

文章编号: 1000-4750(2015)01-0154-09

多自由度结构动力可靠度分析的小波方法

孔 凡¹, 李书进¹, 孙 涛²

(1. 武汉理工大学土木工程系, 武汉 430070; 2. 中国轻工业武汉设计工程有限责任公司, 武汉 430060)

摘 要: 该文发展了基于小波分析的局部平稳法在多自由度结构动力可靠度中的应用。首先, 基于广义谱和小波和随机过程的局部平稳小波模型, 发展了线性多自由度结构系统在各时间-频率子域上激励功率谱与响应功率谱之间的关系, 并计算得到了在一般随机动力激励下结构随机动力响应功率谱密度和各阶谱矩。随后, 根据随机动力激励和响应的高斯假定及超越过程的 Markov 假定, 得到了线性多自由度结构在均匀/非均匀调制随机激励下层间位移的动力可靠度指标。结构动力可靠度的 Monte Carlo 模拟显示了所提方法的可靠性与计算高效性。

关键词: 小波分析; 局部平稳小波; 功率谱; 首次超越; 动力可靠度

中图分类号: TU311.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.07.0703

DYNAMIC RELIABILITY ANALYSIS OF MDOF STRUCTURES USING THE WAVELET TRANSFORM

KONG Fan¹, LI Shu-jin¹, SUN Tao²

(1. Department of Civil Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

(2. Design Engineering Company Limited. of China Light Industry, Wuhan 430060, China)

Abstract: A wavelet-based local stationary approach for the dynamic reliability determination of linear MDOF systems is presented. First, based on the generalized harmonic wavelet and the local stationary wavelet model of the stochastic process, an evolutionary power spectrum (EPS) density relationship between a full non-stationary excitation and response is developed. Based on the response EPS, the moments of the response EPS are calculated for the reliability determination. Finally, based on the Gaussian assumption for the linear response and Markovian assumption for the crossing event, the probability of the drift displacement remaining below a certain limit is calculated. Monte Carlo simulations demonstrate the reliability and computational efficiency of the proposed approach.

Key words: wavelet analysis; local stationary wavelet; power spectrum density; first passage; dynamic reliability

工程结构在役期间, 常常会受到灾害性随机动力荷载, 如地震、强风和海浪的动力作用。随机振动作为一门学科的发展, 不仅在于考察工程结构在已知概率特性描述的随机动力作用下, 计算其随机动力响应的概率特性问题, 而且更重要的目标在于考察在规定的使用条件和预定的使用期限内, 结构不发生破坏或失效的概率。

在结构动力可靠度理论中, 根据结构破坏机制的不同, 通常可以分为基于首次超越破坏机制和疲劳破坏机制的可靠度分析^[1-2]。到目前为止, 基于首次超越破坏机制的结构动力可靠度分析已经取得了重要的进展, 形成了基于跨越过程假定、扩散过程理论(如^[3-5]等)以及基于广义概率密度演化理论(Probability Density Evolution Method)的分析方

收稿日期: 2013-07-30; 修改日期: 2014-03-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(51408451); 湖北省自然科学基金项目(2014CFB841); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(WUT:2014-IV-051)

通讯作者: 李书进(1967—), 男, 湖北仙桃人, 教授, 博士, 博导, 从事结构健康监测研究(E-mail: sjli@whut.edu.cn).

作者简介: 孔 凡(1984—), 男, 湖北仙桃人, 讲师, 博士, 从事结构随机动力学研究(Email: kongfan@whut.edu.cn);

孙 涛(1982—), 男, 湖北黄陂人, 工程师, 硕士, 从事结构计算理论与方法的设计与研究(Email: spider1027@163.com).

法^[6]。结构动力可靠度的扩散理论,主要基于在白噪声作用下系统响应为扩散的 Markov 过程的假定,应用范围主要为白噪声或过滤白噪声激励。理论上虽然此方法能给出精确解答,但目前仅能应用于少数几种单自由度系统的动力可靠度求解。跨越过程假定分析方法,可分为跨越过程 Poisson 假定、Markov 假定及其改进型等。虽然此方法一般需要对响应及其导数过程的联合概率密度函数以及跨越过程的性质作出假定,但其由于简单易行仍得到了广泛的应用。值得注意的是,很少有文献基于跨越过程假定考察多自由度结构在完全非平稳(时间-频率非平稳)随机激励下的结构动力可靠度问题。

现代信号处理工具,特别是自 20 世纪 90 年代出现的小波分析^[7],为分析结构在完全非平稳随机激励下的随机动力响应提供了新的途径。在此方面,Gupta 和 Basu^[8-9]以及 Spanos 和 Tratskas^[10]等作出了首先的尝试,建立了激励与响应演变功率谱(Evolutionary Power Spectrum, EPS)之间的关系。然而,正如 Spanos 和 Kougioumtzoglou 指出^[11],他们的工作均建立于随机激励/响应的样本空间内。基于这样的考虑,Spanos 和 Kougioumtzoglou 从随机过程的局部平稳小波模型(Local Stationary Wavelet, LSW)^[12]以及广义谐和小波(Generalized Harmonic Wavelet, GHW)^[13]出发,建立了单自由度系统随机激励-响应的演变功率谱关系。本文试图将 Spanos 和 Kougioumtzoglou 的工作扩展应用于均匀/非均匀调制随机过程激励下的多自由度结构,在求得非平稳响应 EPS 的基础上,应用跨越阈值的 Markov 过程假定,求得结构动力可靠度指标。本文第 1 节将简要介绍基于 GHW 的随机过程 LSW 模型;基于此模型,将在第 2 节中发展激励-响应在各个时间-频率子域上的 EPS 关系;第 3 节在随机过程 EPS 的基础上,应用跨越过程的 Markov 过程假定得到随机过程超越某阈值的动力可靠度;最后,在第 4 节中给出了与 Monte Carlo 模拟结果对比的数值算例。算例表明,随着超越阈值的升高,文中所建议方法逐步接近数值模拟解,适合结构工程应用中的失效小概率事件。文章最后对此方法作了进一步的总结和评价。

