

文章编号: 1000-4750(2015)03-0126-08

# 铰接板机构运动分析的简便协调方程

蒋旭东, 邓 华

(浙江大学空间结构研究中心, 浙江, 杭州 310058)

**摘 要:** 一些新型空间结构的施工分析模型可以简化为铰接板机构, 如 Pantadome。利用三角形形状稳定性特点, 将三条边长变化为零来表征三角形板单元的刚体位移。进而基于杆单元的协调方程, 建立了一个简便的顶点铰接三角形板单元的机构位移协调方程, 且给出了 1 阶和 2 阶协调矩阵。将四边形板单元划分为 2 个三角形板单元, 通过引入单元四顶点共面条件, 推导出平面四边形板单元的协调矩阵。理论上, 利用该思路可构建任意平面多边形板单元的协调矩阵。针对该简便协调方程, 进一步给出了求解铰接板机构运动路径的计算策略。对 1 个顶升施工的 Pantadome 和 1 个顶推施工的双坡网架的成形过程进行了数值模拟, 结果表明该方法对于此类铰接板机构的运动路径分析有很高的精度。

**关键词:** 铰接板机构; 运动分析; 协调方程; 运动路径; 施工模拟

中图分类号: TU33<sup>+</sup>9 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.09.0898

## SIMPLE COMPATIBILITY EQUATIONS FOR KINEMATIC ANALYSIS OF PIN-JOINTED PLATE MECHANISMS

JIANG Xu-dong, DENG Hua

(Space Structures Research Center, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

**Abstract:** The erection analysis models of some new spatial structures, such as Pantadome, can be simplified as pin-jointed plate mechanisms. The rigid body displacement of a triangular plate element is characterized by the un-elongation of its three sides due to the shape stability of a triangle. Based on the compatibility equation of a bar element, a simple compatibility equation of a triangular plate element with pin-jointed vertices is established. Its first- and second- order compatibility matrices are presented. By introducing four-vertex coplanar conditions, the compatibility matrices of a quadrangular plate element, which is divided into two triangular plate elements, are further deduced. Theoretically, the compatibility matrix of a planar arbitrarily polygonous plate element can be established by this way. As for the simple compatibility equations, a computational strategy is adopted to track the kinematic path of pin-jointed plate mechanisms. The erection processes of an up-jacked Pandadome and an incrementally-launched gable space frame are numerically simulated. The results indicate that the method presented possesses a high accuracy for solving the kinematic path of pin-jointed plate mechanisms.

**Key words:** pin-jointed plate mechanism; kinematic analysis; compatibility equation; kinematic path; erection simulation

现代大跨度空间结构体系中, 机构分析受到越来越多的关注。面向工程实践, 近年来有两方面的研究工作开展较多。第 1 方面是指以索穹顶为代表的索杆张力结构。此类结构按传统的结构判定准则

应该属于几何可变的“机构”, 因此解释这些机构系统在怎样的条件下能够成为稳定受力系统是主要的理论问题。目前的研究工作<sup>[1-3]</sup>已经能很好地回答该问题。第 2 方面问题主要面向结构的施工分

收稿日期: 2013-09-20; 修改日期: 2013-12-18

通讯作者: 邓 华(1971—), 男, 江西人, 教授, 博士, 博导, 从事空间结构和钢结构研究(E-mail: denghua@zju.edu.cn).

作者简介: 蒋旭东(1988—), 男, 浙江人, 硕士生, 从事空间结构研究(E-mail: jiang\_xudong@163.com).

析, 如模拟索穹顶的张拉成形过程<sup>[4]</sup>、攀达穹顶(Pantadome)顶升成形过程<sup>[5]</sup>等。由于这些结构体系在施工阶段是可大变形的机构, 因此如何跟踪体系成形过程的运动形态则是基本理论问题。

关于机构系统的运动分析, 目前的研究工作主要针对杆系或索杆系统, 研究内容包括可动性<sup>[1,6]</sup>、运动路径跟踪<sup>[7]</sup>、运动的极值点<sup>[8]</sup>和运动分岔路径<sup>[7,9]</sup>等方面。然而, “攀达穹顶”这类系统更应该看作为由板片组成的机构, 但运动分析方面的研究工作还非常少, 已有研究主要是针对柱面网壳这种能简化为平面连杆的体系, 按杆系机构进行分析<sup>[10]</sup>。

