

文章编号: 1000-4750(2015)11-0040-11

谱元法与透射边界的配合使用及其稳定性研究

戴志军¹, 李小军¹, 侯春林²

(1. 中国地震局地球物理研究所, 北京 100080; 2. 环境保护部核与辐射安全中心, 北京 100082)

摘 要: 在无限域波动模拟中引入透射边界条件时, 目前多将边界上的透射公式与内域的有限元法结合使用, 其计算精度由有限元方法决定, 而谱元法因结合有限元和频谱法的优势则比有限元空间域积分具有更高的计算精度。该文基于谱元法非等距网格划分特性, 研究了内域的谱元法与边界上的透射公式结合的理论方法, 给出了相应的透射公式使用方法, 并基于建立的谱元法波动数值模型探讨了透射公式的稳定性问题。研究表明: 空间域插值系数需控制在一个合理范围内, 空间域插值方法相对于时间域插值方法更为稳定, 高频失稳出现可能性相对较小; Gamma 算子的使用可提高模拟的精度, 采用 Gamma 算子后对于高阶透射公式仍可出现低频漂移现象, 可结合降阶消漂的方式实现稳定精度高的透射边界应用。

关键词: 谱元法; 有限元法; 透射公式; 透射边界; 数值稳定性

中图分类号: P315.9 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.03.0196

A COMBINATION USAGE OF TRANSMITTING FORMULA AND SPECTRAL ELEMENT METHOD AND THE STUDY OF ITS STABILITY

DAI Zhi-jun¹, LI Xiao-jun¹, HOU Chun-lin²

(1. Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China;

2. Nuclear and Radiation Safety Centre, Ministry of Environmental Protection of the People's Republic of China, Beijing 100082, China)

Abstract: For the simulation of the problem on infinite domain, finite element method (FEM) is usually combined with transmitting formulas, and the precision of the simulation is mainly determined by the FEM methods. Spectral element method (SEM) takes advantages of both spectral method and FEM, and achieves higher precision for integration in space domain compared with FEM. This paper investigates the application of transmitting formulas in details when the interior domain uses the method of SEM. In this paper, we illustrate the use of SEM with transmitting formulas firstly. Meanwhile, the stability problem of transmitting formula is discussed in depth. The high frequency instability occurs more frequently for the interpolation in the time domain than in the space domain, and the interpolation coefficient in space domain should be in an appropriate range. Recognizing that the gamma operator is an effective measure to enhance the precision of simulation, we give a concrete method to set the value of gamma. Higher-order transmitting formulas with gamma operator may result in low-frequency drift. The paper points out that using order-reduction method is effective to get stable transmitting boundary conditions with high precision.

Key words: spectral element; finite element; transmission formula; transmitting boundary condition; numerical stability

收稿日期: 2014-03-17; 修改日期: 2014-12-19

基金项目: 973 计划项目(2011CB013601); 国家自然科学基金项目(91215301, 61203276, 61472373); 中国地震局地球物理研究所基本科研项目(DQJB12B12); 北京市属高等学校创新团队建设提升计划项目(IDHT20130507)

通讯作者: 李小军(1965—), 男, 湖南临湘人, 研究员, 博士, 博导, 主要从事结构工程与防灾减灾工程(E-mail: beerli@vip.sina.com).

作者简介: 戴志军(1981—), 男, 湖南慈利人, 副研究员, 博士, 主要从事地震工程研究(E-mail: dzj@cea-igp.ac.cn);

侯春林(1981—), 女, 河南郸城人, 高工, 博士, 主要从事核电结构工程研究(E-mail: hou_chunlin@163.com).

对波动数值模拟问题,所感兴趣的区域只是波传播的一小块区域,即进行数值模拟时仅在有限区域中进行,但是波的传播路径又包括感兴趣区域之外的无限域。为此,通常做法是对所感兴趣的有限域进行网格剖分,网格的边界点设置边界条件来表示波在边界上及边界外的传播,这就要求无限域所截断处的边界点所设置的边界条件能使得波从内点传播到边界点的波动能透射出去,以模拟波在原无限域条件下的传播特性。目前,能满足这种特性的人工边界条件有多种,最常见的有吸收(Absorbing)、透射(Transmitting)、无反射(Nonreflecting)等。

无限域转化为有限域进行数值模拟问题涉及到两方面:一是内域的数值计算方法,二是人工边界条件的施加。对于内域计算,比较常见的是有限差分、交错网格差分^[1]、频谱法、有限元、谱元法等。其中有限元是最为广泛应用的一种方法;谱元法(Spectral Element Method, SEM)是基于弹性力学方程弱形式基础上在有限单元上进行谱展开,结合了有限元和频谱法的优势,比有限元在空间域积分具有更高的精度,其形式相当于高阶有限元^[2]。关于人工边界条件的研究,其概念最初由 Alterman 和 Karal^[3]提出,早期的研究着重于建立精确的全局边界条件。由于全局边界条件运算量巨大,随之又发展了局部边界条件以及完美匹配层等。文献[4-5]对相关研究进行了比较详实的综述,本文就这方面比较有影响的工作进行简要介绍。

黏性边界条件由 Lysmer 和 Kuhlemeyer^[6]提出。这也是最早发展起来的一种局部边界条件。这种方法通过在边界点施加阻尼器来模拟边界点外的无限域对边界点的影响,其思想简单而直观。对一维杆的波动,已知波速的情况下施加合适的阻尼大小产生的力可精确等于边界点外的无限域对边界点的力。这种方法具有一阶精度。

黏性边界条件通过阻尼器来施加,由于没有恢复力,这样实际数值运算过程中很可能出现漂移现象。基于此 Deeks 和 Randolph^[7]提出了额外施加弹簧来解决这个漂移现象,这就是著名的黏弹性边界,提出的时候解决了轴对称的二维人工边界问题。国内,刘晶波等^[8]进一步推导出了三维问题的黏弹性边界,使得黏弹性边界得到极为广泛的应用。黏弹性边界施加的是物理元件,这样极易和大型有限元软件配合使用,且计算结果稳定,但不足之处在于其精度还是一阶的。

为提高其边界条件的精度,文献[9]用单侧波动方程来模拟边界点的运动,进一步发展为旁轴近似^[10]。这种方法的特点是在外行波接近于垂直入射到边界时的精度比较高,但在大角度入射时精度较差。

