文章编号：1000-4750(2015)06-0028-05

集中载荷下四边固支正交各向异性矩形板的线性弯曲问题

肖闪闪，陈普会

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室，南京 210016)

摘 要：采用载荷叠加法将集中载荷下四边固支正交各向异性矩形板线性弯曲的挠度分为 3 个部分：集中载荷下四边简支板的挠度、上下边简支左右边受弯矩的板的挠度、左右边简支上下边受弯矩的板的挠度，3 个挠度之和在满足固支边界条件的情况下即为所要求的挠度的解。采用 MATLAB 软件编写程序进行计算，并将相同长宽的板在 4 种不同的厚度和载荷情况下的挠度计算结果与有限元分析结果进行比较，验证了解析解的正确性。最后讨论了经典的 Kirchhoff 薄板假设对于集中载荷的适用性问题。

关键词：载荷叠加法；集中载荷；四边固支矩形板；正交各向异性；挠度

中图分类号：V250.1 **文献标志码**：A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.12.1178

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR BENDING OF CLAMPED ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATES UNDER A CONCENTRATED FORCE

XIAO Shan-shan , CHEN Pu-hui

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: For a clamped orthotropic rectangular plate, the bending deflection due to a concentrated force can be treated as the superposition of deflections of simply supported plate under three load cases, a concentrated force, moments along two opposite edges and moments along the other two opposite edges. The solution satisfies the boundary conditions of the clamped plate. Matlab program is developed for calculating the deflections of four plates with different thickness and concentrated force positions. The analytical solutions are compared with Finite Element Method results, demonstrating the accuracy of the proposed solution. Finally, the reasonability of Kirchhoff plate assumptions is discussed through the case of clamped plate under a concentrated force.

Key words: method of superposition; concentrated force; clamped rectangular plate; orthotropic; deflection

复合材料结构在服役过程中受到来自各种冲击源的低速冲击，在冲击损伤预测时，各向异性板的弯曲问题的求解是其中一个重要的基础工作。在冲击过程中，冲击源与层合板间存在一定的接触区域，在这个接触区域内，接触力呈椭球形分布。但由于与整个层合板相比，接触区域面积很小，因此在估算结构挠度时，可忽略该接触区域，将冲击力简化为作用在层合板中心上的集中载荷。

经典层合板理论采用了 Kirchhoff 假设求解薄板弯曲问题，忽略了层间剪应力和横向剪切的影响。这个假设适用于板的厚度与其长度和宽度相比小于 1/20 的板。针对薄板线性弯曲问题，许多学者先后采用了不同的方法进行研究。Timoshenko 和 Woinowsky-Krieger[1]和 Lekhnitskii [2]分别给出了不同形状的各向同性板和各向异性板在不同边界条件和不同载荷情况下的弯曲问题的求解方法。文

收稿日期：2013-12-18；修改日期：2014-06-18

基金项目：国家自然科学基金项目(A020305)

通讯作者：陈普会(1964－)，男，江苏人，教授，博士，博导，主要从事复合材料飞机结构设计(E-mail: phchen@nuaa.edu.cn).

作者简介：肖闪闪(1985－)，女，湖北人，博士生，主要从事复合材料飞机结构损伤容限研究(E-mail: xiaoshanshan721@126.com).

献[3－4]分别采用 Galerkin 法求解了均布载荷下四边固支和三边夹紧一边铰支的正交各向异性矩形板的弯曲问题。Mbakogu、Pavlović[3]和 Green[5]采用双傅里叶级数，进行简单的代数计算给出了各向同性矩形板在简支边界条件下的弯曲问题的解。Dickinson[6]和 Whitney[7]采用同样的方法给出了各向异性板弯曲问题的解。但是，这种方法要采用分部积分技术求解无限方程组，这些方程组中包含对级数的逐项微分，而且傅里叶级数在边界受弯矩或剪力载荷情况下的收敛性不高。

Timoshenko 基于 Levy 解叠加的方法求解了简支和固支混合边界条件下的板的弯曲问题，即假设简支板承受均匀载荷或集中载荷以及不同的边缘弯矩。Hencky[8]和 Galerkin[9]基于载荷叠加法，分别采用不同的三角函数给出了四边固支的各向同性矩形板在均匀载荷和中心受集中载荷情况下的弯曲问题的解。Bhaskar 和 Kaushik[10]基于虚功原理，采用载荷叠加法给出了固支和简支混合边界条件、承受均布载荷的情况下，矩形正交各向异性层合板弯曲问题的双正弦级数近似解。之后，他们又采用载荷叠加法给出了四边固支、承受均布载荷或集中载荷的反对称铺层矩形层合板弯曲问题的双傅里叶级数解[11]。载荷叠加法的主要优点是将复杂的问题进行简化，可以得到更好的收敛性。