本文主要以“攀达穹顶”结构的施工成形为背景, 讨论空间铰接板机构的刚体运动路径分析问题。实际上, 机构运动分析的基本方程是体系的协调方程, 其反映的是单元应变和节点位移之间的关系。而体系的刚体位移则是指满足所有单元应变为零条件下协调方程的非零解, 且非零解的性质又取决于协调方程的系数矩阵, 即协调矩阵<sup>[11]</sup>。由于机构运动属于大位移问题, 因此必须考虑单元应变和节点位移的非线性关系, 然而根据常规有限元方法来直接建立板单元的非线性协调矩阵会非常复杂, 且各类多边形板单元的协调矩阵由于插值函数的不同而差异较大。由此可见, 铰接板机构的运动分析要比杆系机构更复杂。

本文从最简单的三角形板单元出发, 将三条边长变化为零来表征三角形板单元的刚体位移。进而基于杆单元的协调方程, 建立了一个简便的顶点铰接三角形板单元的机构运动协调方程。对于平面四边形板单元, 先将其划分为2个三角形板单元, 再引入单元四顶点共面条件推导出平面四边形板单元的协调矩阵。文中参考杆系机构的运动分析方法, 进一步给出了求解铰接板机构运动路径的计算策略。最后给出了1个顶升施工的Pantadome和1个顶推施工的双坡网架算例, 对其成形过程进行了数值模拟, 并对本文方法的计算精度进行了考察。

### 1 三角形铰接板单元

假定三角形板单元仅在3个顶点处与周边单元顶点或边界支座铰接。如图1所示, 令三角形铰接板的3个顶点初始坐标及其位移向量分别为 $(x_i, y_i, z_i)$ 和 $\mathbf{d}_i = \{u_i, v_i, w_i\}^T$ , 其中 $i=1,2,3$ 。

如果板单元的位移为刚体位移, 通常以单元中任何一点的应变增量为零来描述。根据有限元法的

基本原理, 节点位移和板上应变之间的协调矩阵形式复杂, 数学运算很不方便<sup>[12]</sup>。但由于仅关注铰接板的刚体位移, 因此可根据三角形形状稳定性的特点, 以单元三条边的长度变化为零来表征单元的刚体位移。

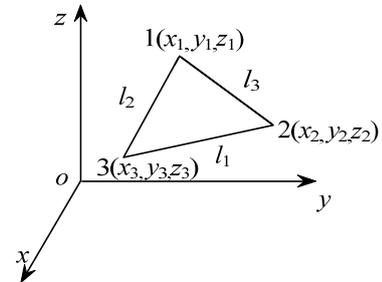


图1 三角形板单元

Fig.1 Triangular plate element

以板单元任意无应变时的构型作为初始构型, 则其边长为:

$$l_k = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad (1)$$

$k=1,2,3$

式中,  $i, j$ 为第 $k$ 条边的两端节点编号。当单元发生位移后, 边长为:

$$l'_k = [(x_i + u_i - x_j - u_j)^2 + (y_i + v_i - y_j - v_j)^2 + (z_i + w_i - z_j - w_j)^2]^{1/2}, \quad k=1,2,3 \quad (2)$$

由式(1)和式(2), 可得:

$$l'^2_k - l^2_k = 2(\mathbf{b}_{Lk} \mathbf{d}^k + \mathbf{b}_{N1k} \mathbf{d}^k / 2) l_k \quad (3)$$

$$e_k = l'_k - l_k = \mathbf{b}_{Lk} \mathbf{d}^k + \mathbf{b}_{N1k} \mathbf{d}^k / 2 + o((\mathbf{d}^k)^3) \quad (4)$$

式中:  $e_k$ 为第 $k$ 条边的长度伸长量;  $\mathbf{d}^k = \{\mathbf{d}_i^T, \mathbf{d}_j^T\}^T$ 为第 $k$ 条边两端节点的位移向量;  $o((\mathbf{d}^k)^3)$ 代表节点位移三次方及以上的高阶项;  $\mathbf{b}_{Lk}$ 和 $\mathbf{b}_{N1k}$ 的表达式如下:

$$\mathbf{b}_{Lk} = \{(x_i - x_j) / l_k, (y_i - y_j) / l_k, (z_i - z_j) / l_k, (x_j - x_i) / l_k, (y_j - y_i) / l_k, (z_j - z_i) / l_k\} \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_{N1k} = \{(u_i - u_j) / l_k, (v_i - v_j) / l_k, (w_i - w_j) / l_k, (u_j - u_i) / l_k, (v_j - v_i) / l_k, (w_j - w_i) / l_k\} \quad (6)$$

实际上, 式(3)和式(4)与连接节点 $i, j$ 的杆单元的协调方程是一致的。

进一步以三角形板单元的三边伸长量来描述单元的变形。定义 $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}^T$ , 则根据式(4)可组集单元的协调方程, 形式如下:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_L^e \mathbf{d} + \mathbf{B}_{N1}^e \mathbf{d} / 2 + o(\mathbf{d}^3) \quad (7)$$