随后国内廖振鹏对一阶透射的边界条件进行研究时发现一阶透射的误差也是以波动形式传播,从而提出了多阶透射公式,这一透射公式成为 20 世纪 80 年代~90 年代最为广泛使用的人工边界条件,除了在地震波动中应用广泛外,在电磁波的模拟中也得到了广泛的应用。多阶透射公式经过近 30 年的发展,理论以趋于成熟,但目前边界条件的稳定性问题还没有得到圆满解决。边界条件的稳定性主要有两种:低频漂移和高频振荡失稳,为了解决这两种失稳,20 年来进行了大量的尝试,提出了很多行之有效的消除失稳的办法^[11],如采用对边界区进行平滑的方法可消除某些高频失稳,边界阻尼层,带能耗的积分格式^[12]。对于低频漂移^[13-14],消除漂移的方法主要有降阶消飘^[14];另外 γ 算子^[15]对零频波动的抑制有较好的效果。但是这些解决方法的有效性只是在一些算例上进行了验证,缺乏完善的理论分析和稳定性判据。同时 Higdon 在这方面的研究也发现稳定性问题很难解决^[16-18]。

在透射边界不断发展的同时,文献[19]从能量吸收的角度提出了完美匹配层(Perfectly Matched Layer, PML)。这种方法通过构造吸收匹配层的方法使得进入层之后的波动指数衰减掉,构造的匹配层从复分析角度解释相当于波动过程在复数坐标下的解析延续^[20]。由于其数学上理论的完备,成为最近国际上的研究热点。这种方法在连续域理论上是无反射的,但是计算机离散化实现时由于离散误差仍然会造成反射。这个方法和边界阻尼层吸收高频波动的方法很类似,所不同的是完美匹配层可吸收各个频段的能量。完美匹配层最早主要用于电磁波的仿真模拟^[21],随后在地震波动模拟当中得到了广泛应用和发展^[22-23]。这种边界的使用仍然受稳定性问题的困扰,没能圆满解决。其形式为一阶偏微分方程组的形式,较多采用的方式为速度应力的形式。对于位移的二阶偏微分方程,卷积式完美匹配层(Convolutional PML, CPML)由频率转换到时域的形式极为复杂,因而这种方式也很少在实际应用中使用。而谱元法为二阶偏微分方程的形式,因而在完美匹配层与谱元法配合使用时需要分别独立求

解两种不同离散形式的方程,其实现方式及其对方法的分析比较困难。另外,在外源输入情形下,PML与内域接触的面处理起来非常复杂。因而PML和解析型边界条件比起来并不占优势。

目前透射公式的理论方法多在有限元法时使用,而谱元法因结合有限元和频谱法的优势则比有限元空间域积分具有更高的精度。为此,基于谱元法的基本原理和特点,研究内域为谱元法时的透射公式的理论方法,建立的谱元法波动数值模型,为探讨透射公式的稳定性问题提供技术理论基础。

1 谱元法基本原理

谱元法综合了有限元方法(Finite Element Method)的灵活性和频谱法(Spectral Method)的高精度特点,形式由运动方程的弱形式来表示。谱元法进行网格划分后,每个元内的波场由高阶的拉格朗日多项式来插值表示,对每个元积分时应用(Gauss-Lobatto-Legendre, GLL)积分规则,这种积分规则精度很高,且质量阵为对角矩阵。这样空间域的积分可配合时域的显式积分方法来快速计算。本文从弹性动力学的弱形式出发,来阐述谱元法的基本原理。对于有Rayleigh阻尼的情形相当于多一个阻尼项其推导过程类似,不再赘述。

弹性动力学中关于位移矢量 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (其中 $\mathbf{x}$ 为空间点坐标, t 为时间)的弱形式为:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ 为权重函数; $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}$ 为应力张量, $\mathbf{C}$ 为四阶弹性常数张量; ρ 为点的密度; $\mathbf{f}$ 为体积力向量。本文中,微分算子与对积分域的微分,并对其省略,上式省略了 $d\Omega$ 。对积分域进行网格离散化,上述积分项可对每个元 e 分别进行,即:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{w} \cdot \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} \quad (4)$$

对于三维问题,离散的元为六面体,二维情形离散的元为四边形。这种离散元分别与立方体和正方形同形。即从六面体到立方体存在一一映射。下面推导在三维情形下进行,二维形式的推导过程类

似。设六面体全局坐标 (x, y, z) 映射到立方体的坐标为 (ξ, η, ζ) ,在立方体的坐标范围为:

$$-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (5)$$

六面体在立方体中对应的坐标表示改点的局部坐标或者自然坐标。这样全局坐标到局部坐标的映射可由六面体的一组控制点 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 和一组形函数 $N_i(\xi, \eta, \zeta)$, $i=1, 2, \dots, n_c$ 来表示,即:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_c} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_c} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_c} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{cases} \quad (6)$$

其中,形函数为拉格朗日多项式的乘积,第 i 个形函数在第 i 个控制点的值为1,在其余控制点的值为0。

通过这种表述方式,积分及微分算子对于每个元便于在其任意一个坐标系下进行。微分算子有如下关系:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中,式(7)右端 3×3 矩阵为雅可比矩阵并简记为 $\mathbf{J}$,其行列式值为 $J = |\mathbf{J}|$ 。从而有 $d\Omega = dx dy dz = J d\xi d\eta d\zeta$ 。

在传统有限元方法中,上述表示方式的形函数同时也用来表示元 e 中的波场。这种表示方式由于形函数的阶数较低,积分出来的精度也相对较低。谱元法采用阶数为 N 的插值多项式的乘积来表示波场,即:

$$f(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \approx \sum_{i,j,k=0}^N \ell_i(\xi) \ell_j(\eta) \ell_k(\zeta) f_{ijk} \quad (8)$$

其中, f_{ijk} 表示波场 f 在局部坐标点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的值,插值多项式的基函数定义为:

$$\ell_i(x) \equiv \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (9)$$

对于 N 阶的基函数,每个坐标轴须有 $N+1$ 个控制坐标点。谱元法所选取的控制坐标点为如下方程的解:

$$(1-x^2) \frac{dL_N(x)}{dx} = 0 \quad (10)$$

其中, $L_N(x)$ 表示关于 x 的 N 阶勒让德多项式。当 $N > 1$ 时, 该方程在区间 $[-1, 1]$ 有 $N+1$ 个实解, 且 -1 和 1 都是这个方程的解, 这些点同时也称之为 GLL 点。波动问题中一般选取 N 为 5~10。图 1 给出了不同的 N 所对应的解的位置。

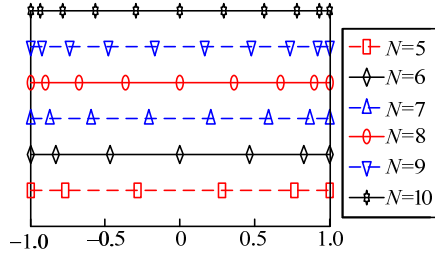


图 1 不同阶数下所对应的解的位置

Fig.1 Roots corresponding to different orders of the equation

可以看出这些方程的解具有非等距的特点, 其非等距程度随着阶数的增加而增加。这样对每个元内的划分相当于非等距划分。在这种非等距情形下如何使用透射公式将在非等距投射公式的使用一节详述。