从公开发表的文献来看，有关在集中载荷下四边固支正交各向异性矩形板的线性弯曲问题的解答还未见有报导。本文采用载荷叠加法给出了四边固支的正交各向异性矩形板在集中载荷下的线性挠度的近似解。该解主要包括 3 个方面，即四边简支受集中载荷矩形板的挠度、左右边简支上下边受相同弯矩的板的挠度以及上下边简支左右边受相同弯矩的板的挠度。在满足四边固支边界条件的情况下，3 个挠度的和即为所要求的解答。采用 MATLAB 软件编写程序对板的挠度进行计算，并将估算结果与有限元结果进行比较，验证了解析结果的收敛性和正确性，并分析了经典的 Kirchhoff 薄板假设在集中载荷情况下的适用范围。

1　载荷叠加法求解

1.1　求解方法

取 x 轴、y 轴平行于板的主方向，正交各向异性板的挠曲面微分方程为[2,12]：

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q \quad (1)$$

其中：$w(x,y)$表示矩形板的挠度；$q(x,y)$表示板所受的横向载荷。

长为 a、宽为 b 的四边简支各向异性矩形板的边界条件 $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 如下：

$$\begin{cases}\text{在}x=0,\ x=a\text{处},\ w=w_{,xx}=0\\ \text{在}y=0,\ y=b\text{处},\ w=w_{,yy}=0\end{cases} \quad (2)$$

Lekhnitskii[2]给出了简支边界条件下正交各向异性矩形板承受均布载荷的弯曲问题的解。给定满足边界条件的双正弦级数解：

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

$$q=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

根据式(4)可得：

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (5)$$

将式(3)、式(4)和式(5)代入式(1)解得：

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{\pi^4 D_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

其中，$D_{mn}=D_{11}(m/a)^4+2(D_{12}+2D_{66})(m/a)^2(n/b)^2+D_{22}(n/b)^4$。

若矩形板在中心处受到一定区域内的法向载荷作用，如图 1 所示。

则有：

$$a_{mn}=\frac{4q}{abuv}\int_{\frac{a}{2}-\frac{u}{2}}^{\frac{a}{2}+\frac{u}{2}}\int_{\frac{b}{2}-\frac{v}{2}}^{\frac{b}{2}+\frac{v}{2}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{16q}{\pi^2 mnuv}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{m\pi u}{2a}\sin\frac{n\pi v}{2b} \quad (7)$$

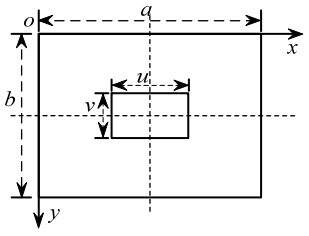

图 1　矩形板受到(u,v)内的均匀法向载荷作用

Fig.1　Rectangular plate under uniform normal load in region (u,v)

若矩形板受到的是集中载荷的作用，即 $u\to 0$，$v\to 0$，则：

$$a_{mn}=\frac{4P}{ab}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{8}$$

其中，P 表示集中载荷。

将式(8)代入式(6)可得四边简支的正交各向异性板中心处受集中载荷作用下的挠度为：

$$w=\frac{4P}{\pi^4 ab}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}\frac{1}{D_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{9}$$

将坐标系的原点平移到板的中心位置，则式(9)变为：

$$w_1=\frac{4P}{\pi^4 ab}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{D_{mn}}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{10}$$

采用如图 2 所示的载荷叠加法给出了四边固支各向同性板在横向载荷作用下的解答。对于正交各向异性板仍采用类似的求解思路，即将在集中载荷作用下的四边固支正交各向异性板的弯曲问题看做是四边简支受集中载荷作用、上下边受弯矩作用以及左右边受弯矩作用的叠加。图 3 给出了其中一种载荷情况，即沿着边界 $y=\pm b/2$ 承受弯矩 M_1。叠加后的挠度要求满足下列边界条件：

$$\begin{cases}\text{在}x=0,\ x=a\text{处},\ w=w_{,x}=0\\ \text{在}y=0,\ y=b\text{处},\ w=w_{,y}=0\end{cases} \tag{11}$$