式中： $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_1^T, \mathbf{d}_2^T, \mathbf{d}_3^T\}^T$ ； $\mathbf{B}_L^e$ 和 $\mathbf{B}_{N1}^e$ 分别单元的 1 阶和 2 阶协调矩阵， $\mathbf{B}_{N1}^e$ 包含位移的 1 次项。2 个

$$\mathbf{B}_L^e = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_2}{l_3} & \frac{y_1 - y_2}{l_3} & \frac{z_1 - z_2}{l_3} & \frac{x_2 - x_1}{l_3} & \frac{y_2 - y_1}{l_3} & \frac{z_2 - z_1}{l_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_2 - x_3}{l_1} & \frac{y_2 - y_3}{l_1} & \frac{z_2 - z_3}{l_1} & \frac{x_3 - x_2}{l_1} & \frac{y_3 - y_2}{l_1} & \frac{z_3 - z_2}{l_1} \\ \frac{x_1 - x_3}{l_2} & \frac{y_1 - y_3}{l_2} & \frac{z_1 - z_3}{l_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 - x_1}{l_2} & \frac{y_3 - y_1}{l_2} & \frac{z_3 - z_1}{l_2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_{N1}^e = \begin{bmatrix} \frac{u_1 - u_2}{l_3} & \frac{v_1 - v_2}{l_3} & \frac{w_1 - w_2}{l_3} & \frac{u_2 - u_1}{l_3} & \frac{v_2 - v_1}{l_3} & \frac{w_2 - w_1}{l_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_2 - u_3}{l_1} & \frac{v_2 - v_3}{l_1} & \frac{w_2 - w_3}{l_1} & \frac{u_3 - u_2}{l_1} & \frac{v_3 - v_2}{l_1} & \frac{w_3 - w_2}{l_1} \\ \frac{u_1 - u_3}{l_2} & \frac{v_1 - v_3}{l_2} & \frac{w_1 - w_3}{l_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{u_3 - u_1}{l_2} & \frac{v_3 - v_1}{l_2} & \frac{w_3 - w_1}{l_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

如果三角形板单元仅发生机构位移，则三边长度不变，即  $l'_k = l_k$  ( $k=1,2,3$ )。同样对三条边分别建立式(3)，并进行组集可得：

$$\mathbf{B}_L^e \mathbf{d} + \mathbf{B}_{N1}^e \mathbf{d} / 2 = 0 \quad (10)$$

由于式(10)的推导没有引入任何假定和简化，因此是铰接三角形板单元发生机构位移(刚体位移)的精确协调方程。

## 2 平面四边形铰接板单元

对于平面四边形板单元，同样假定板单元仅在 4 个顶点处与周边单元顶点或边界支座铰接。令其顶点的初始坐标和位移向量分别为  $(x_i, y_i, z_i)$  和  $\mathbf{d}_i = \{u_i, v_i, w_i\}^T$ ，其中  $i=1,2,3,4$ 。

连接任意对角线，将平面四边形板单元划分为 2 个三角形单元，如图 2 所示。根据式(10)可分别写出 2 个三角形单元的机构位移协调方程。但是对于平面四边形板单元，仅以 2 个三角形单元的边长伸长量为零并不能完全描述单元的刚体位移，还应保证变形前后 2 个三角形单元均处于同一平面内，即应附加四点共面条件。

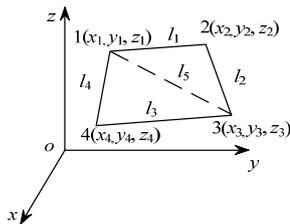


图 2 平面四边形板单元

Fig.2 Planar quadrilateral plate element

根据高等数学<sup>[13]</sup>知识，四点共面条件可通过 12,13,14 三条线的方向矢量关系来表示，即须满足：

$$(\overline{14} \times \overline{13}) \cdot \overline{12} = 0 \quad (11)$$

在初始构型下，将顶点的坐标代入式(11)，则四顶点共面条件可进一步写成如下行列式形式：

$$\begin{vmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

同样，当单元发生位移  $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_1^T, \mathbf{d}_2^T, \mathbf{d}_3^T, \mathbf{d}_4^T\}^T$  后，4 个顶点依然满足共面的条件为：

$$\begin{vmatrix} x_4 + u_4 - x_1 - u_1 & y_4 + v_4 - y_1 - v_1 & z_4 + w_4 - z_1 - w_1 \\ x_3 + u_3 - x_1 - u_1 & y_3 + v_3 - y_1 - v_1 & z_3 + w_3 - z_1 - w_1 \\ x_2 + u_2 - x_1 - u_1 & y_2 + v_2 - y_1 - v_1 & z_2 + w_2 - z_1 - w_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