波场用插值多项式表示后, 其波场在 GLL 点的微分也可用插值多项式的微分来表示, 即:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))}{\partial \xi} = \sum_{i=0}^N \frac{\partial \ell_i(\xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=\xi_r} f_{ist} \quad (11)$$

波场 f 在所有 GLL 点分别对 ξ, η, ζ 的微分可写成矩阵向量相乘的形式:

$$\mathbf{D}_\xi \mathbf{f} \quad \mathbf{D}_\eta \mathbf{f} \quad \mathbf{D}_\zeta \mathbf{f} \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{f} = (f_{000}, f_{100}, \dots, f_{NNN}) \quad (13)$$

为元 e 内所有 GLL 点波场值的向量表示形式。微分矩阵分别为:

$$\mathbf{D}_\xi = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}_\eta = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}_\zeta = \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (14)$$

这里 $\mathbf{D}$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 阶微分矩阵, 其第 i 行第 j 列的元素为:

$$D_{ij} = \frac{\partial \ell_j(\xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=\xi_i} \quad (15)$$

符号 $\otimes$ 表示张量乘积; $\mathbf{I}$ 为与 $\mathbf{D}$ 同阶的单位阵。

根据 GLL 点的求积规则, 波场在元 e 上的积分近似为:

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega_e} f(\xi, \eta, \zeta) J(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i,j,k=0}^N \omega_i \omega_j \omega_k J_{ijk} f_{ijk} \quad (16)$$

其中, $\omega_i, i=0, 1, \dots, N$ 表示 GLL 求积规则的权重, 雅可比行列式在每个 GLL 点的值表示为 J_{ijk} 。

对积分项式(2)每个分量 c (c 表示 x, y 或者 z 方向分量)应用上述积分规则可得:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{w} \cdot \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega \approx \sum_{i,j,k=0}^N \omega_i \omega_j \omega_k J_{ijk} \rho^{ijk} \frac{\partial^2 u_c^{ijk}}{\partial t^2} \mathbf{w}_c^{ijk} \quad (17)$$

权重 $\mathbf{w}_c^{ijk}$ 可取任意值, 式(17)积分中每个 GLL 点的每个自由度上都乘以了因子 $\omega_i \omega_j \omega_k J_{ijk} \rho^{ijk}$, 这样总质量就集中到了离散的 GLL i, j, k 点上, 且质量阵为对角阵。用式(13)相同的向量形式来表示元 e 中所有 GLL 点的位移, 即:

$$\mathbf{U}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \quad (18)$$

从而元 e 所对应的质量阵为:

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{I}_{3 \times 3} \otimes (\boldsymbol{\Omega} \text{diag}(\boldsymbol{\rho})) \quad (19)$$

其中: $\boldsymbol{\rho}$ 为与 $\mathbf{f}$ 具有相同形式的 GLL 点的密度向量; $\text{diag}(\mathbf{x})$ 表示把向量变为对角矩阵, 其对角元素依次为向量 $\mathbf{x}$ 的元素, 另一对角矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 为:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}((\omega_0 \omega_0 \omega_0 J_{000}, \omega_1 \omega_0 \omega_0 J_{100}, \dots, \omega_i \omega_j \omega_k J_{ijk}, \dots, \omega_N \omega_N \omega_N J_{NNN})) \quad (20)$$

得到质量阵后, 另一关键的刚度阵需从积分项式(3)中导出。这里采用 Voight 符号形式^[24], 四阶张量系数 $\mathbf{C}$ 为 9×9 阶矩阵。用向量化的形式表示二阶应力及应变张量:

$$\partial_x \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^T \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\tau} = (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}, T_{zx}, T_{zy}, T_{zz})^T \quad (22)$$

从而应力-应变的本构关系可表示为:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \partial_x \mathbf{u} \quad (23)$$

设微分矩阵:

$$\mathbf{D}'_x = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z & & & & & & \\ & \partial_x & \partial_y & \partial_z & & & & & \\ & & \partial_x & \partial_y & \partial_z & & & & \\ & & & \partial_x & \partial_y & \partial_z & & & \\ & & & & \partial_x & \partial_y & \partial_z & & \end{pmatrix}^T \quad (24)$$

位移向量为:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (25)$$

则 $\partial_x \mathbf{u}$ 可表示为:

$$\partial_x \mathbf{u} = \mathbf{D}'_x \mathbf{u} \quad (26)$$

变换全局坐标 $\mathbf{x}$ 到局部坐标 $\xi(\xi, \eta, \zeta)$, 可得:

$$\mathbf{D}'_x = (\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{J}^{-1}) \mathbf{D}'_\xi \quad (27)$$

应用 GLL 求积规则到积分项式(3), 可得:

$$\int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) \approx \sum_{i,j,k=0}^N \{ [\mathbf{w}^T \mathbf{D}'_\xi{}^T (\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{J}^{-1})^T] \mathbf{C} [(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{J}^{-1}) \mathbf{D}'_\xi \mathbf{u}] \} \Big|_{\xi_i, \eta_j, \zeta_k} \cdot J_{ijk} \omega_i \omega_j \omega_k \quad (28)$$

令

$$\mathbf{W}^e = (\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y, \mathbf{w}_z)^T, \quad \mathbf{C}^e = \mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_M, \\ J_{\xi,x} = \text{diag}(\partial_x \xi \Big|_{ijk=000, \dots, NNN}),$$

以及:

$$\mathbf{J}^e = \begin{pmatrix} J_{\xi,x} & J_{\eta,x} & J_{\zeta,x} \\ J_{\xi,y} & J_{\eta,y} & J_{\zeta,y} \\ J_{\xi,z} & J_{\eta,z} & J_{\zeta,z} \end{pmatrix} \quad (29)$$

式(28)简化为:

$$\int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{W}^{eT} \tilde{\mathbf{D}}_x^T (\mathbf{I}_9 \otimes \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{C}^e \tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{U}^e \quad (30)$$

其中, $\tilde{\mathbf{D}}_x = (\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{J}^e) \tilde{\mathbf{D}}_\xi$, 且 $\tilde{\mathbf{D}}_\xi$ 为:

$$\tilde{\mathbf{D}}_\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{D}_\zeta \\ \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{D}_\zeta \\ \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{D}_\zeta \end{pmatrix} \quad (31)$$

