

文章编号: 1000-4750(2017)09-0034-09

一种高效的准二维管道瞬变流计算方法

孙 强¹, 伍悦滨¹, 徐 莹², JANG Tae Uk^{1,3}

(1. 哈尔滨工业大学市政环境工程学院, 黑龙江, 哈尔滨 150090; 2. 哈尔滨商业大学能源与建筑工程学院, 黑龙江, 哈尔滨 150028;

3. 金日成综合大学, Department of Mechanics, Pyong Yang 999093, D. P. R. 朝鲜)

摘 要: 为了提高准二维管道瞬变流模型的计算效率, 对现有的基于特征线法的准二维模型的算法进行了改进, 提出了直接利用一维显式方程计算管道的流量和压力, 取代了原算法中需通过数值积分求解平均速度再进一步计算节点压力的方法。该文提出的一维显式方程采用 FVS (Flux Vector Splitting) 方法, 并在水库-管道-阀门系统中, 将该方法与两个现有的准二维模型的算法在准确性和计算效率方面进行了比较。结果表明: 该文所提出的方法与另外两个算法得到的计算结果基本相同, 但是所花费的计算时间更少。因此, 该文所提出的方法是一种计算准确并且高效的准二维瞬变流计算方法, 适用于管道系统瞬变流的数值模拟分析。

关键词: 瞬变流; 数值模拟; 准二维模型; 管道; 通量向量分裂法

中图分类号: TV134.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2016.04.0242

AN EFFICIENT METHOD FOR QUASI-TWO-DIMENSIONAL WATER-HAMMER SIMULATION

SUN Qiang¹, WU Yue-bin¹, XU Ying², JANG Tae Uk^{1,3}

(1. School of Municipal and Environmental Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150090, China;

2. School of Energy and Architecture, Harbin University of Commerce, Harbin, Heilongjiang 150028, China;

3. Department of Mechanics, Kim Il Sung University, Pyong Yang 999093, D. P. R. Korea)

Abstract: In order to increase the computational efficiency of quasi-two-dimensional (quasi-2D) water-hammer models, a method that improves upon an existing quasi-2D scheme in the method of characteristics (MOC) is presented. The proposed method uses one-dimensional (1D) explicit equations to calculate pressure head and discharge, rather than using numerical integration to solve mean velocity as employed in the existing scheme. The 1D explicit equations are developed, based on the flux vector splitting (FVS) method. In a reservoir-pipeline-valve system, the comparisons between the proposed method and two existing quasi-2D schemes show that the proposed method gives virtually the same results as the other two quasi-2D schemes do, but costs less computational time. Therefore, the proposed method is able to simulate transient flow problems with high accuracy and efficiency.

Key words: transient flow; numerical simulation; quasi-two-dimensional model; pipe; flux vector splitting method

管道瞬变流研究在流体输送领域有广泛的应用, 如管道的运输安全防护^[1-2]、管道泄漏检测^[3]等。

准确地模拟计算管道的压力波动, 能够更好地帮助工程人员设计管道防护系统以及应用瞬变流方法进

收稿日期: 2016-04-01; 修改日期: 2016-09-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(51208160); 省高校青年创新人才培养计划项目(UNPYSCT-2015072)

通讯作者: 伍悦滨(1966—), 女, 江西南昌人, 教授, 博士, 主要从事瞬变流模拟研究(E-mail: ybwu@hit.edu.cn)。

作者简介: 孙 强(1985—), 男, 黑龙江五常人, 博士, 主要从事管道瞬变流和气流两相瞬变流模拟研究(E-mail: sunqiang1222@163.com);

徐 莹(1981—), 女, 黑龙江哈尔滨人, 副教授, 博士, 主要从事石油管道瞬变流模拟研究(E-mail: joexying@126.com);

Jang Tae Uk(1962—), 男, 朝鲜平壤人, 副教授, 博士, 主要从事计算流体力学相关领域研究(E-mail: jtu_rns@163.com)。

