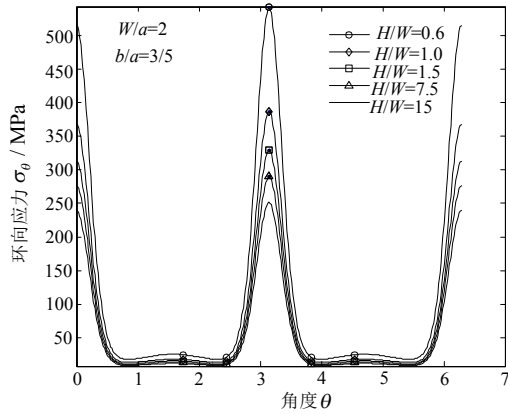


图5 矩形板的长宽比对孔周应力分布的影响(\$b/a=3/5\$)

Fig.5 Effect of aspect ratio on hoop stress σ_θ at the rim of the hole for $b/a=3/5$

由图6可见,当材料板受到相同电载荷作用时,孔洞位置对于孔周应力的影响都相对较小,当椭圆较扁的时候,该影响可以忽略不计而看成是无限大板中心椭圆的情况。

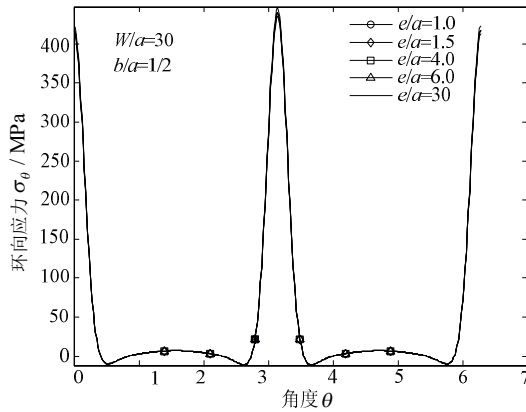


图6 孔洞边距对孔周应力的影响(\$b/a=1/2\$)

Fig.6 Effect of hole distribution on hoop stress σ_θ at the rim of the hole for $b/a=1/2$

4.6 椭圆孔洞退化为裂纹时的情况

当椭圆短半轴 $b=0$ 时,椭圆孔洞就退化为裂纹,此时根据式(12),裂纹端部伪总应力的奇异部分可以表示为下式:

$$[\tilde{\sigma}_{22} + i\tilde{\sigma}_{12}]_s = \frac{1}{2}\kappa[w'(z)\overline{w'(z)} + w''(z)\overline{w''(z)}]_s + [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + \bar{z}\phi''(z) + \varphi'(z)]_s \quad (34)$$

那么在裂纹的尖端 $x_1 = a$ 处,应力强度因子可以定义为如下:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} [\tilde{\sigma}_{22} + i\tilde{\sigma}_{12}]_s \quad (35)$$

将前面求出的电势函数 $w(z)$ 以及复势函数 $\phi(z)$ 、 $\varphi(z)$ 代入到式(34)以及式(35)中计算可得到图7~图8:

图7和图8考虑了材料板外不同介质环境对裂纹尖端应力强度因子的影响。从图7、图8可以看出,当材料板在外边界处受到不同大小的电载荷作用时,如果裂纹内部的介质为空气($\epsilon_c = \epsilon_0$),而板外部介质的介电常数大于空气的介电常数时,应力强度因子将随着板外部介质介电常数的增大而增大;当板外部介质的介电常数小于裂纹内部介质的介电常数时,应力强度因子将会随着板外部介质介电常数的增大而减小。