1 理论背景

受 Daubechies 二进紧支的正交小波启发,Newland 于 20 世纪 90 年代左右独立提出了谐和小

波(Harmonic Wavelet, HW)^[14]和广义谐和小波理论^[13]。具体而言, Daubechies 小波函数(D1-D10)由其尺度函数的二进尺度方程迭代计算生成,而尺度方程中包含的尺度函数系数的个数即决定于 Daubechies 小波阶数 $N_\phi = 1, 2, \dots, 10$ 。Daubechies 小波阶数越高,时间定义域越长, Fourier 变换越趋近于“盒状”。HW 因此可以看作为 Daubechies 小波的极限形式,为一种二进小波,且各级小波频域互不交叠、逐级宽度加倍高度减倍。

1.1 广义谐和小波

各尺度谐和小波的频域宽度依其尺度而定,因此并不具有灵活性。为了改善这一特点, Newland 随后提出了音乐小波^[13],又将其称为广义谐和小波 GHW。GHW 的各阶小波函数可以表示为:

$$\psi_{(m_i, n_i), k}^G(t) = \frac{\exp\left[im_i\Delta\omega\left(t - \frac{kT_0}{n-m}\right)\right] - \exp\left[in_i\Delta\omega\left(t - \frac{kT_0}{n-m}\right)\right]}{i(n-m)\Delta\omega\left(t - \frac{kT_0}{n-m}\right)} \quad (1)$$

它在频域内的表达为:

$$\Psi_{(m_i, n_i), k}^G(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{(n-m)\Delta\omega} e^{-i\frac{\omega k T_0}{n-m}}, & m_i\Delta\omega \leq \omega < n_i\Delta\omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad (2)$$

式中:正体 i 为虚数符号; (m_i, n_i) , $i=1, 2, \dots, N/2(n-m)$ 为尺度指标; N 为时域采样总点数; k 为时间平移指标; T_0 为待分析信号时长, $\Delta\omega = 2\pi/T_0$ 为待分析信号频域内取样间隔。为了计算简便,一般认为各尺度小波频宽相等,即 $\Delta\Omega = (n_i - m_i)\Delta\omega = (n-m)\Delta\omega$ 。可见,广义谐和小波为尺度由指标对 (m_i, n_i) 控制,且各阶小波在频域内为宽度相等“盒状”的特殊小波。

1.2 随机过程的局部平稳小波模型

Cramer-Wold 模型是目前应用得最广泛的非平稳随机过程模型,与其联系的是所谓的随机过程 Priestley 演变功率谱^[15]。2000 年以来, Nason 等发展了一类基于小波函数的随机过程模型,即局部平稳小波(Local Stationary Wavelet, LSW)模型^[11-12]。一般地, n 维完全非平稳向量随机过程中的某一元素可以表示为:

$$f_i(t) = \sum_j \sum_k w_{j,k}^i \xi_{j,k}^i \psi_{j,k}(t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

式中: $\xi_{j,k}^i$ 为归一化正交随机序列; $\psi_{j,k}(t)$ 为尺度变换和时间平移后的非抽样 (Non-Decimated Wavelet) 小波基函数; $w_{j,k}^i$ 为相应尺度和时间处的幅值系数; \sum_j 与 \sum_k 分别代表对小波离散尺度和时间点求和。

可以证明,当 LSW 模型中小波函数为 GHW 且其各尺度小波频宽 $\Delta\Omega$ 较窄时,可依据式(3)将非平稳随机过程写为^[11, 16]:

$$f(t) = \sum_i \sum_k f_{(m_i, n_i), k}(t) \quad (4)$$

$$f_{(m_i, n_i), k}(t) = A_{(m_i, n_i), k} \cos \left[\omega_{c, (m_i, n_i), k} \left(t - \frac{kT_0}{n-m} \right) \right] + B_{(m_i, n_i), k} \sin \left[\omega_{c, (m_i, n_i), k} \left(t - \frac{kT_0}{n-m} \right) \right] \quad (5)$$

式中, $f_{(m_i, n_i), k}(t)$ 为待分析信号在各时间-频子域上的子信号,且定义于局部时间-频率区间 $[m_i \Delta\omega, n_i \Delta\omega]$ 与 $[kT_0 / (n-m), (k+1)T_0 / (n-m)]$ 上, $\omega_{c, (m_i, n_i), k} = (n_i + m_i) \Delta\omega / 2$ 为第 i 尺度小波函数的中心频率。 $A_{(m_i, n_i), k}$ 与 $B_{(m_i, n_i), k}$ 为相互独立的 0 均值随机向量,且:

$$E(A_{(m_i, n_i), k} A_{(m_i, n_i), k}^T) = E(B_{(m_i, n_i), k} B_{(m_i, n_i), k}^T) = 2S_{(m_i, n_i), k}^{ff} (n-m) \Delta\omega \quad (6)$$