行管道的泄漏检测, 具有十分重要的工程意义。

对于管道中瞬变流的模拟计算, 通常采用计算效率高、编程简单且易于理解的一维瞬变流模型^[4]。然而, 一维模型需要引入独立的能量耗散模型, 传统的瞬变流分析方法通常采用基于稳态的达西-维斯巴赫方程的能量耗散模型^[5], 该耗散模型可以满足反应速度较慢的瞬变流问题, 然而对于快速发生的瞬变流问题(如突然关阀等), 该模型无法进行准确地模拟计算^[6]。为了更准确地模拟瞬变流问题, 许多学者提出了瞬态模型, 大致可分为两种, 一种是基于经验参数并考虑本地加速度的模型^[7-8], 另一种是基于分析解的加权函数模型^[9-10]。

二维模型由于考虑了瞬时管道横截面上的速度分布相比一维模型的计算结果更准确, 但同时也增加了相应的计算量。为了既能得到准确的计算结果, 又能提高计算效率, 基于假设条件下的准二维模型被提了出来。准二维模型的假设条件是: 1) 忽略了动量方程中的径向速度分量及其导数; 2) 假设动量方程中轴向上的一般应力等于管道压力并且忽略了剩余的对流项; 3) 忽略了径向动量方程的应力项, 从而横截面上的压力沿径向不变。

许多学者对准二维模型进行了研究, 包括 Ohmi^[11]、Vardy 和 Hwang^[12]、Silva-Araya 和 Chaudhry^[13]、Pezzinga^[14-15]等。其中, Vardy 和 Hwang^[12]的模型是计算准确且稳定的, 并被广泛应用^[16-18]。该模型使用特征线法(Method of characteristics, 简称 MOC)计算瞬变流方程的双曲型波动部分并利用中心差分方法计算方程的抛物线型扩散部分。该模型的缺点是求解各节点的压力, 轴向速度以及径向通量的计算效率低, 当管道沿径向离散为 Nr 个圆柱体时, 该模型需要同时计算 $2Nr$ 个线性方程, 其计算的时间复杂度是 Nr^3 的数量级。为了提高 Vardy-Hwang 模型的计算效率, Zhao 和 Ghidaoui^[19]解耦线性方程组为两个带有三对角矩阵的方程组, 其中一个用于计算轴向速度分布, 另一个用于计算压力和径向通量。试验结果表明, 该方法的时间复杂度可降低为 Nr 的数量级。Korbar 等^[20-21]通过数值积分 Zhao-Ghidaoui 方法中计算压力和径向通量的方程, 得到与径向通量无关的压力表达式, 其表达式与通过一维特征方程计算得到的压力方程的表达式相同。该方法需要先利用准二维方程计算轴向速度, 然后通过数值积分管道的轴向速度分布计算管道平均速度, 再代入压力方

程计算压力, 当需要计算径向通量时, 将已知的节点压力代入压力和径向流量的方程, 可以得到计算径向通量的显式方程。

本文在 Korbar 方法的基础上提出了一种改进的计算方法, 即直接利用一维显式方法计算管道的流量和压力, 利用准二维模型的特征方程计算管道轴向速度分布, 利用显式方程计算管道径向通量。与 Zhao-Ghidaoui 方法相比, 直接利用显式方程比利用矩阵运算计算压力和径向通量的计算效率高; 与 Korbar 方法相比, 直接利用显式方法计算流量和压力比利用数值积分轴向速度分布的计算更高效。本文的一维显式方法采用基于有限体积法的通量向量分裂(Flux Vector Splitting, 简称 FVS)算法, 该方法相比 MOC 方法有其独特的优势, 如在气液两相瞬变流模拟方面可以准确地捕捉压力波、计算精度高并易于收敛等^[22]。Geng 等^[23]利用 FVS 方法对管网的瞬变流进行了模拟。Sun 等^[24]修改了 FVS 方法的计算网格, 使其计算节点可以和特征线法的计算节点相对应。由于本文所使用的准二维模型是基于特征线法建立的, 因此, 本文采用 Sun 等^[24]提出的修改计算网格的 FVS 方法。在水库-管道-阀门系统中, 该方法同 Zhao-Ghidaoui 方法和 Korbar 方法在计算精度和效率方面进行了比较, 从而验证该方法的准确性以及计算的高效性。