将行列式(12)和式(13)写成多项式的形式。考虑式(12)，并仅保留位移的 1 次项、2 次项，式(13)可表示为：

$$\sum_{i=1}^4 [(a_{ui} + b_{ui})u_i + (a_{vi} + b_{vi})v_i + (a_{wi} + b_{wi})w_i] = 0 \quad (14)$$

式中：

$$a_{ui} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_j & y_k & y_l \\ z_j & z_k & z_l \end{vmatrix}, \quad a_{vi} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_j & z_k & z_l \\ x_j & x_k & x_l \end{vmatrix},$$

$$a_{wi} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_\kappa & x_\ell \\ y_j & y_\kappa & y_\ell \end{vmatrix}, \quad b_{ui} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_j & v_\kappa & v_\ell \\ z_j & z_\kappa & z_\ell \end{vmatrix},$$

$$b_{vi} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_j & w_\kappa & w_\ell \\ x_j & x_\kappa & x_\ell \end{vmatrix}, \quad b_{wi} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_j & u_\kappa & u_\ell \\ y_j & y_\kappa & y_\ell \end{vmatrix}.$$

以上变量中的  $i, j, \kappa, \ell$  按 1, 2, 3, 4 顺序轮换, 例如  $i=2$  时,  $j=3, \kappa=4, \ell=1$ 。

实际上, 式(14)便是四边形铰接板单元满足四顶点共面附加条件的机构位移协调方程。其中系数  $a_{ui}$ 、 $a_{vi}$ 、 $a_{wi}$  为常数, 系数  $b_{ui}$ 、 $b_{vi}$ 、 $b_{wi}$  含有位移的 1 次项。

将 2 个子三角形单元分别按式(8)和式(9)建立 1 阶和 2 阶协调矩阵, 然后引入顶点共面附加协调方程式(14), 得到的平面四边形铰接板单元的 1 阶协调矩阵  $\mathbf{B}_L^e$  和 2 阶协调矩阵  $\mathbf{B}_{N1}^e$  均为  $(6 \times 12)$  的矩阵, 可表示为如下形式:

$$\mathbf{B}_L^e = \begin{bmatrix} a_{u1} & a_{v1} & a_{w1} & a_{u2} & a_{v2} & a_{w2} & a_{u3} \\ \frac{x_1 - x_2}{l_1} & \frac{y_1 - y_2}{l_1} & \frac{z_1 - z_2}{l_1} & \frac{x_2 - x_1}{l_1} & \frac{y_2 - y_1}{l_1} & \frac{z_2 - z_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_2 - x_3}{l_2} & \frac{y_2 - y_3}{l_2} & \frac{z_2 - z_3}{l_2} & \frac{x_3 - x_2}{l_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 - x_4}{l_3} \\ \frac{x_1 - x_4}{l_4} & \frac{y_1 - y_4}{l_4} & \frac{z_1 - z_4}{l_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_1 - x_3}{l_5} & \frac{y_1 - y_3}{l_5} & \frac{z_1 - z_3}{l_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 - x_1}{l_5} \\ & & a_{v3} & a_{w3} & a_{u4} & a_{v4} & a_{w4} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{y_3 - y_2}{l_2} & \frac{z_3 - z_2}{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{y_3 - y_4}{l_3} & \frac{z_3 - z_4}{l_3} & \frac{x_4 - x_3}{l_3} & \frac{y_4 - y_3}{l_3} & \frac{z_4 - z_3}{l_3} \\ & & 0 & 0 & \frac{x_4 - x_1}{l_4} & \frac{y_4 - y_1}{l_4} & \frac{z_4 - z_1}{l_4} \\ & & \frac{y_3 - y_1}{l_5} & \frac{z_3 - z_1}{l_5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{N1}^e = \begin{bmatrix} 2b_{u1} & 2b_{v1} & 2b_{w1} & 2b_{u2} & 2b_{v2} & 2b_{w2} & 2b_{u3} \\ \frac{u_1 - u_2}{l_1} & \frac{v_1 - v_2}{l_1} & \frac{w_1 - w_2}{l_1} & \frac{u_2 - u_1}{l_1} & \frac{v_2 - v_1}{l_1} & \frac{w_2 - w_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_2 - u_3}{l_2} & \frac{v_2 - v_3}{l_2} & \frac{w_2 - w_3}{l_2} & \frac{u_3 - u_2}{l_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u_3 - u_4}{l_3} \\ \frac{u_1 - u_4}{l_4} & \frac{v_1 - v_4}{l_4} & \frac{w_1 - w_4}{l_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_1 - u_3}{l_5} & \frac{v_1 - v_3}{l_5} & \frac{w_1 - w_3}{l_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{u_3 - u_1}{l_5} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix}
 2b_{v_3} & 2b_{w_3} & 2b_{u_4} & 2b_{v_4} & 2b_{w_4} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{v_3 - v_2}{l_2} & \frac{w_3 - w_2}{l_2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{v_3 - v_4}{l_3} & \frac{w_3 - w_4}{l_3} & \frac{u_4 - u_3}{l_3} & \frac{v_4 - v_3}{l_3} & \frac{w_4 - w_3}{l_3} \\
 0 & 0 & \frac{u_4 - u_1}{l_4} & \frac{v_4 - v_1}{l_4} & \frac{w_4 - w_1}{l_4} \\
 \frac{v_3 - v_1}{l_5} & \frac{w_3 - w_1}{l_5} & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (16)$$