其中: $E[\cdot]$ 表示数学期望; $S_{(m_i, n_i), k}^{ff}$ 为定义于局部时-频子域上待分析信号的双边功率谱密度矩阵,即:

$$S_{(m_i, n_i), k}^{ff} = \begin{bmatrix} S_{(m_i, n_i), k}^{f_1 f_1} & S_{(m_i, n_i), k}^{f_1 f_2} & \cdots & S_{(m_i, n_i), k}^{f_1 f_n} \\ S_{(m_i, n_i), k}^{f_2 f_1} & S_{(m_i, n_i), k}^{f_2 f_2} & \cdots & S_{(m_i, n_i), k}^{f_2 f_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{(m_i, n_i), k}^{f_n f_1} & S_{(m_i, n_i), k}^{f_n f_2} & \cdots & S_{(m_i, n_i), k}^{f_n f_n} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (7)$$

式中,矩阵各元素为随机过程各局部时-频区间上的自/互功率谱密度。

2 激励-响应的演变功率谱关系

考虑以下在随机地震动作用下并可以简化为如图 1 所示的集中质量模型的 n 维多自由度系统:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = -M_0 w(t) \quad (8)$$

式中, M 、 C 、 K 分别为系统 $n \times n$ 维质量矩阵、阻尼矩阵与刚度矩阵,即:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $M_0 = [m_1, m_2, \cdots, m_n]$ 为 $n \times 1$ 维质量向量,结构阻尼假定为瑞利阻尼,即:

$$C = \alpha_c M + \beta_c K \quad (10)$$

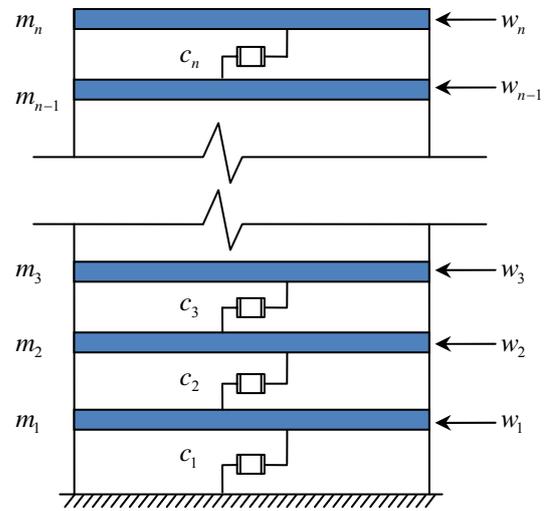


图 1 多层结构的集中质量模型

Fig.1 Lumped mass model of a MDOF structure

如将系统随机动力位移响应和激励表示成为式(4)的形式,即:

$$X_{(m_i, n_i), k}(t) = A_{(m_i, n_i), k} \cos \left[\omega_{c, (m_i, n_i), k} \left(t - \frac{kT_0}{n-m} \right) \right] + B_{(m_i, n_i), k} \sin \left[\omega_{c, (m_i, n_i), k} \left(t - \frac{kT_0}{n-m} \right) \right] \quad (11)$$

和

$$w_{(m_i, n_i), k}(t) = C_{(m_i, n_i), k} \cos \left[\omega_{c, (m_i, n_i), k} \left(t - \frac{kT_0}{n-m} \right) \right] + D_{(m_i, n_i), k} \sin \left[\omega_{c, (m_i, n_i), k} \left(t - \frac{kT_0}{n-m} \right) \right] \quad (12)$$

式中, $C_{(m_i, n_i), k}$ 、 $D_{(m_i, n_i), k}$ 为 0 均值随机变量,且:

$$E[C_{(m_i, n_i), k}^2] = E[D_{(m_i, n_i), k}^2] = 2S_{(m_i, n_i), k}^{ww} (n-m) \Delta\omega \quad (13)$$

其中, $S_{(m_i, n_i), k}^{ww}$ 为随机地震动 $w(t)$ 在局部时-频域上的双边演变功率谱密度。

将式(11)~式(12)代入式(8)的分量形式, 即:

$$M\ddot{X}_{(m_i, n_i), k}(t) + C\dot{X}_{(m_i, n_i), k}(t) + KX_{(m_i, n_i), k}(t) = -M_0 w_{(m_i, n_i), t} \quad (14)$$

可得:

$$\begin{aligned} -MA_{(m_i, n_i), k} \omega_{c, (m_i, n_i), k}^2 + CB_{(m_i, n_i), k} \omega_{c, (m_i, n_i), k} + \\ KA_{(m_i, n_i), k} = -M_0 C_{(m_i, n_i), k} \\ -MB_{(m_i, n_i), k} \omega_{c, (m_i, n_i), k}^2 - CA_{(m_i, n_i), k} \omega_{c, (m_i, n_i), k} + \\ KB_{(m_i, n_i), k} = -M_0 D_{(m_i, n_i), k} \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)两式分别乘以各自的共轭转置, 然后相加并求期望, 并注意到式(13)与式(6)后可得:

$$\begin{aligned} \omega_{c, (m_i, n_i), k}^4 MS_{(m_i, n_i), k}^{XX} M^T + \omega_{c, (m_i, n_i), k}^2 CS_{(m_i, n_i), k}^{XX} C^T + \\ KS_{(m_i, n_i), k}^{XX} K^T - \omega_{c, (m_i, n_i), k}^2 MS_{(m_i, n_i), k}^{XX} K^T - \\ \omega_{c, (m_i, n_i), k}^2 KS_{(m_i, n_i), k}^{XX} M^T = M_0 M_0^T S_{(m_i, n_i), k}^{ww} \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)进一步可以简化为:

$$S_{(m_i, n_i), k}^{XX} = H[\omega_{c, (m_i, n_i), k}] M_0 M_0^T S_{(m_i, n_i), k}^{ww} H^T[\omega_{c, (m_i, n_i), k}] \quad (17)$$