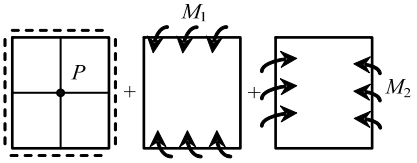

图 2 载荷叠加法

Fig.2 Superposition of different load cases

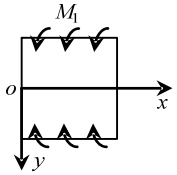

图 3 上下边界受弯矩作用

Fig.3 Moments along the top and bottom edges

根据图 3 的受力情况，挠度 w 应满足方程：

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0 \tag{12}$$

以及下列边界条件：

$$\begin{cases}\text{在}x=0,\ x=a\text{处},\ w=w_{,xx}=0\\ \text{在}y=\pm b/2\text{处},\ w=0\end{cases} \tag{13}$$

构造满足边界条件的级数解：

$$w_2=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}Y_m\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{14}$$

将式(14)代入式(12)，有：

$$D_{22}\frac{\partial^4 Y_m}{\partial y^4}-2(D_{12}+2D_{66})\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\frac{\partial^2 Y_m}{\partial y^2}+D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m=0 \tag{15}$$

函数 Y_m 的形式依赖于下列特征方程的根：

$$D_{22}s^4-2(D_{12}+2D_{66})s^2+D_{11}=0 \tag{16}$$

根据板的刚度之间的比例，式(16)的根有 3 种不同的情况，没有必要对这 3 种情况进行详细分析，只需要讨论不等实数根的情况，即式(16)的根为如下形式：

$$\pm s_1,\pm s_2,\ s_1>0,s_2>0 \tag{17}$$

则有：

$$Y_m=A_m\cosh\frac{m\pi s_1 y}{a}+B_m\sinh\frac{m\pi s_1 y}{a}+C_m\cosh\frac{m\pi s_2 y}{a}+D_m\sinh\frac{m\pi s_2 y}{a} \tag{18}$$

根据对称性，有 $B_m=0$，$D_m=0$，且：

$$A_m\cosh\frac{m\pi b s_1}{2a}+C_m\cosh\frac{m\pi b s_2}{2a}=0 \tag{19}$$

令 $\alpha_{1m}=m\pi b s_1/2a$，$\alpha_{2m}=m\pi b s_2/2a$，可得 $C_m=-A_m\dfrac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}$。代入式(18)得：

$$Y_m=A_m\left(\cosh\frac{m\pi s_1 y}{a}-\frac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}\cosh\frac{m\pi s_2 y}{a}\right) \tag{20}$$

将式(20)代入式(14)，并将坐标原点平移到板的中心，得：

$$w_2=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}A_m\cdot\left(\cosh\frac{m\pi s_1 y}{a}-\frac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}\cosh\frac{m\pi s_2 y}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{21}$$

采用同样的方法分析沿着边界 $x=\pm a/2$ 的弯矩 M_2 的载荷情况，得：

$$w_3=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}B_m\cdot\left(\cosh\frac{m\pi s_3 x}{b}-\frac{\cosh\alpha_{3m}}{\cosh\alpha_{4m}}\cosh\frac{m\pi s_4 x}{b}\right)\cos\frac{m\pi y}{b} \tag{22}$$

其中：$\alpha_{3m}=m\pi a s_3/2b$；$\alpha_{4m}=m\pi a s_4/2b$；$s_3$ 和 s_4 是特征方程 $D_{11}s^4-2(D_{12}+D_{66})s^2+D_{22}=0$ 的正

实数根。

根据边界条件式(11)有：

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=\pm\frac{a}{2}}=0 \tag{23}$$

由式(10)、式(21)和式(22)可得：

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{2}}=\frac{4P}{\pi^4 ab}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{D_{mn}}\cdot \frac{m\pi}{a}\left(-\sin\frac{m\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{24a}$$

$$\left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{2}}=-\sum_{m=1,3,5}^{\infty}A_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cdot\left(\cosh\frac{m\pi s_1 y}{a}-\frac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}\cosh\frac{m\pi s_2 y}{a}\right) \tag{24b}$$

$$\left.\frac{\partial w_3}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{2}}=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}B_m\left(\frac{m\pi s_3}{b}\sinh\frac{m\pi s_3 x}{b}-\frac{\cosh\alpha_{3m}}{\cosh\alpha_{4m}}\frac{m\pi s_4}{b}\sinh\frac{m\pi s_4 x}{b}\right)\cos\frac{m\pi y}{b} \tag{24c}$$