向量 $\mathbf{D}_\xi = (\mathbf{D}'_\xi \Big|_{\xi_i, \eta_j, \zeta_k} (ijk=000, \dots, NNN))$ 为长度为 $M = (N+1)^3$ 的向量。从而, 元 e 的刚度矩阵为:

$$\mathbf{K}^e = \tilde{\mathbf{D}}_x^T (\mathbf{I}_9 \otimes \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{C}^e \tilde{\mathbf{D}}_x = \tilde{\mathbf{D}}_x^T (\mathbf{C} \otimes \boldsymbol{\Omega}) \tilde{\mathbf{D}}_x \quad (32)$$

得到每个元 e 的质量阵和刚度阵后, 所有元的这些矩阵一起组装起来就得到了总的质量阵 $\mathbf{M}$ 和刚度阵 $\mathbf{K}$ 。得到这两个矩阵后, 剩下的内域计算过

程与传统有限元的实现方式相互之间是通用的。在谱元法的实现过程中, 应特别注意编号的一致性, 其中包括元的编号、节点的全局编号、节点在元内的局部编号。本文所采用的编号顺序与坐标对应关系如下。

元的编号: yxz ; 节点在元中的编号: yxz ; 节点的全局编号: yxz ; 节点的坐标顺序: xyz ; 局部坐标 $\xi\eta\zeta$ 对应于全局坐标 x, y, z ; 全局节点自由度的总体顺序为: $\dots U_x \dots U_y \dots U_z \dots$ 。

2 谱元法中透射公式使用

SEM 实现时每个单元内的网格划分为非均匀网格划分。而传统的透射公式其离散实现方式都是在边界内附近范围等距离散的情形下给出的。要在非等距的情形下使用透射公式, 一种直接的方式就是对已经划分好的 SEM 计算区进行等距网格大小的外拓, 这样在外拓的边界区直接使用已提出的透射公式进行计算。这种实现思路比较直接, 但是会导致其内域计算网格变得不一致, 多种不同的划分方式使得实现起来更为琐碎, 实际应用中的精度较难分析, 从而和 PML 相比不具有优势, 且不能充分发挥 SEM 的优势。基于此, 本文提出非等距离散情形下的透射公式实现方式。

2.1 非等距的透射公式

对应非等距的离散点, 通过对离散点的内插计算, 可以得到任意点的估计值。透射公式针对外行波的传播方式, 从当前边界点出发, 采用时空回退的方式用邻近点的历史运动值(如位移、速度、加速度)来外推当前点的运动值。设外行波以视波速 c_a 从计算内域到边界点沿法线方向传播, 时空回退的方式有两种。

一种为等时间离散点回退的方式。如图 2 所示, 设计算所采用的时间步长为 Δt , 当前时刻为 t 。边界点坐标为 x_0 , 内计算域坐标沿 x 轴正向不断增大。外行波沿 x 轴反方向传播。则从当前点的波场值 $u(x_0, t)$ 回退一个 Δt 时刻和 $2\Delta t$ 时刻的空间点位置分别为 $u(x_0 + c_a \Delta t, t - \Delta t)$ 和 $u(x_0 + 2c_a \Delta t, t - 2\Delta t)$ 。这两点的值可通过 $t - \Delta t$ 时刻和 $t - 2\Delta t$ 时刻邻近点的波场值插值得到。插值计算之后, 所对应的一阶及二阶透射公式分别为:

$$u(x_0, t) = u(x_0 + c_a \Delta t, t - \Delta t) \quad (33)$$

$$u(x_0, t) = 2u(x_0 + c_a \Delta t, t - \Delta t) - u(x_0 + 2c_a \Delta t, t - 2\Delta t) \quad (34)$$

另一种为离散网格点回退的方式。设内域的离散网格点分别为 $x_1, x_2, \dots$ 。则由 x_0 以视波速 c_a 回退到 x_i 的时间为:

$$t_b = \frac{x_i - x_0}{c_a} \quad (35)$$

这样每个离散网格点需要根据其历史点的波场值在时间域上进行插值。即根据波场在离散时间点 $t - k\Delta t, k \geq 1$ 上进行插值。如果 $t_b < \Delta t$, 插值形式将为外插。由于外插的结果通常没有内插所得结果稳定, 通常式(35)所取的视波速满足 $t_b > \Delta t$, 从而时域上的插值不需要外插, 插值结果更为可靠。

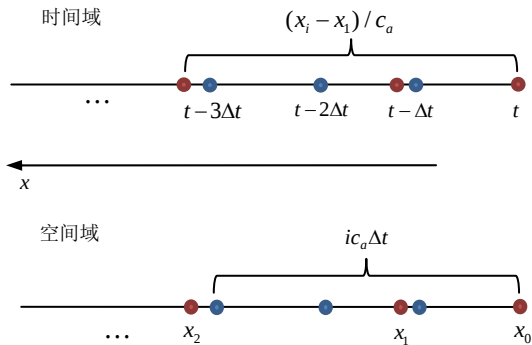


图2 波场以视波速传播从边界点回退到各个点所对应的时间(时间域)及等时间间隔所对应的位置(图中 $i=2$)

Fig.2 Locations for points back from the boundary points of the wave field propagating with apparent velocity c_a , and the locations for equal time interval spaced ($i=2$)

2.2 稳定性措施

透射公式在实际应用中, 会出现不稳定的情形, 尤其是对于三维问题, 不稳定现象问题突出。由透射边界条件引起的计算不稳定主要有两种形式, 高频振荡和低频漂移。

2.2.1 高阶插值失稳机理分析

透射公式相当于一种时空内推后的外插公式, 上述的两种不稳定与外插公式本身的不稳定性以及等距多项式插值在边界点附近的不稳定性联系紧密。

首先外插公式的误差范围是无界的。比如需要插值的函数形式为 $\sin(x)$ 。函数 $\sin(x)$ 的值域范围在 $[-1, 1]$ 之间, 而拟合的多项式值是没有上下界的, 这样对插值点以外进行外推的区域就非常有限, 外推区域越大, 误差就会越大。这对应于如果这种函数形式频率越高, 外插公式误差将越大。

再次, 等距插值本身存在不稳定因素。对于等距采样点进行高阶多项式插值时经常存在插值的结果曲线在两端插值点附近剧烈震荡的特点, 这就

是 Runge 现象。这同时也说明了谱元法的单元内不采用等距插值而是使用 GLL 点插值的原因。

如图 3 所示为对函数形式为 $y=1/(1+20(x-1)^2)$ 的插值结果。插值公式所估计的边界点在 $x=0$ 处, 插值选用的离散点从低阶到高阶依次为 $x=0.2, 0.4, \dots, 1.8, 2.0$ 。图中可以看出阶数在三阶以上时, 其插值多项式在 $x=0$ 点外推结果与假定的函数形式的实际值已经相去甚远。