式中:

$$H[\omega_{c, (m_i, n_i), k}] = [(K - \omega_{c, (m_i, n_i), k}^2 M) + i\omega_{c, (m_i, n_i), k} C]^{-1} \quad (18)$$

为局部传递函数矩阵。

当我们将对结构层间位移 $U_i = X_{i+1} - X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 的功率谱更感兴趣时, 可依 GHW 估计功率谱公式^[11]推导求得, 即:

$$\begin{aligned} S_{U_i U_i}(\omega_j, \tau_k) = \frac{T_0}{2\pi(n_j - m_j)} E \left[\left| W_{\psi}^U \left[(m_j, n_j), k \right] \right|^2 \right] = \\ \frac{T_0}{2\pi(n_j - m_j)} E \left\{ \left| W_{\psi}^{(X_{i+1} - X_i)} \left[(m_j, n_j), k \right] \right|^2 \right\} = \\ (S_{X_{i+1} X_{i+1}} + S_{X_i X_i} - S_{X_{i+1} X_i} - S_{X_i X_{i+1}}) |_{\omega = \omega_j, t = t_k} \end{aligned} \quad (19)$$

3 层间位移动力可靠度分析

在求得结构层间位移响应功率谱密度后, 可依据跨越过程的 Markov 假定^[5, 17-18], 求得非平稳层间位移在某段时间内超越特定阈值的概率。

一般地, 可以证明, 在非平稳高斯随机过程单/双(B/D)侧首次超越的问题中, 在规定时间段 $[0, t]$ 内不超过单/双侧界限的时变概率, 即可靠度可以写为^[17-20]:

$$P_r(t) = A \exp \left\{ - \int_0^t \alpha_X(a, u) du \right\} \quad (20)$$

式中: $\alpha_X(a, t)$ 为单侧首次超越的风险函数; $A = P_r[X(t=0) < a]$ 为 $t=0$ 时, 随机过程 $X(t)$ 不超越界限的概率。因此, 对结构工程中大多数 0 初始条件的情况而言, $A=1$ 。由式(20)可见, 结构基于首次超越的失效概率/可靠度的评估, 重点在于如何计算风险函数。

在假定超越过程为二状态 Markov 过程的基础上, 随机过程 B 超越 $x=a$ 的风险函数可写为:

$$\alpha_{X, VM}(a, t) = v_X(a^+, t) \frac{1 - \exp \left[-\sqrt{2\pi} q(t) \frac{a}{\sigma_X(t)} \right]}{1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{a}{\sigma_X(t)} \right]^2 \right\}} \quad (21)$$

式中: $\sigma_X(t)$ 为均方过程; $v_X(a^+, t)$ 为时变向上超越边界 $x=a$ 的平均超越率:

$$v_X(a^+, t) = v_X(0, t) e^{-\frac{a^2}{2\lambda_0(t)}} \quad (22)$$

且

$$q(t) = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2(t)}{\lambda_0(t)\lambda_2(t)}} \quad (23)$$

为无量纲用于衡量时变响应功率谱密度带宽的参数, 称为瞬时频宽因子。式(22)中:

$$v_X(0, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_0(t)}} \quad (24)$$

为平均向上/下越 0 率, $\lambda_i(t)$ 为演变功率谱瞬时谱矩, 可依:

$$\lambda_j = \int_0^\infty \omega^j S(\omega) d\omega \quad (25)$$

计算得到。根据 Schwartz 不等式, 可见 $0 \leq \lambda_1^2 / \lambda_0 \lambda_2 \leq 1$, 因此, $0 \leq q(t) \leq 1$, 且 $q(t)$ 越小说明此非平稳随机过程带宽越窄, 反之, 带宽越宽^[18]。

为了考虑超聚丛效应(Super-clumping effects), Vanmarcke 在式(21)的基础上, 通过修改 $q(t)$ 为 $q^{1.2}(t)$, 提出了一个经验性的计算风险函数的公式, 这里将其称为修正后的 Vanmarcke 公式^[18]。相应地, 当考虑随机过程在时间段 $[0, t]$ 内不发生 D 超越 $|x|=a$ 的可靠度时, 可将(修改后的)/Vanmarcke 风险函数(式(21)及其修正)中的 $v_X(a^+, t)$ 与 $\sqrt{2\pi}$ 分别修改为 $v_{|x|}(a^+, t)$ 与 $\sqrt{\pi/2}$, 详参考文献[17, 19]。

4 数值算例

考虑六层钢筋混凝土多自由度框架结构, 集中质量模型如图 1 所示, 各层质量与刚度参数如表 1 所示。

考虑在均匀调制与非均匀调制随机过程激励下结构层间位移响应功率谱密度及其首超概率。根据《建筑抗震设计规范 GB50011-2010》第 5.5 节, 此类结构在多遇地震作用下的楼层最大弹性层间位移角为 $\alpha=1/550$, 当各层层高均取为 3m 时, 极限层间位移约为 $a=5.45\text{mm}$ 。

1) 均匀调制随机激励

此非平稳随机过程由平稳随机过程经慢变包络函数调制而成, 即:

$$w(t) = \bar{w}(t)g(t) \quad (26)$$

式中, $\bar{w}(t)$ 为形如

$$\bar{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dZ(\omega) \quad (27)$$

的随机过程, 且:

$$g(t) = c[\exp(-a_0 t) - \exp(-b_0 t)] \quad (28)$$

式中: a_0 、 b_0 分别为调制函数参数; c 为使其最大值为 1 的正归化系数; $Z(\omega)$ 为正交增量的复随机过程, 且:

$$E[dZ(\omega)dZ^T(\omega')] = S_{\bar{w}\bar{w}}d\omega\delta(\omega - \omega') \quad (29)$$