1 数学模型

1.1 准二维管道瞬变流基本方程

Vardy 和 Hwang^[12]在同轴的圆柱控制体上建立了差分形式的准二维管道瞬变流基本方程, Zhao 和 Ghidaoui^[19]将该差分方程中的控制体收缩到计算节点上, 得到如下表达式:

$$\frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

式中: x 为沿管道的轴向距离; r 为距管轴线的径向距离; t 为时间; ρ 为液体密度; H 为压力水头; u 和 v 分别为轴向速度和径向速度; a 为波速; g 为重力加速度; τ 为剪切应力。

沿着管道横截面对式(1)和式(2)进行积分, 得到一维管道瞬变流控制方程分别如下:

$$\frac{gA}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\pi D \tau_w}{\rho} = 0 \quad (4)$$

式中: Q 为流量, $Q = \int_0^R 2\pi r u dr$; A 为管道横截面积; D 为管道直径; π 为常数; τ_w 为管道壁面切应力, $\tau_w = -\left(\rho \nu_T \frac{du}{dr}\right)_{r=R}$, R 为管道半径, ν_T 为总粘度。

利用特征线法数值求解一维和二维瞬变流方程, 沿着正负特征线(即 $dx/dt = \pm a$)的特征方程形式分别如下:

$$\frac{dH}{dt} \pm \frac{a}{gA} \frac{dQ}{dt} \pm \frac{a}{g} \frac{4\tau_w}{\rho D} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dH}{dt} \pm \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + \frac{a^2}{g} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \mp \frac{a}{g} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

1.2 准二维模型

准二维模型的轴向和径向的计算网格, 如图 1 所示。图 1(a)为管道轴向的计算网格, 管道长度 L 被平均分成 N_x 段, 每段长度为 $\Delta x = L/N_x$ 。图 1(b)为管道径向的计算网格, 管道沿着径向被分成 N_r 个不同厚度为 Δr 的圆柱体; 每个圆柱体中, 轴向速度 u 位于圆柱体横截面的中点处, 径向速度 v 和总粘度 ν_T 位于圆柱体沿径向的外表面; 时间步长为 $\Delta t = \Delta x/a$ 。式(6)沿特征线在离散化的计算区域上进行积分, 得到的离散方程形式如下:

$$H_i^{n+1} - \theta C_{qj} q_{i,j-1}^{n+1} + \theta C_{qj} q_{i,j}^{n+1} - \varepsilon C_{u1j} u_{i,j-1}^{n+1} + (a/g + \varepsilon C_{u2j}) u_{i,j}^{n+1} - \varepsilon C_{u3j} u_{i,j+1}^{n+1} = K_{pi,j} \quad (7)$$

$$H_i^{n+1} - \theta C_{qj} q_{i,j-1}^{n+1} + \theta C_{qj} q_{i,j}^{n+1} + \varepsilon C_{u1j} u_{i,j-1}^{n+1} - (a/g + \varepsilon C_{u2j}) u_{i,j}^{n+1} + \varepsilon C_{u3j} u_{i,j+1}^{n+1} = K_{ni,j} \quad (8)$$

其中, 源项 $K_{pi,j}$ 和 $K_{ni,j}$ 分别表示为:

$$\begin{aligned} K_{pi,j} &= H_{i-1}^n + (1-\theta)C_{qj}(q_{i-1,j-1}^n - q_{i-1,j}^n) + \\ &\quad (1-\varepsilon)C_{u1j}u_{i-1,j-1}^n + [a/g - (1-\varepsilon)C_{u2j}]u_{i-1,j}^n + \\ &\quad (1-\varepsilon)C_{u3j}u_{i-1,j+1}^n, \\ K_{ni,j} &= H_{i+1}^n + (1-\theta)C_{qj}(q_{i+1,j-1}^n - q_{i+1,j}^n) - \\ &\quad (1-\varepsilon)C_{u1j}u_{i+1,j-1}^n - [a/g - (1-\varepsilon)C_{u2j}]u_{i+1,j}^n - \\ &\quad (1-\varepsilon)C_{u3j}u_{i+1,j+1}^n \end{aligned}$$