对于平面五边形铰接板单元, 同样增加 2 条对角线将单元划分成 3 个三角形单元。然后根据式(14), 在 3 个三角形单元间可建立 2 个共面协调方程。进一步引入 7 个边长协调方程, 便可形成平面五边形板单元的协调方程。可以看出, 其协调矩阵  $\mathbf{B}_L^e$  和  $\mathbf{B}_{N1}^e$  是  $(9 \times 15)$  的矩阵。依次类推, 理论上不难得到任意多边形板单元的协调方程。

### 3 运动路径跟踪策略

一个由平面多边形板单元构成的铰接板机构, 令节点总数为  $n$ , 支座约束数为  $c$ , 所有单元协调矩阵行数(如三角形、四边形单元分别为 3 和 6)之和为  $b$ 。按照上述方法建立各板单元的 1 阶、2 阶协调矩阵和协调方程式(10), 然后根据单元间的节点连接关系进行组集并引入边界条件, 可得到机构运动的整体协调方程:

$$\mathbf{B}_L \mathbf{d} + \mathbf{B}_{N1} \mathbf{d} / 2 = 0 \quad (17)$$

注意式(17)中  $\mathbf{B}_{N1}$  含有  $\mathbf{d}$  的 1 次项, 后面也将其记为  $\mathbf{B}_{N1}(\mathbf{d})$ 。可见, 该协调方程是关于位移  $\mathbf{d}$  的非线性方程, 直接求解存在一定的困难。

文献[8]已针对杆系机构的协调方程给出了数值迭代的求解策略, 该策略同样适用于式(17)的求解。其基本思路是先对 1 阶协调矩阵  $\mathbf{B}_L$  进行奇异值分解, 可得:

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_r | \mathbf{V}_s\} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r | \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_b\}$  为  $b \times b$  的正交矩阵;  $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_r | \mathbf{U}_m\} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r | \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{3n-c}\}$  为  $(3n-c) \times (3n-c)$  的正交矩阵;  $\mathbf{S}$  为扩展对角矩阵, 其非零对角元素构成的对角矩阵为  $\mathbf{S}_r$ 。 $r$  为  $\mathbf{B}_L$  的秩,  $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{3n-c}$  称为系统的机构位移模态, 其数量一般定义为  $m = 3n - c - r$ 。

实际上,  $\mathbf{U}$  的子向量  $\mathbf{u}_i (i=1, \dots, 3n-c)$  构成了一个完整的  $3n-c$  维欧几里得空间, 因此作为一个  $(3n-c \times 1)$  的向量, 位移  $\mathbf{d}$  总是可以表示为:

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r + \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m \quad (19)$$

将式(19)代入式(17), 并考虑  $\mathbf{B}_L \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m = 0$  和  $\mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m) \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r$ , 可得:

$$\mathbf{B}_L \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r = -(\mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r) \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r / 2 + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m / 2) \quad (20)$$

定义:

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r) \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r / 2 + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m / 2 \quad (21)$$

则式(20)可以写成:

$$\mathbf{B}_L \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r = -\mathbf{E} \quad (22)$$

进一步将  $\mathbf{B}_L$  以奇异值分解后的矩阵形式展开, 即将式(18)代入式(22), 可得:

$$\boldsymbol{\beta}_r = -(\mathbf{S}_r)^{-1} (\mathbf{V}_r)^T \mathbf{E} \quad (23)$$

可根据式(23)对  $\boldsymbol{\beta}_r$  进行求解, 但应注意到式中右边项也包含  $\boldsymbol{\beta}_r$  的 1 次、2 次项, 所以该式实际上是关于  $\boldsymbol{\beta}_r$  的非线性方程, 可采取数值迭代求解。具体计算过程为:

1) 给出 1 个合理的  $\boldsymbol{\beta}_m$  作为步长控制量。令  $\boldsymbol{\beta}_r^{(1)} = 0$ , 则机构仅产生位移  $\mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m$ ;

2) 由式(21)得到:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(1)}) \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(1)} / 2 + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(1)}) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m / 2;$$

3) 根据式(23)得到  $\boldsymbol{\beta}_r^{(2)} = -(\mathbf{S}_r)^{-1} (\mathbf{V}_r)^T \mathbf{E}^{(1)}$ ;

4) 将  $\boldsymbol{\beta}_r^{(2)}$  代入式(21)得到:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(2)}) \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(2)} / 2 + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(2)}) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m + \mathbf{B}_{N1}(\mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m) \mathbf{U}_m \boldsymbol{\beta}_m / 2;$$

5) 检验, 若  $|\mathbf{B}_L \mathbf{U}_r \boldsymbol{\beta}_r^{(2)} + \mathbf{E}^{(2)}| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为收敛容差), 则  $\boldsymbol{\beta}_r^{(2)}$  为式(17)的解。根据式(19), 令机构产

生位移  $d = U_r \beta_r^{(2)} + U_m \beta_m$ , 得到下一协调构型的节点坐标;

6) 若  $|B_L U_r \beta_r^{(2)} + E^{(2)}| > \varepsilon$ , 则用  $\beta_r^{(2)}$  代替  $\beta_r^{(1)}$ , 返回步骤(2)计算。

### 4 算例

#### 4.1 攀达穹顶

一个由9块平面四边形铰接板单元构成的简化攀达穹顶, 其节点编号、单元编号以及主要平面尺寸见图3。节点 13~节点 16 为固定于地面( $z=0$ )的铰接支座。初始状态下, 机构沿  $x$  轴及  $y$  轴对称, 主要节点坐标见表 1。采用本文方法跟踪该机构在驱动节点 1 情况下的运动形态。

建立初始构型下的 1 阶协调矩阵, 对其进行奇异值分解, 可得机构位移模态数  $m=1$ 。以节点 1 的  $z$  向机构位移作为驱动量, 并令每一步提升时  $w_{m1} \times \beta_m = 0.4m$  ( $w_{m1}$  为当前构型机构位移模态中对应节点 1 的  $z$  向自由度的位移分量)。采用第 3 节的计算策略进行机构运动路径的跟踪, 经过 94 步之后, 机构运动至设计态。图 4 为系统提升过程示意图, 部分节点坐标见表 1。

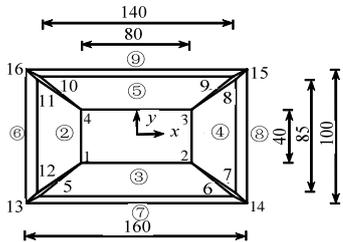


图 3 一顶升施工的攀达穹顶 /m  
Fig.3 An up-jacked Pantadome

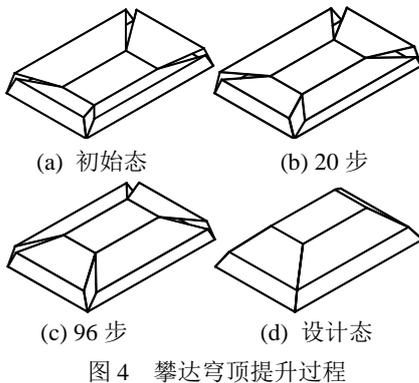


图 4 攀达穹顶提升过程  
Fig. 4 Up-jacked process of Pantadome

计算过程中, 令收敛容差  $\varepsilon = 10^{-10} m$  (非常严格), 一般通过 3 次~6 次迭代便可满足要求。对于每一步迭代求得的协调构型进行检查, 发现所有单元的各边(含对角线)伸长量误差控制在  $10^{-8} m$  量级, 共