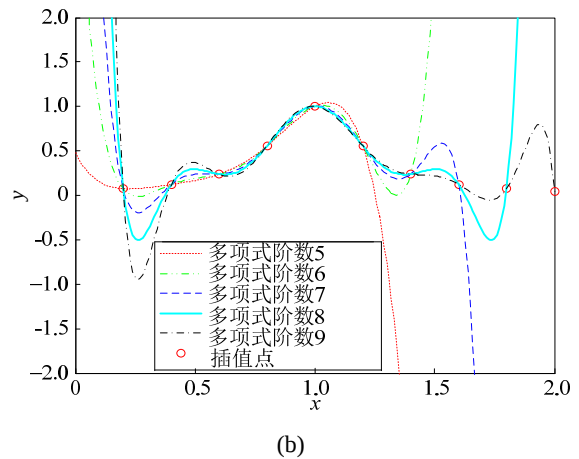
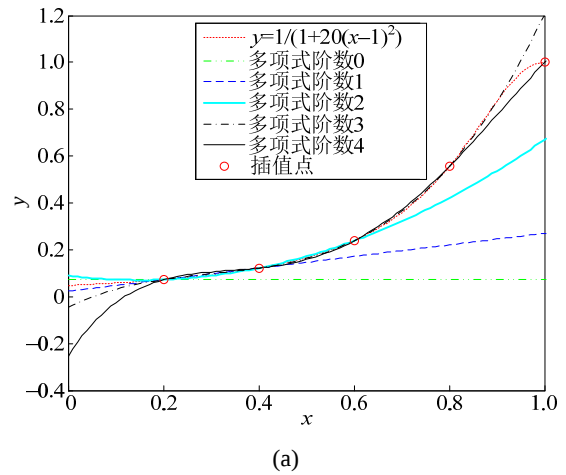


图3 外插公式的不稳定性示例

Fig.3 An example for the instability of extrapolation formula

实际计算过程的插值点, 对于离散网格的波动过程, 如果波动成分只含有低频段, 则这个现象并不显著。然而计算机的舍入误差相当于白噪声, 含有各个频段的成分。这样在实际应用透射公式时, 主要使用的是一阶和二阶透射公式。阶数越小, 则外推点的值主要与邻近点的值相关联。这也解释了为什么出现高阶透射公式漂移失稳时, 采用降阶消漂能使这种失稳形式得到有效控制。

在使用高阶插值公式时, 由于阶数较高, 因而对于其中高频成分外插所得到的值与理论值差别

会非常显著,这种差别会在接下来的计算中不断放大,从而给计算区输入较大能量,造成高频振荡失稳。

2.2.2 去除高频振荡的措施

对于高频振荡的失稳形式,主要解决方法是通过高频滤波或者在计算区附加阻尼来吸收高频波动。本文在不采取任何措施的情形下观察了透射公式的实施效果,发现时域内进行插值的方式经常出现高频振荡现象。而空间域的插值方式应用一阶和二阶透射公式并没有高频失稳现象。这说明插值方式也对透射公式的实施产生很大的影响。

基于时间域的插值,每个插值点的值有固定网格点的历史运动过程决定,空间之间没有耦合。这样相邻点之间的插值结果往往逐渐的差别越来越大,整个插值过程对高频不断放大,从而易出现高频失稳。

空间域插值的方法,用到了边界点本身,相当于自身平滑滤波,因而消除了高频振荡。下面以一阶透射公式为例说明空间域插值相当于自身平滑滤波进行分析说明。

如图2所示,空间域插值的一个主要特点是对 $u(x_0 + c_a \Delta t, p \Delta t)$ 进行插值时引入了边界点值 $u(x_0, p \Delta t)$ 。这使得当前边界点值的计算与边界点的历史值有关,而其历史值又由内点计算得到。下面推导实用形式一阶透射公式的表述方式。设插值系数为 c_0, c_1, c_2 ,则:

$$u(x_0 + c_a \Delta t, p \Delta t) = c_0 u(x_0, p \Delta t) + c_1 u(x_1, p \Delta t) + c_2 u(x_2, p \Delta t) \quad (36)$$

由一阶透射公式并结合式(36)可得:

$$u(x_0, (p+1) \Delta t) = c_0 u(x_0, p \Delta t) + c_1 u(x_1, p \Delta t) + c_2 u(x_2, p \Delta t) \quad (37)$$

把 $u(x_i, p \Delta t)$ 简记为 u_i^p ,继续递推可得:

$$u_0^{p+1} = c_0 (c_0 u_0^{p-1} + c_1 u_1^{p-1} + c_2 u_2^{p-1}) + c_1 u_1^p + c_2 u_2^p \quad (38)$$

设边界点的初始条件为0,可得:

$$u_0^{p+1} = \sum_{i=0}^{p-1} c_0^i (c_1 u_1^{p-i} + c_2 u_2^{p-i}) \quad (39)$$

为了使结果稳定,必须有 $c_0 < 1$ 。否则任一时刻在 x_1, x_2 处的非零值将对边界点后续的值产生的影响越来越大。同时在 $c_0 = 0$ 时,没有滤波效果,同样容易出现高频振荡现象。采用3点二次多项式插值时:

$$c_0 = \frac{(x_0 + c_a \Delta t - x_1)(x_0 + c_a \Delta t - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad (40)$$

图4显示了 c_0 随着 $c_a \Delta t$ 大小变动的情况。其横坐标为 $x_0 + c_a \Delta t$, c_0 按式(41)为 $x_0 + c_a \Delta t$ 的函数。在等距网格情形下,设等距为 Δx 。在使用透射公式时,一般建议取 c_a 使得:

$$0.5 \leq \frac{c_a \Delta t}{\Delta x} \leq 2 \quad (41)$$

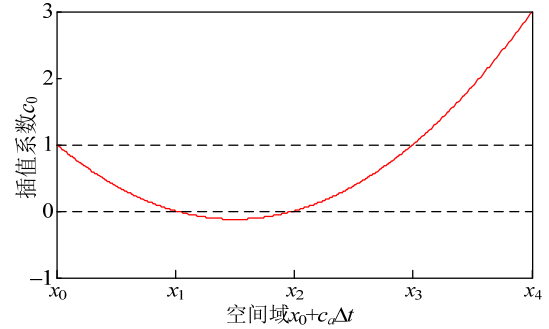
在此范围内显然有 $c_0 < 1$ 。然而在等距及非等距情形当

$$x_1 \leq x_0 + c_a \Delta t \leq x_2 \quad (42)$$

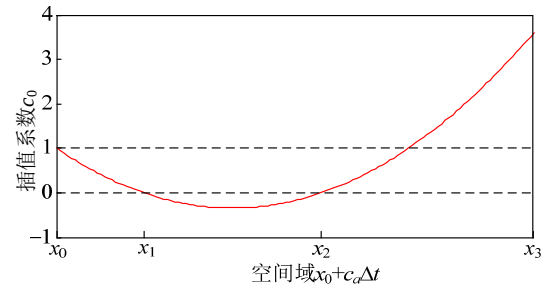
时, $c_0 \leq 0$ 。这种滤波特性很难分析,将极易出现不稳定或者较大误差的情形。因此,本文进一步建议取 c_a 使得:

$$\frac{x_1 - x_0}{d} \leq c_a \Delta t < x_1 - x_0 \quad (43)$$

其中, d 为问题的维数,二维波动问题取2,三维波动问题取3。



(a) 等距网格点情形



(b) 非等距谱元法情形, $N=5$

图4 插值系数 c_0 随着 $c_a \Delta t$ 的变化

Fig.4 The change of the interpolation coefficient c_0 against $c_a \Delta t$

2.2.3 低频漂移的相关措施

以近年来针对波的衰减因素和漂移失稳现象,采用较多技术就是使用 γ 算子和降阶消漂。本文对这两种措施进行分析,并应用到采用频谱元的透射公式当中。

透射公式最初的提出是基于平面波的传播,没考虑衰减因素,虽然其理论上与无穷远辐射条件等价。但当散射体离边界较近,尤其是三维问题,就

需要考虑波动衰减的修订。对于提出的 γ 算子方法, 其大小的确定主要采用经验试算的方法。

本文研究发现, 关于透射公式 γ 算子的确定, 根据散射体到边界的距离, 根据点源散射公式, 可近似根据衰减因子的大小来确定 γ 值, 使得透射边界值的计算更为准确。

如图 5 所示, 设由散射点传播到距离为 r_0 的波场为:

$$u(r_0, t) = W(r_0) f(ct - r_0) \quad (44)$$

其中, f 为波动源函数。衰减函数 $W(r) = r^{(1-d)/2}$, 这里 d 同样表示波动问题的维数。设波源散射到边界点的方向与边界点所在法线方向夹角为 θ 。则有:

$$c_a = \frac{c}{\cos(\theta)} \quad (45)$$

设波从 $x_0 + c_a \Delta t$ 传播到 x_0 衰减因子为 α , 则结合一阶透射公式得到:

$$u(r_0, t) = \alpha u(r_1, t - \Delta t) \quad (46)$$

从图 5 可以看出:

$$r_1 = \sqrt{(r_0 \sin(\theta))^2 + (r_0 \cos(\theta) - c_a \Delta t)^2} \quad (47)$$

基于:

$$r_0 \gg c_a \Delta t \quad (48)$$

式(47)可近似为:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r_0^2 - 2r_0 \cos(\theta) c_a \Delta t + (c_a \Delta t)^2} = \\ &= r_0 \sqrt{1 - 2c \Delta t / r_0 + (c_a \Delta t / r_0)^2} \approx \\ &= r_0 \left(1 + \frac{1}{2} (-2c \Delta t / r_0 + (c_a \Delta t / r_0)^2) \right) \approx \\ &= r_0 - c \Delta t \end{aligned} \quad (49)$$

将式(49)代入式(46)得:

$$\begin{aligned} u(r_0, t) &= \alpha u(r_0 - c \Delta t, t - \Delta t) = \\ &= \alpha W(r_0 - c \Delta t) f[c(t - \Delta t) - (r_0 - c \Delta t)] = \\ &= \alpha W(r_0 - c \Delta t) f(ct - r_0) \end{aligned} \quad (50)$$

结合式(44)可得衰减因子为:

$$\alpha = \left(\frac{r_0}{r_0 - c \Delta t} \right)^{(1-d)/2} \quad (51)$$

代入 γ 算子的一阶透射公式为:

$$u(r_0, t) = u(r_1, t - \Delta t) / (1 + \gamma) \quad (52)$$

这样可得到 γ 的取值为:

$$\gamma = \left(\frac{r_0}{r_0 - c \Delta t} \right)^{(d-1)/2} - 1 \quad (53)$$

对于三维波动情形, γ 值为:

$$\gamma = \frac{c \Delta t}{r_0 - c \Delta t} \quad (54)$$

算子 γ 与带衰减的透射公式关系紧密, 很多文献在对内域波动时采用的是指数衰减。指数衰减在 γ 很小的情况下与本文推导结果一致。

在散射体为点源的情形时(散射波逐渐衰减), 计算结果与 γ 取值关系非常密切。这种情形下的空间插值方法也必须考虑波的衰减因素。先计算插值所用点衰减后的值, 然后插值直接得到衰减值, 然后直接使用非衰减的透射公式进行计算。

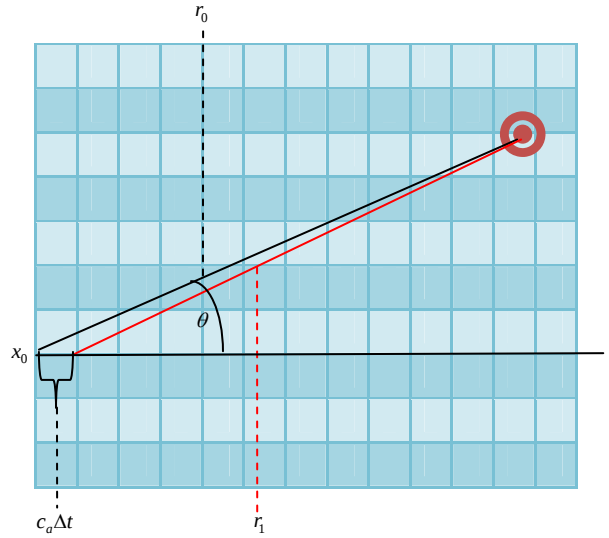


图 5 点源散射示意图

Fig.5 The diagram of point source scattering.