在式(24b)中，令：

$$f(y)=\cosh\frac{m\pi s_1 y}{a}-\frac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}\cosh\frac{m\pi s_2 y}{a} \tag{25}$$

函数 $f(y)$可由下列的级数表示：

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos\frac{k\pi y}{b} \tag{26}$$

将式(25)和式(26)代入式(24b)得：

$$\left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{2}}=-\sum_{m=1,3,5}^{\infty}A_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos\frac{k\pi y}{b} \tag{27}$$

根据式(25)和式(26)得：

$$C_k=\frac{2}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\left(\cosh\frac{m\pi s_1 y}{a}-\frac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}\cosh\frac{m\pi s_2 y}{a}\right)\cdot\cos\frac{k\pi y}{b}\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 s_1^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 s_2^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2}\right)\cdot\frac{k}{b^2\pi}4\sin\frac{k\pi}{2}\cosh\alpha_{1m} \tag{28}$$

将式(21)、式(25)、式(27)和式(28)代入式(15)得：

$$\frac{4P}{\pi^3 a^2 b}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{m}{D_{mk}}\sin\frac{m\pi}{2}+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}m\cdot\cosh\alpha_{1m}A_m\left(\frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 s_1^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 s_2^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}B_k\left(\frac{k\pi s_3}{b}\sinh\alpha_{3k}-\frac{\cosh\alpha_{3k}}{\cosh\alpha_{4k}}\frac{k\pi s_4}{b}\sinh\alpha_{4k}\right)+\left(\frac{4k}{ab^2}\right)\sin\frac{k\pi}{2} \tag{29}$$

根据边界条件式(13)，同理可得：

$$\frac{4P}{\pi^3 ab^2}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{m}{D_{km}}\sin\frac{m\pi}{2}+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}m\cdot\cosh\alpha_{3m}B_m\left(\frac{1}{\left(\frac{m}{b}\right)^2 s_3^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{m}{b}\right)^2 s_4^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}A_k\left(\frac{k\pi s_1}{a}\sinh\alpha_{1k}-\frac{\cosh\alpha_{1k}}{\cosh\alpha_{2k}}\frac{k\pi s_2}{a}\sinh\alpha_{2k}\right)+\left(\frac{4k}{a^2 b}\right)\sin\frac{k\pi}{2} \tag{30}$$

联立方程式(29)和式(30)求解得 A_m 和 B_m 的值，则受集中载荷的四边固支正交各向异性板中心位置的挠度为：

$$w_{\max}=(w_1+w_2+w_3)\big|_{(0,0)}=\frac{4P}{\pi^4 ab}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{D_{mn}}+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}A_m\left(1-\frac{\cosh\alpha_{1m}}{\cosh\alpha_{2m}}\right)+\sum_{m=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}B_m\left(1-\frac{\cosh\alpha_{3m}}{\cosh\alpha_{4m}}\right) \tag{31}$$

根据上述方法，通过改变 w_1 中集中载荷的作用位置，可求得任意位置集中载荷下板的挠度。在四边简支的基础上，通过在边界上施加弯矩的方法，可求得混合边界条件下板的弯曲问题的解答。

1.2　与有限元结果的比较

材料体系选用 IMS/X850，单层板的材料性能见表 1，单层名义厚度为 0.19mm。板的尺寸为 125mm×75mm。

采用 MATLAB 软件编写程序估算挠度，根据式(31)，随着 m 和 n 的增加，挠度的求解结果逐渐趋于稳定。在取前 2 项的情况下，w_1 的值与最终收

敛值相差约 10%，w_2 和 w_3 的值与收敛值基本相同。为了保证结果的准确性，对 w_1 的值取前 10 项，w_2 和 w_3 的值取前 2 项。

表 1 IMS/X850 单层板材料性能

Table 1 Material properties of IMS/X850 unidirectional laminate

E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	ν_{12}
195	8.6	4.57	0.331

采用商用有限元软件 ABAQUS 进行建模分析，对层合板采用壳单元，板的四边采用固支边界条件，考虑到集中载荷的影响，将其均匀地施加在板中心附近的区域内。由于在有限元软件中，壳单元会考虑到厚度对结构的影响，因此不需要针对不同厚度的板采用不同的建模方法。