面方程式(12)左端项的残差控制在  $10^{-11} m^3$  量级。说明采用本文方法求解的机构运动形状精度非常高。

表 1 攀达穹顶部分节点坐标 /m  
Table 1 Typical node coordinates of Pantadome

节点	坐标	初始态	35 步	70 步	设计态
1	$x_1$	-40.000	-40.000	-40.000	-40.000
	$y_1$	-20.000	-20.000	-20.000	-20.000
	$z_1$	1.748	15.714	29.740	40.000
2	$x_2$	40.000	40.000	40.000	40.000
	$y_2$	-20.000	-20.000	-20.000	-20.000
	$z_2$	1.748	15.714	29.740	40.000
4	$x_4$	-40.000	-40.000	-40.000	-40.000
	$y_4$	20.000	20.000	20.000	20.000
	$z_4$	1.748	15.714	29.740	40.000
5	$x_5$	-70.000	-70.000	-70.000	-70.000
	$y_5$	-50.093	-53.628	-51.020	-42.500
	$z_5$	16.770	16.373	16.739	15.000
6	$x_6$	70.000	70.000	70.000	70.000
	$y_6$	-50.093	-53.628	-51.020	-42.500
	$z_6$	16.770	16.373	16.739	15.000
11	$x_{11}$	-75.727	-78.984	-77.183	-70.000
	$y_{11}$	42.500	42.500	42.500	42.500
	$z_{11}$	17.514	17.999	17.806	15.000
12	$x_{12}$	-75.727	-78.984	-77.183	-70.000
	$y_{12}$	-42.500	-42.500	-42.500	-42.500
	$z_{12}$	17.514	17.999	17.806	15.000

#### 4.2 双坡网架

图 5 为 1 个由 2 块四边形板和 1 块三角形板构成的简化双坡网架, 采用顶推施工。节点 6 和节点 7 为固定于地面( $z=0$ )的铰接支座, 坐标分别为  $(0,0,0)$  和  $(0,60,0)$ , 并且约束节点 1~节点 3 的  $z$  向位移。初始构型下的节点坐标见表 2。

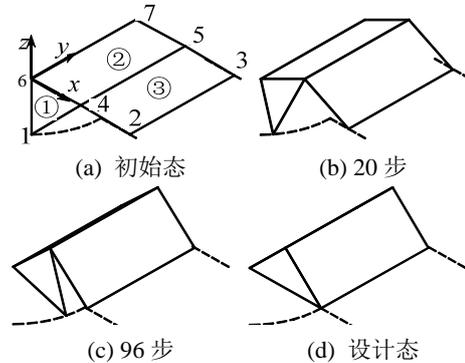


图 5 一顶推施工的双坡网架  
Fig. 5 An incrementally-launched gable space frame

建立初始构型下的 1 阶协调矩阵, 对其进行奇异值分解, 可得机构位移模态数  $m=1$ 。以节点 1 作为顶推点, 令每一步顶推时  $v_{m1} \times \beta_m = 0.2m$  ( $v_{m1}$  为当前构型机构位移模态中对应节点 1 的  $y$  向自由度的位移分量)。按第 3 节的计算策略进行机构运动路径的跟踪。经过 143 步之后, 机构运动至设计态。图 5 为系统顶推过程的示意图, 运动过程中所求得的节点坐标见表 2。同样对运动路径上的每个构型进行边长伸长量和共面条件的检查, 发现误差比攀达穹顶算例更小。

表 2 双坡网架部分节点坐标 /m

节点	坐标	初始态	10 步	20 步	设计态
1	$x_1$	28.293	31.623	38.883	40.000
	$y_1$	-28.275	-24.494	-9.389	0.000
	$z_1$	0.000	0.000	0.000	0.000
2	$x_2$	56.550	50.595	41.150	40.000
	$y_2$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$z_2$	0.000	0.000	0.000	0.000
3	$x_3$	56.550	50.595	41.150	40.000
	$y_3$	60.000	60.000	60.000	60.000
	$z_3$	0.000	0.000	0.000	0.000
4	$x_4$	28.275	25.298	20.575	20.000
	$y_4$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$z_4$	0.722	12.650	19.408	20.000
5	$x_5$	28.275	25.298	20.575	20.000
	$y_5$	60.000	60.000	60.000	60.000
	$z_5$	0.722	12.650	19.408	20.000

由于该双坡网架只有 1 个机构位移模态, 因此以节点 2 或节点 3 作为顶推点沿  $x$  负向运动, 利用本文方法同样能够求得与顶推节点 1 相同的运动路径, 且通过边长伸长量和共面条件的检查, 发现计算结果的精度依然非常高。

## 5 结论

(1) 针对平面多边形铰接板机构, 按照常规有限元方法来直接建立板单元的非线性协调矩阵将会非常复杂。本文根据三条边长变化为零建立了三角形板单元的简便协调方程, 并将四边形板单元划分为 2 个三角形板单元, 结合顶点共面条件得到了平面四边形板单元的协调矩阵。这类基于边长伸长量为零和顶点共面条件的简便协调方程形式简单,

便于编程, 能够实现空间铰接板机构运动路径的自动跟踪求解。

(2) 1 个顶升施工的 Pantadome 和 1 个顶推施工的双坡网架算例分析表明, 采用本文方法所求得的系统运动形态具有很高的精度, 且收敛速度快。说明该方法能有效地进行铰接板机构的运动分析。