理论上 γ 算子不支持零频波动, 对带衰减的散射情形可使得计算结果更为准确。但实际算例中采用 γ 算子依然会出现漂移失稳现象。对于这种仍然出现的失稳现象, 补充采用降阶消漂是一个非常行之有效去除漂移失稳的方法。

3 计算分析

本节将以三维 Lamb 表面源问题^[25-26]对 SEM 与透射公式的使用方法进行相关分析说明。

3.1 选取模型参数

如图 6 所示, 为三维网格划分的情况。长方体尺寸为 $2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 。单元数划分为 $20 \times 20 \times 10$, 即每个单元大小为 $0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ 。每个单元 GLL 点非等距划分时 $N = 5$ 。长方体顶部为自由表面, 其余边界采用透射边界。所计算的介质为均匀各向同性介质, 介质密度为 1 kg/m^3 , 泊松比为 0.25, 剪切波速为 $V_S = 4 \text{ m/s}$, 根据泊松比, 可计算出

$V_p=6.928$ m/s。施加力处于长方体表面中心点位置：

$$F(x)=16(G(x)-4G(x-1/4)+6G(x-1/2)-4G(x-3/4)+G(x-1)), \quad (55)$$

$$G(x)=x^3H(x), \quad x=t/T.$$

其中： $T=1$ s 为时程持续时间； $H(x)$ 为 Heaviside 阶跃函数。力的时程曲线如图 7 所示。

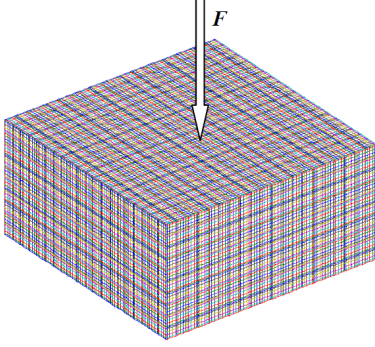


图 6 三维网格划分情况及施加的力的位置
Fig.6 Mesh generation and the location of point force

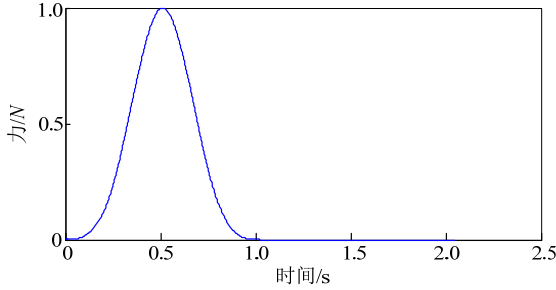


图 7 施加的力的时程函数
Fig.7 The time history of point force

单元内进行非等距划分后的最小网格间距为 $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = 0.0117$ m。为使得谱元法积分格式计算稳定，时间步距应满足 Courant 数值小于 1。即：

$$V_p \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x_{\min}^2} + \frac{1}{\Delta y_{\min}^2} + \frac{1}{\Delta z_{\min}^2}} \leq 1 \quad (56)$$

本算例中取 Courant 数为 0.999，代入具体数值可得 $\Delta t = 9.7796 \times 10^{-4}$ 。

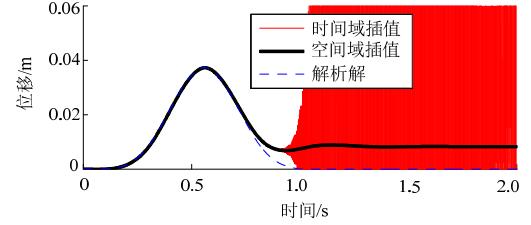
3.2 计算内容

算例分析主要以自由表面上离表面源距离为 $r=0.2$ m 和 $r=0.4$ m 的两个点作为观测点并与解析解进行比较。Lamb 问题的解析解的计算方法可参考文献[25]。

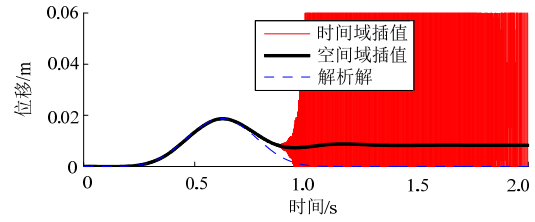
3.2.1 时域插值和空间域插值

首先本文对透射公式的时域插值和空间域插值这两种方式在不采取任何失稳措施的情况下使用一阶透射公式进行了计算。时域插值一阶透射为内域点采用式(36)所得到回退时刻的值；空间域

插值为式(34)的计算值。计算如图 8 所示，两种插值方式都出现了低频漂移现象，在不发生高频振荡的情况下在不同的 r 距离下所得到的最终漂移值相同。基于时间域的插值方式出现了高频振荡，使得整个计算失效。这说明在空间域上采用合适的插值方式能消除高频振荡现象。



(a) $r=0.2$



(b) $r=0.4$

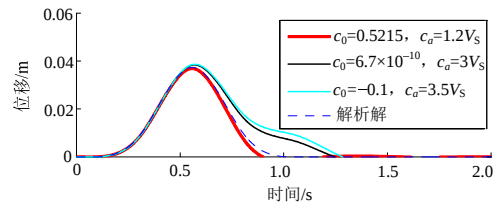
图 8 基于时间域插值和空间域插值与解析解计算结果比较

Fig.8 A comparison between the results of interpolation in time domain or space domain and the analytic solution.

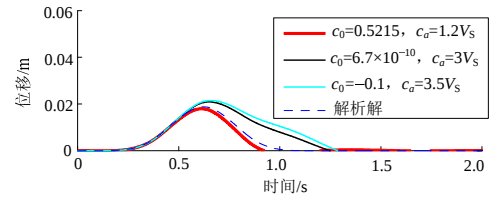
3.2.2 空间域插值参数 c_0 的影响

在采用 γ 算子的情况下，波动过程模拟的精度进一步提高，为此本文在采取 γ 算子措施的情况下进一步研究空间域插值时的 c_0 取值的影响。

空间域插值的滤波性能与 c_0 值关系非常紧密。而具体的 c_0 值由人工波速 c_a 决定。本文对不同的人工波速取值进行了计算。图 9 对不同的 c_0 值进行了



(a) $r=0.2$



(b) $r=0.4$

图 9 不同 c_0 值与解析解计算结果比较

Fig.9 A comparison of results with different c_0 values and analytic solutions.