如表 2 所示，将载荷叠加法在 4 种不同的铺层和载荷情况下所得到的板的挠度与有限元计算结果进行比较。

表 2 解析解与有限元结果的比较

Table 2 Comparison of analytical solutions with FEM results

铺层	厚度/mm	b/h	集中载荷/N	解析解/mm	有限元/mm
$[0]_s$	0.38	197.4	0.1	0.031	0.031
$[0/90]_s$	0.76	98.7	5	0.122	0.124
$[45/-45/0]_s$	1.14	65.8	50	0.222	0.252
$[45/90/-45/0]_s$	1.52	49.3	100	0.156	0.192

基于 Kirchhoff 假设建立的薄板近似理论一般适用于板的平面尺寸与厚度比大于 20 的情况，但是对于集中载荷情况，其适用范围小了很多。如表 2 所示，在几何尺寸相同的情况下，若板的短边与厚度之比大于 100 的时候，解析解与有限元的解吻合得很好，两者的误差小于 2%。随着厚度的增加，解析解与有限元的计算结果相差越来越大，它们的比达到 65.8 的时候，解析解与有限元的解相差 12%，比为 49.3 的情况下，挠度的误差已经达到了 18.2%，这种情况下薄板理论已经不再适用。因此，在集中载荷情况下，薄板近似仅适用于板的宽度与厚度比大于 50 的情况。

2 结论

(1) 采用载荷叠加法，得到了集中载荷作用下四边固支正交各向异性矩形板挠度的解析解。在求解时，该问题可视为四边简支条件下受集中载荷、上下边受弯矩、左右边受弯矩共 3 种载荷的叠加。

(2) 对 4 种铺层层合板的挠度进行了估算，并与有限元分析结果进行了比较。结果表明：对于很薄的板，两者吻合良好。此外，研究还表明：在集中载荷作用下，对于板的平面尺寸与厚度比的限制要比经典的薄板假设更为严格。

参考文献：

[1] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959: 105－225.

[2] Lekhnitskii S G. Anisotropic plates [M]. 2nd ed. New York: Gordon and Breach, 1968: 241－345.

[3] Mbakogu F C, Pavlović M N. Bending of clamped orthotropic rectangular plates: A variational symbolic solution [J]. Computers & Structures, 2000, 77(2): 117－128.

[4] 杨加明, 孙良新, 雷呈凤. 三边夹紧一边铰支正交各向异性矩形薄板的几何非线性分析[J]. 工程力学, 2002, 19(3): 39－43.
Yang Jiaming, Sun Liangxin, Lei Chengfeng. Geometrically nonlinear analysis of orthotropic rectangular thin plates with three edges clamped and one edge simply supported [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(3): 39－43. (in Chinese)

[5] Green A E. Double Fourier series and boundary value problems [C]// Dunajski M, Kryński W. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge: Cambridge University Press, 1944, 40(3): 222－228.

[6] Dickinson S M. The flexural vibration of rectangular orthotropic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1969, 36(1): 101－106.

[7] Whitney J M. Fourier analysis of clamped anisotropic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1971, 38: 530－532.

[8] Hencky H. Über ein einfaches näherungsverfahren zur bestimmung des spannungszustandes in rechteckig begrenzten scheiben, auf deren umfang nur normalspannungen wirken [M]// Von Karman T. Beiträge Zur Technischen Mechanik und Technischen Physik. Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 1924: 62－73.

[9] Galerkin B G. Rectangular plates supported by edges [M]. Moscow: Collected Papers, 1953: 3－42.

[10] Bhaskar K, Kaushik B. Simple and exact series solutions for flexure of orthotropic rectangular plates with any combination of clamped and simply supported edges [J]. Composite Structures, 2004, 63(1): 63－68.

[11] Bhaskar K, Kaushik B. Analysis of clamped unsymmetric cross-ply rectangular plates by superposition of simple exact double Fourier series solutions [J]. Composite Structures, 2005, 68(3): 303－307.

[12] Baraigi N K. A text book of plate analysis [M]. Delhi: Khanna Publishers, 1986: 2－6.