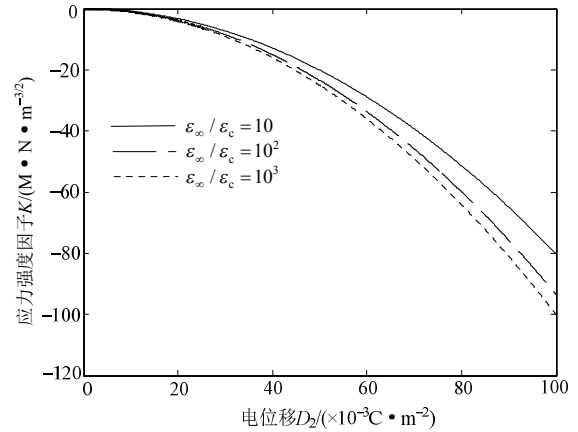
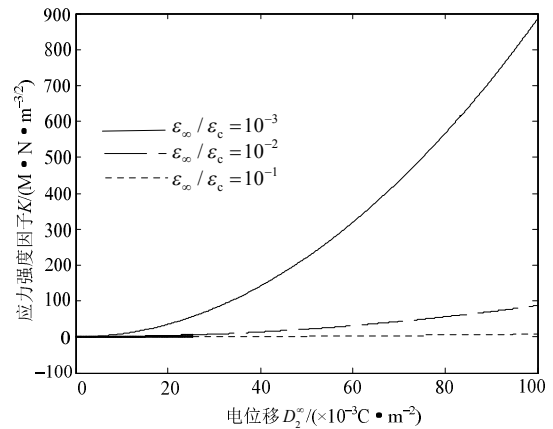
图7 当受到电载荷作用时,不同环境对应力强度因子的影响: $\epsilon_\infty > \epsilon_c$ ($\epsilon_c = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$)Fig.7 Effect of environment on stress intensity factor under different electric load for the case: $\epsilon_\infty > \epsilon_c$ ($\epsilon_c = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$)图8 当受到电载荷作用时,不同环境对应力强度因子的影响: $\epsilon_\infty < \epsilon_c$ ($\epsilon_c = 10^{-9} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$)

Fig.8 Effect of environment on stress intensity factor under different electric load for the case:

$$\epsilon_\infty < \epsilon_c \quad (\epsilon_c = 10^{-9} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$$

5 结论

本文研究了含有椭圆孔洞的有限大电致伸缩材料板的二维问题。采用平面问题中的复势方法,利用保角映射技术,借助于 Faber 级数展开,两次

应用最小二乘边界配点法, 分别求出了电势函数以及全场应力函数的数值解, 最后通过 MATLAB 计算, 给出了不同情况下的孔周应力分布图, 得出以下几点结论:

(1) 无论对于正方形板还是矩形板, 板的结构尺寸越小, 孔周应力就越大; 当板受到电载荷作用时, 在椭圆的左右端点处($x = \pm a$), 产生了应力集中, 且随着短半轴的减小而变大。

(2) 在相同电载荷及固定结构尺寸下($H/a = W/a = 30$), 当 e/a 较小时, 相当于半无限大板的情况, 此时孔洞位置对于孔周应力的影响非常小。

(3) 当考虑裂纹内部电场的影响时, 如果裂纹内部介质与材料板外部介质相同时, 全场应力是均匀的。如果不考虑裂纹内部电场的影响, 即裂纹为不可穿透裂纹时, 裂纹端部会产生应力集中现象。

(4) 计算表明保角变换-最小二乘配置法具有计算精度高、收敛速度快、数据准备量少、讨论参数影响方便等优点, 有利于全面系统地研究各种参数对结构断裂性能的影响。

参考文献:

- [1] Uchino K. Electrostrictive actuators: Materials and applications [J]. American Ceramic Society Bulletin, 1986, 65(4): 647—652.
- [2] Smith T E, Warren W E. Some problems in two-dimensional electrostriction [J]. Journal of Mathematical Physics, 1968, 45(2): 45—51.
- [3] McMeeking R M. On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown [J]. Journal of Applied Physics, 1987, 62(8): 3116—3122.
- [4] McMeeking R M. Electrostrictive stresses near crack-like flaws [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1989, 40(5): 615—627.
- [5] 蒋泉. 电致伸缩材料中二维问题的应力分析[D]. 上海: 上海交通大学, 2005.
Jiang Quan. Two dimensional stress analysis in electrostrictive materials [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2005. (in Chinese)
- [6] Gao C F, Mai Y W, Zhang N. Solution of a crack in an electrostrictive solid [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(3): 444—453.
- [7] Gao C F, Mai Y W, Zhang N. Solution of collinear cracks in an electrostrictive solid [J]. Philosophical Magazine, 2010, 90(10): 1245—1262.
- [8] Jiang Q, Kuang Z B. Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor [J]. European Journal of Mechanics A-Solids, 2004, 23(6): 945—956.
- [9] Kuang Z B. Some variational principles in elastic dielectric and elastic magnetic materials [J]. European Journal of Mechanics A-Solids, 2008, 27(3): 504—514.
- [10] 郭树祥. 多部位损伤结构的剩余强度研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2002.
Guo Shuxiang. The residual strength study of multiple-site damage [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2002. (in Chinese)
- [11] 周博, 谢东来, 张宪海. MATLAB 科学计算[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010: 57—98.
Zhou Bo, Xie Donglai, Zhang Xianhai. Scientific calculation of MATLAB [M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2010: 57—98. (in Chinese)