波动模拟计算。可以看出,当 c_0 接近于零或者为负值时精度比较低。

3.2.3 二阶透射公式是否采用降阶消漂的影响

由 3.2.2 节的分析可知,阶数越高,透射公式所计算的结果就越不稳定。二阶透射公式相当于一个折中,比三阶以上透射公式有着更好的稳定性,同时相对于一阶透射公式精度大大提高。本文对 γ 算子在二阶透射公式的效果进行了研究,发现即使使用了 γ 算子,仍然出现低频漂移现象,但同时 γ 算子对低频漂移有一定的抑制作用,不会是其低频漂移无限制的增大。如图 10 所示。如果二阶透射公式配合降阶消漂措施将取得比较理想的计算结果。

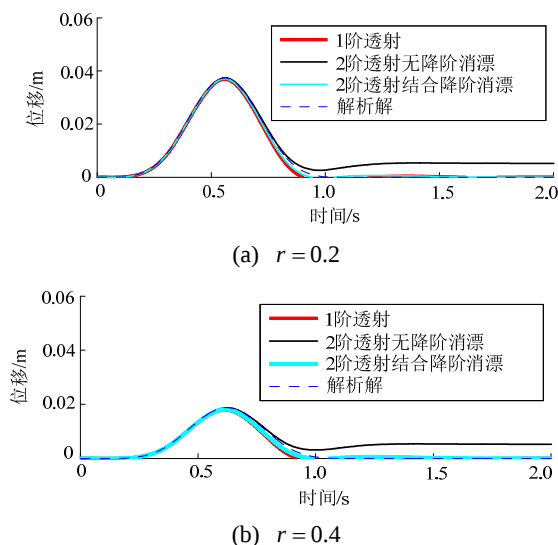


图 10 二阶透射公式,一阶透射公式,二阶透射采用降阶消漂与解析解计算结果比较

Fig.10 A comparison of results among second order transmitting formulas, first order transmitting formulas, first order transmitting formulas with the order-reducing drift-eliminating measure and the analytic solutions.

4 结论

由于进行有限域的波动模拟过程中透射边界的稳定性问题一直存在,本文试图从谱元法的透射边界配合使用方法角度探讨透射边界的稳定性。文中首先介绍了在边界处理的发展历程;随后对谱元法的基本原理进行了阐述,并结合内域为谱元法时的非等距网格划分特性对如何使用透射公式的方法进行了详细的分析,给出了相应的透射公式使用方法;最后,基于谱元法和透射公式建立的波动模型进行了数值计算,深入探讨了透射公式的稳定性问题,得到以下结论:

(1) 空间域插值方法相对于时间域插值不会出

现高频失稳,其插值系数 c_0 应在一个合理范围。

(2) γ 算子的使用对透射公式的使用可提高其精度,同时基于算例分析给出了 γ 算子取值的具体方法。

(3) 采用 γ 算子后对于高阶透射公式仍可出现低频漂移现象,若结合降阶消漂方法可实现稳定且精度相对较高的透射边界条件。

本研究为后续研究透射边界稳定性问题提供了一定的理论基础和参考。

参考文献:

- [1] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method [J]. Geophysics, 1986, 51(4): 889—901.
- [2] Fajardo K, Papageorgiou A S. Wave propagation in unbounded elastic domains using the spectral element method: Formulation [J]. Earthquake and Structures, 2012, 3(3/4): 383—411.
- [3] Alterman Z, Karal F. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1968, 58(1): 367—398.
- [4] 廖振鹏. 工程波动理论导论[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 136—277.
- [5] Liao Zhengpeng. Introduction to Wave Theory Engineering [M]. Beijing: Science Press, 2002: 136—277. (in Chinese)
- [6] Givoli D. High-order local non-reflecting boundary conditions: A review [J]. Wave Motion, 2004, 39(4): 319—326.
- [7] Lysmer J, Kuhlemeyer R. Finite dynamic model for infinite media [J]. Journal of Engineering Mechanics-Asce (Journal of the Engineering Mechanics Division), 1969, 95: 859—877.
- [8] Deeks A J, Randolph M F. Axisymmetric time-domain transmitting boundaries [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(1): 25—42.
- [9] 刘晶波, 王振宁, 杜修力, 等. 波动问题中的三维时域粘弹性人工边界[J]. 工程力学, 2005, 22(6): 46—51.
- [10] Liu Jingbo, Wang Zhenning, Du Xiuli, et al. Three-dimensional visco-elastic artificial boundaries in time domain for wave motion problems [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(6): 46—51. (in Chinese)
- [11] Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1977, 74(5): 1765—1766.
- [12] Clayton R, Engquist. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1977, 67(6): 1529—1540.

- [11] 廖振鹏, 周正华, 张艳红, 等. 波动数值模拟中透射边界的稳定实现[J]. 地球物理学报, 2002, 45(4): 533—545.
Liao Zhenpeng, Zhou Zhenghua, Zhang Yanhong, et al. Transmitting boundary in numerical simulation of wave motion stability [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2002, 45(4): 533—545. (in Chinese)
- [12] 李小军, 廖振鹏, 杜修力, 等. 有阻尼体系动力问题的一种显示差分解法[J]. 地震工程与工程振动, 1992, 4(12): 387—392.
Li Xiaojun, Liao Zhenpeng, Du Xiuli, et al. A finite difference method for viscoelastic dynamic problems [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1992, 4(12): 387—392. (in Chinese)
- [13] 李小军. 非线性场地地震反应分析方法的研究[D]. 北京: 中国地震局工程力学研究所, 1993.
Li Xiaojun. Study on the method for analyzing the earthquake response of nonlinear site [D]. Beijing: Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, 1993. (in Chinese)
- [14] 李小军, 廖振鹏. 时域局部透射边界的计算漂移失稳[J]. 力学学报, 1996, 28(5): 627—632.
Li Xiaojun, Liao Zhenpeng. Calculate the drift instability of local transmitting boundary in time domain [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1996, 28(5): 627—632. (in Chinese)
- [15] 周正华, 廖振鹏. 修正算子 γB_0^0 的物理含义解释[J]. 地震工程与工程振动, 2005, 24(5): 17—19.
Zhou Zhenghua, Liao Zhenpeng. The interpretation of physical implication of modified operator γB_0^0 [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2005, 24(5): 17—19. (in Chinese)
- [16] Higdon R L. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation [J]. Mathematics of Computation, 1986, 47(176): 437—459.
- [17] Higdon R L. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation [J]. Mathematics of Computation, 1987, 49(179): 65—90.
- [18] Higdon R L. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media [J]. Journal of Computational Physics, 1992, 101(2): 386—418.
- [19] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(2): 185—200.
- [20] Chew W C, Weedon W H. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 1994, 7(13): 599—604.
- [21] Taflov A, Hagness S C. Computational electrodynamics: The FDTD Method [M]. London: Artech House Boston, 2000.
- [22] Komatitsch D, Martin R. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation [J]. Geophysics, 2007, 72(5): SM155—SM167.
- [23] Meza-Fajardo K C, Papageorgiou A S. A nonconvolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: Stability analysis [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2008, 98(4): 1811—1836.
- [24] Malvern L E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium [M]. Englewood, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.
- [25] Mooney H M. Some numerical solutions for Lamb's problem [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1974, 64(2): 473—491.
- [26] 孙虎, 周丽. 基于谱元法的裂纹梁 Lamb 波传播特性研究[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 50—55.
Sui Hu, Zhou Li. Lamb wave propagation in a cracked beam using spectral finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 50—55. (in Chinese)