## 参考文献:

- [1] Pellegrino S, Calladine C R. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks [J]. International Journal of Solids and Structures, 1982, 22: 409—428.
- [2] Pellegrino S. Analysis of prestressed mechanisms [J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, 26: 1329—1350.
- [3] 包红泽, 邓华. 铰接杆系机构稳定性条件分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2006, 40(1): 78—84.  
 Bao Hongze, Deng Hua. Analysis of stability conditions for pin-bar mechanisms [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2006, 40(1): 78—84. (in Chinese)
- [4] 袁行飞, 董石麟. 索穹顶结构施工控制反分析[J]. 建筑结构学报, 2001, 22(2): 75—79.  
 Yuan Xingfei, Dong Shilin. Inverse analysis of construction process of cable dome [J]. Journal of Building Structures, 2001, 22(2): 75—79. (in Chinese)
- [5] Kawaguchi M. Engineering aspects of space frames [C]// Current and emerging technologies of shell and spatial structures, In: Proceedings of the International Association of Space Structures Colloquium, Madrid, 1997: 51—62.
- [6] 沈金, 楼俊晖, 邓华. 杆系机构的可动性和运动分岔分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2009, 43(6): 1086—1089.  
 Shen Jin, Lou Junhui, Deng Hua. Movability and kinematic bifurcation analysis for pin-bar mechanisms [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2009, 43(6): 1086—1089. (in Chinese)
- [7] Kumar P, Pellegrino S. Computation of kinematic paths and bifurcation points [J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(46): 7003—7026.
- [8] 邓华, 楼俊晖, 徐静. 铰接杆系机构的运动路径及其极值点跟踪—一种几何学方法[J]. 工程力学, 2009, 26(10): 30—36.  
 Deng Hua, Lou Junhui, Xu Jing. Tracing kinematic paths and limit points of pin-bar mechanisms by a geometrical approach [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(10): 30—36. (in Chinese)
- [9] 徐静. 铰接杆系机构的运动形态研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2007.  
 Xu Jing. Studies on the kinematic morphology of pin-bar mechanisms [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007. (in Chinese)

- [10] 蒋本卫, 邓华, 伍晓顺. 平面连杆机构的提升形态及稳定性分析[J]. 土木工程学报, 2010, 43(1): 13—21.  
Jiang Benwei, Deng Hua, Wu Xiaoshun. Kinematic state and stability analysis for planar linkages during lifting erection [J]. China Civil Engineering Journal, 2010, 43(1): 13—21. (in Chinese)
- [11] Tarnai T, Szabo J. On the exact equation of extensional, kinematically indeterminate assemblies [J]. Computers and Structures, 2000, 75: 145—155.
- [12] 徐荣桥. 结构分析的有限元法与 MATLAB 程序设计 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2006: 87—90.  
Xu Rongqiao. Finite element method in structural analysis and MATLAB programming [M]. Beijing: China Communications Press, 2006: 87—90. (in Chinese)
- [13] 同济大学数学系. 高等数学(下册) [M]. 第六版. 北京: 高等教育出版社, 2007: 20—22.  
Department of Mathematics, Tongji University. Advanced Mathematics (Vol. 2) [M]. 6th ed. Beijing: Higher Education Press, 2007: 20—22. (in Chinese)

---

(上接第 125 页)

- [8] 李华, 黄本才. 结构内部爆炸空洞效应对超压影响的数值模拟[J]. 工业建筑, 2012, 42(2): 48—53.  
Li Hua, Huang Bencai. The numerical simulation of influence of an internal blast cavity effect on overpressure for a structure [J]. Industrial Construction, 2012, 42(2): 48—53. (in Chinese)
- [9] 成凤生. 密闭空间内爆炸冲击波压力测试及内壁超压分布研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2011.  
Cheng Fengsheng. Overpressure test and distribution analyze of confined blast loading [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2011. (in Chinese)
- [10] Chapman T C, Rose T A, Smith P D. Blast wave simulation using AUTODYN2D: A parametric study [J]. International Journal of Impact Engineering, 1995, 16(5/6): 777—787.
- [11] Adam Zyskowski, Isabelle Sochet, Guy Mavrot, et al. Study of the explosion process in a small scale experiment-structural loading [J]. Journal of Loss Prevention in the Process Industries, 2004, 17(4): 291—299.
- [12] Feldgun V R, Karinski Y S, Yankelevsky D Z. A simplified model with lumped parameters for explosion venting simulation [J]. International Journal of Impact Engineering, 2011, 38(12): 964—975.
- [13] Feldgun V R, Karinski Y S, Edri I, et al. On blast pressure analysis due to a partially confined explosion: II. Numerical studies [J]. International Journal of Protective Structure, 2012, 3(1): 61—79.