式中: 上标 T 表示复共轭; $S_{\bar{w}\bar{w}}(\omega)$ 表示调制前平稳随机过程的功率谱密度, 这里可取为地震工程中常用的 Kanai-Tajimi 模型:

$$S_{\bar{w}\bar{w}}(\omega) = S_0 \frac{\omega_s^4 + 4\zeta_s^2 \omega_s^2 \omega^2}{(\omega_s^2 + \omega^2)^2 + 4\zeta_s^2 \omega_s^2 \omega^2} \quad (30)$$

因此, 均匀调制非平稳过程的功率谱密度为:

$$S_{ww}(\omega, t) = g^2(t)S_{\bar{w}\bar{w}}(\omega) \quad (31)$$

此例中, 调制函数参数分别取为 $a_0=0.1$ 、 $b_0=0.2$, Kanai-Tajimi 谱参数分别取为 $\omega_s=20\text{rad/s}$, $\zeta_s=0.24$, 调整谱强因子 S_0 使此非平稳随机过程峰值加速度均值为《建筑抗震设计规范 GB 50011-2010》规定的 7 度多遇时的 0.35m/s^2 。

表 1 各层质量与刚度参数

Table 1 Mass and stiffness of each floor

参数/楼层(模态)	1	2	3	4	5	6
质量/t	16.315	16.315	16.315	16.315	16.315	16.315
刚度/(kN/m)	1.351×10^4	1.287×10^4	1.158×10^4	9.652×10^4	7.078×10^4	3.861×10^3
振型频率/(rad/s)	6.2802	15.3835	24.3235	33.2312	42.1283	51.0204

2) 非均匀调制随机激励

为了研究多自由度结构在完全时-频非平稳地震动作用下的随机动力行为, 假设地震动有形如:

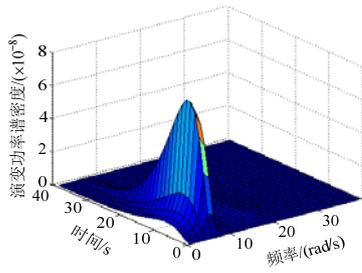
$$S(\omega, t) = S_0 \left(\frac{\omega}{5\pi} \right)^2 e^{-0.15t} t^2 e^{-\left(\frac{\omega}{5\pi}\right)^2 t} \quad (32)$$

的功率谱密度。根据《建筑抗震设计规范 GB 50011-2010》, 调整谱强因子 S_0 使相应的样本地震动时程峰值的均值为 7 度多遇情况时的 0.35m/s^2 。

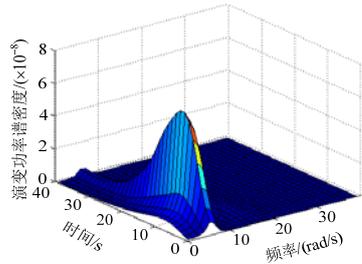
4.1 层间位移响应功率谱

图 2 所示为在均匀调制随机激励下结构底层层间位移功率谱密度, 其中图 2(b)为利用式(19)中第一式 Monte Carlo 估计的功率谱密度, 相关的研究亦可见^[21-22]; 图 2(a)为利用局部平稳法计算得到的功率谱密度。由两图可知, 局部平稳法计算结果与 Monte Carlo 模拟估计的结果, 除了在响应起始与结尾处外, 均符合甚好。由于小波边缘效应, 时间起始与结尾处 Monte Carlo 模拟值欠准确, 其真实值应接近于 0。为了进一步对比它们的吻合程度,

图 3 所示为二者在响应初始阶段(2s)及功率谱密度最大(约 10s)处的“瞬时”功率谱密度。图 4 所示为通过各种方法得到的层间位移响应标准差, 其中 Monte Carlo I 为直接 Monte Carlo 模拟的响应标准差; Monte Carlo II 为估计功率谱密度的 0 阶谱矩根; 点划线为由局部平稳法计算功率谱的 0 阶谱矩根(0 阶谱矩根即为位移响应标准差, 可见文献[17])。由图 3~图 4 可见, 所建议方法能较好地吻合数值模拟解。与图 2~图 4 相对应, 图 5~图 7 所示为结构在非均匀调制随机过程激励下的相关结果, 其与数值模拟解的吻合甚好, 兹不赘述。由图 2 与图 5 可见, 由 Monte Carlo II 估计的功率谱密度在时间开始和结尾处有明显不符合实情情况的功率谱密度幅值出现, 这种情况是由于小波变换的边缘效应所导致的。同样的情况可见图 4 与图 7 所示的标准差对比: 由于小波边缘效应, 由 Monte Carlo II 得到的功率谱密度 0 阶谱矩根在时间开始及结尾处明显大于直接 Monte Carlo 模拟值, 而本文所建议方法与直接 Monte Carlo 模拟值吻合甚好。



(a) 局部平稳法



(b) Monte Carlo 模拟估计

图2 均匀调制激励下结构底层层间位移功率谱密度
Fig.2 Drift EPS of the 1st story under uniformly modulated excitation

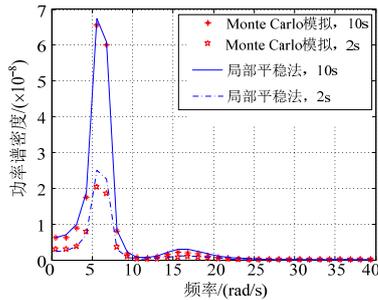


图3 底层位移于典型时刻功率谱密度对比
Fig.3 Comparison of PS of the 1st story at different time instants

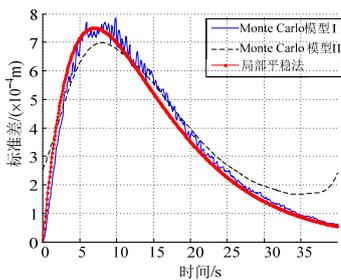
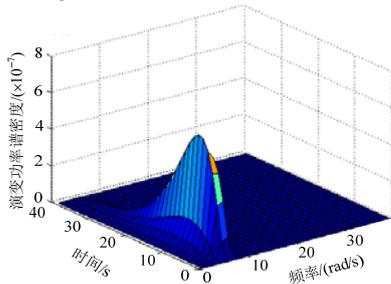
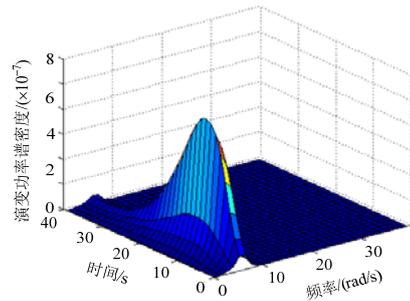


图4 底层位移标准差对比
Fig.4 Comparison of standard deviation of the 1st story



(a) 局部平稳法



(b) Monte Carlo 模拟估计

图5 非均匀调制激励下结构底层层间位移功率谱密度
Fig.5 Drift EPS of the 1st story under non-uniformly modulated excitation

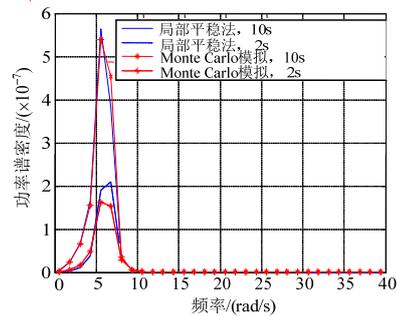


图6 底层位移于典型时刻功率谱密度对比
Fig.6 PS of the 1st story over time

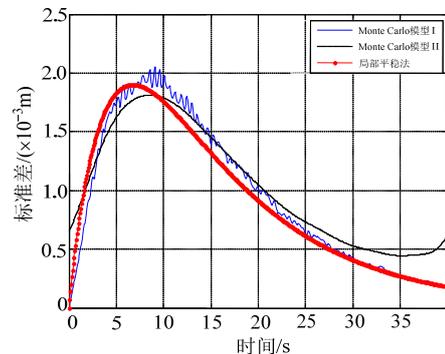


图7 底层位移标准差对比
Fig.7 Standard deviation of the 1st story

4.2 层间位移响应动力可靠度

在 4.1 小节中求得层间位移响应功率谱密度后,可进一步依第 3 节中所述求得基于结构层间位移的动力可靠度。

如前所述,在峰值加速度为 $0.35 \text{ m}^2/\text{s}$ 的 7 度多遇地震作用下,框架结构层间位移阈值约为 5.45 mm 。在选取结构层间动力位移响应的超越界限以考察本文所建议方法在不同超越界限取值时的计算精度时,考虑了与层间位移阈值(5.45 mm)在一个数量级上且可使可靠度指标处于不同层次上的超越界限取值。在峰值为 $0.35 \text{ m}^2/\text{s}$ 的均匀调制随机过程激励下结构动力响应阈值取可取为 2.0 mm

和 2.5mm，此时由 Monte Carlo 模拟得到的层间最小动力可靠度分别为 0.55 和 0.92。同样在峰值加速度为 $0.35 \text{ m}^2/\text{s}$ 的非均匀调制随机过程激励下，当超越界限取为 4.7mm 和 6.0mm 时，此时由 Monte Carlo 模拟得到的层间最小动力可靠度分别为 0.66 和非均匀调制随机激励作用下结构各层层间位移动力可靠度，分别如图 8(a)、图 8(b)与图 9(a)、图 9(b)所示。其中，实线为 20000 次 Monte Carlo 模拟的结果，虚线为本文所建议方法计算所得的结果，显然，本文所建议方法较 Monte Carlo 模拟有较高计算效率。

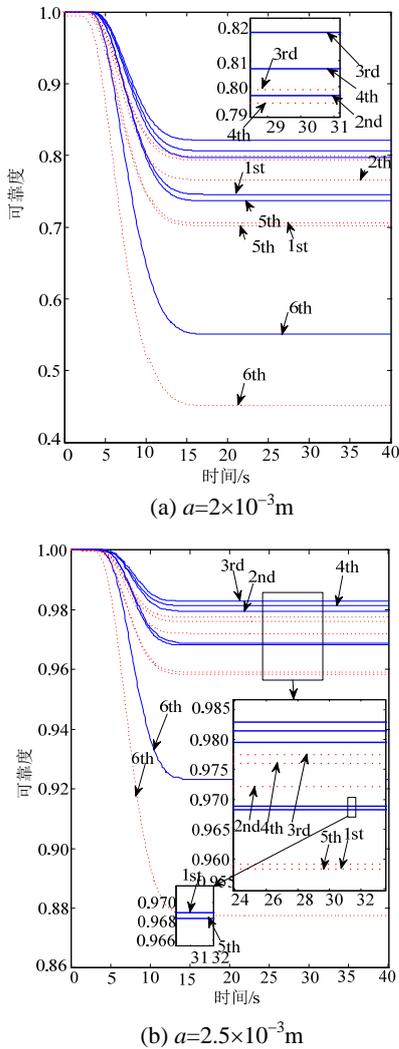


图 8 均匀调制激励下结构基于层间位移的时变可靠度
Fig.8 Time-varying dynamic reliabilities based on story drifts under uniformly modulated excitation

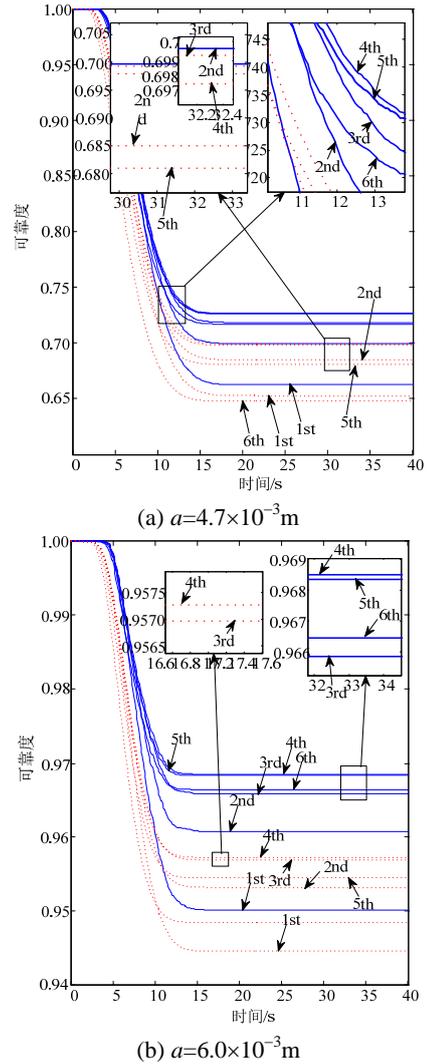


图 9 非均匀调制激励下结构基于层间位移的时变可靠度
Fig.9 Time-varying dynamic reliabilities based on story drifts under non-uniformly modulated excitation

为了清楚地表示在不同超越界限情况下本文所建议方法与 Monte Carlo 模拟解的对比，将 $t = T_0$ 时的可靠度列入表 2~表 5 中。其中，表 2~表 3 为均匀调制激励下各层间位移可靠度，表 4~表 5 为非均匀调制激励下的各层间位移可靠度。在此四表中一同显示的还有 Monte Carlo 模拟解与本文建议方法解之间的绝对和相对误差。可见：随着跨越界限的升高，二者之间的误差有减小的趋势。由以上分析可知，本文所建议的求解结构动力可靠度的小波方法，对于工程结构在多遇非平稳随机地震动作用下失效这种小概率事件，具有较高的计算精度。

除此之外，由图 2~图 4 对比图 5~图 7 可见，即使峰值加速度均值相同的均匀调制和非均匀调

制随机过程, 其作用下结构的响应相差较大。以图 4 与图 7 为例, 非均匀调制激励下结构响应标准差约为均匀调制激励下结构响应标准差 3 倍。由不同非平稳随机激励作用下结构层间位移最小可靠度亦可见: 在均匀调制随机激励作用下且层间位移超越界限为 2.5mm 时, 结构层间位移最小可靠度约为 0.92; 而在非均匀调制随机激励作用下且层间位移超越界限上升为 4.7mm 时, 结构层间位移最小可靠度反而下降为 0.66。显然, 这种情况不仅与激励中心频率和结构卓越频率之间关系有关, 而且表明了均匀调制随机过程在表示地震动激励方面尚需改进, 有必要发展对实际结构抗震设计更具指导意义的时-频完全非平稳地震动随机过程模型。

表 2 均匀调制激励下 $a=2 \times 10^{-3}$ m 时各层层间位移可靠度
Table 2 Reliabilities of story drifts, crossing boundary $a=2 \times 10^{-3}$ m, structure subjected to uniformly modulated excitation

楼层	1	2	3	4	5	6
MC	0.7456	0.7966	0.8211	0.8067	0.7370	0.5506
LS-Vanmarcke	0.7056	0.7661	0.7988	0.7936	0.7017	0.4513
AE[(MC-LS)]	0.0400	0.0305	0.0223	0.0131	0.0353	0.0993
RE[(MC-LS)/MC]/(%)	5.3648	3.8288	2.7159	1.6239	4.7897	18.0349

表 3 均匀调制激励下 $a=2.5 \times 10^{-3}$ m 时各层层间位移可靠度
Table 3 Reliabilities of story drifts, crossing boundary $a=2.5 \times 10^{-3}$ m, structure subjected to uniformly modulated excitation

楼层	1	2	3	4	5	6
MC	0.9688	0.9795	0.9829	0.9815	0.9683	0.9232
LS-Vanmarcke	0.9592	0.9721	0.9775	0.9761	0.9584	0.8777
AE[(MC-LS)]	0.0096	0.0074	0.0054	0.0054	0.0099	0.0455
RE[(MC-LS)/MC]/(%)	0.9909	0.7555	0.5494	0.5502	1.0224	4.9285

表 4 非均匀调制激励下 $a=4.7 \times 10^{-3}$ m 时各层层间位移可靠度
Table 4 Reliabilities of story drifts, crossing boundary $a=4.7 \times 10^{-3}$ m, structure subjected to non-uniformly modulated excitation

楼层	1	2	3	4	5	6
MC	0.6628	0.6996	0.7185	0.7266	0.7264	0.7169
LS-Vanmarcke	0.6527	0.6850	0.6993	0.6978	0.6809	0.6480
AE[(MC-LS)]	0.0101	0.0146	0.0192	0.0288	0.0455	0.0689
RE[(MC-LS)/MC]/(%)	1.5238	2.0869	2.6722	3.9637	6.2638	9.6108

表 5 非均匀调制激励下 $a=6.0 \times 10^{-3}$ m 时各层层间位移可靠度
Table 5 Reliabilities of story drifts, crossing boundary $a=6.0 \times 10^{-3}$ m, structure subjected to non-uniformly modulated excitation

楼层	1	2	3	4	5	6
MC	0.9502	0.9608	0.9658	0.9685	0.9684	0.9665
LS-Vanmarcke	0.9446	0.9532	0.9570	0.9573	0.9545	0.9485
AE[(MC-LS)]	0.0056	0.0076	0.0088	0.0112	0.0139	0.0180
RE[(MC-LS)/MC]/(%)	0.5893	0.7910	0.9112	1.1564	1.4354	1.8624

5 结论

本文由广义谐和小波及随机过程的局部平稳小波模型出发, 推导了在完全非平稳随机激励作用下线性多自由度结构激励与相对地面位移响应功率谱密度之间的关系。从另一个角度给出了完全非平稳随机激励作用下线性结构的响应功率谱密度。由于一般对结构层间位移更感兴趣, 随后推导了相对地面位移响应功率谱密度和层间位移功率谱密度之间的关系。为了验证本文所建议方法在计算基于层间位移的结构动力可靠度之中的应用, 本文结合非平稳随机过程跨越事件的 Markov 假定, 得到了结构各层间位移不超过某限值的动力可靠度。研究表明, 随着跨越界限的升高, 无论在均匀调制或非均匀调制非平稳随机激励作用下, 本文所建议方法所得到的各层间位移动力可靠度与 Monte Carlo 模拟解之间的误差有逐步减小的趋势。可见, 当此方法应用于计算工程结构在多遇时-频非平稳地震动作用下失效这种小概率事件时, 由于只涉及到简单的矩阵运算, 应具有较高的计算精度和计算效率。

本文所建议方法, 有望结合统计线性化方法进而得到完全非平稳随机激励作用下多自由度非线性滞回结构的响应功率谱密度。

参考文献:

- [1] Lin Y K. Probabilistic theory of structural dynamics [M]. New York: McGraw-Hill, 1967: 293-332.
- [2] Roberts J B, Spanos P D. Random vibration and statistical linearization [M]. New York: Dover, 2003: 1-16.
- [3] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992: 474-558.
Zhu Weiqiu. Random vibration [M]. Beijing: Science Press, 1992: 474-558. (in Chinese)
- [4] 李桂青, 曹宏. 结构动力可靠度及其应用[M]. 北京: 地震出版社, 1993: 26-82.
Li Guiqing, Cao Hong. Structure dynamic reliability and its application in engineering[M]. Beijing: Earthquake Press, 1993: 16-82. (in Chinese)
- [5] Crandall S H. First-crossing probabilities of the linear oscillator [J]. Journal of Sound and Vibration, 1970, 12(3): 285-299.
- [6] Chen J B, Li J. Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structures [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(1): 33-44.
- [7] Daubechies I. Ten lectures on wavelets [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992:

- 1—16.
- [8] Basu B. Wavelet-based stochastic seismic response of a duffing oscillator [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 245(2): 251—260.
- [9] Basu B, Gupta V K. Seismic response of SDOF systems by wavelet modeling of nonstationary processes [J]. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 1998, 124(10): 1142—1150.
- [10] Tratskas P, Spanos P D. Linear multi-degree-of-freedom system stochastic response by using the harmonic wavelet transform [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, 70(5): 724—731.
- [11] Spanos P D, Kougioumtzoglou I A. Harmonic wavelets based statistical linearization for response evolutionary power spectrum determination [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, 27(1): 57—68.
- [12] Nason G P, von Sachs R, Kroisandt G. Wavelet processes and adaptive estimation of the evolutionary wavelet spectrum [J]. *Journal of The Royal Statistical Society Series B-Statistical Methodology*, 2000, 62(2): 271—295.
- [13] Newland D E. Harmonic and musical wavelets [J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1994, 444(1922): 605—620.
- [14] Newland D E. Harmonic wavelet analysis [J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1993, 443(1917): 203—225.
- [15] Priestley M. Power spectral analysis of non-stationary random processes [J]. *Journal of Sound And Vibration*, 1967, 6(1): 86—97.
- [16] Spanos P D, Kougioumtzoglou I A. Harmonic wavelet-based statistical linearization of the Bouc-Wen hysteretic model [C]// Faber, Kohler and Nishijima. *Proceedings of the 11th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, ICASP*. London: Taylor & Francis Group, 2011: 2649—2656.
- [17] Corotis R B, Vanmarcke E H, Cornell A C. First passage of nonstationary random processes [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1972, 98(2): 401—414.
- [18] Vanmarcke E H. On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes [J]. *Journal of applied mechanics*, 42(1975): 215—220.
- [19] Barbato M, Conte J P. Structural reliability applications of nonstationary spectral characteristics [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, 137(5): 371—382.
- [20] Li J, Chen J B. *Stochastic Dynamics of Structures* [M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2009: 285—308.
- [21] 曹晖, 赖明, 白绍良. 地震地面运动局部谱密度的小波变换估计[J]. *工程力学*, 2004, 21(5): 109—115.
Cao Hui, Lai Ming, Bai Shaoliang. Estimation of local spectral density of earthquake ground motion based on wavelet transform [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(5): 109—115. (in Chinese)
- [22] 周广东, 丁幼亮, 李爱群, 孙鹏. 基于小波变换的非平稳脉动风时变功率谱估计方法研究[J]. *工程力学*, 2013, 30(3): 89—97.
Zhou Guangdong, Ding Youliang, Li Aiqun, Sun Peng. Estimation method of evolutionary power spectrum for non-stationary fluctuating wind using wavelet transforms [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(3): 89—97. (in Chinese)