式中: q 为径向通量, $q = rv$; 下标 i 和 j 分别为轴向和径向的网格节点编号; 上标 n 为时间步; ε 和 θ 分别为式(6)中在时间离散条件下的粘性项和径向通量项的权重系数; 系数 C_{qj} 、 C_{u1j} 、 C_{u2j} 和 C_{u3j}

分别表示为:

$$C_{qj} = \frac{a^2 \Delta t}{g r_{cj} (r_j - r_{j-1})},$$

$$C_{u1j} = \frac{a \Delta t \nu_{Tj-1} r_{j-1}}{g r_{cj} (r_{cj} - r_{cj-1})(r_j - r_{j-1})},$$

$$C_{u3j} = \frac{a \Delta t \nu_{Tj} r_j}{g r_{cj} (r_{cj+1} - r_{cj})(r_j - r_{j-1})},$$

$$C_{u2j} = C_{u1j} + C_{u3j}.$$

式中, r 和 r_c 分别为圆柱体横截面的外表面和中心点处距管轴线的径向距离。

式(5)沿特征线在离散化的计算区域上进行积分, 得到的离散方程形式如下:

$$H_i^{n+1} + \frac{a}{gA} Q_i^{n+1} + \frac{4\varepsilon a \Delta t}{\rho g D} \tau_{wi}^{n+1} = C_p \quad (9)$$

$$H_i^{n+1} - \frac{a}{gA} Q_i^{n+1} - \frac{4\varepsilon a \Delta t}{\rho g D} \tau_{wi}^{n+1} = C_n \quad (10)$$

其中:

$$C_p = H_{i-1}^n + \frac{a}{gA} Q_{i-1}^n - (1-\varepsilon) \frac{4a \Delta t}{\rho g D} \tau_{wi-1}^n,$$

$$C_n = H_{i+1}^n - \frac{a}{gA} Q_{i+1}^n + (1-\varepsilon) \frac{4a \Delta t}{\rho g D} \tau_{wi+1}^n.$$

式中: τ_{wi}^{n+1} 为节点 i 在 $(n+1)\Delta t$ 时刻的壁面切应力,

$$\tau_{wi}^{n+1} = \rho \nu_T \frac{u_{i,Nr+1}^{n+1}}{\Delta r_{cNr+1}}; \Delta r_{cNr+1} \text{ 为管壁与邻近点的径向}$$

距离差, $\Delta r_{cNr+1} = D/2 - r_{cNr+1}$ 。

在 Vardy 和 Hwang 模型中, 由式(7)和式(8)组成的方程组, 其系数矩阵为 $2Nr \times 2Nr$ 的稀疏矩阵, 求解该模型时需要计算该矩阵的逆。Zhao 和 Ghidaoui^[19]分别通过相加和相减式(7)和式(8)解耦该方程组, 得到两个方程组为:

$$\varepsilon C_{u1j} u_{i,j-1}^{n+1} - (a/g + \varepsilon C_{u2j}) u_{i,j}^{n+1} + \varepsilon C_{u3j} u_{i,j+1}^{n+1} = 0.5(K_{ni,j} - K_{pi,j}) \quad (11)$$

$$H_i^{n+1} - \theta C_{qj} q_{i,j-1}^{n+1} + \theta C_{qj} q_{i,j}^{n+1} = 0.5(K_{pi,j} + K_{ni,j}) \quad (12)$$

式(11)的系数矩阵为三对角矩阵, 对式(12)的系数矩阵进行代数操作, 使其也成为三对角系数矩阵, 再利用计算三对角矩阵十分高效的 Thomas 算法^[25]对式(11)和式(12)进行求解, 进而得到轴向速度、节点压力水头和径向通量。

Korbar 等^[21]通过数值积分方程式(12)得到压力的表示式如下:

$$H_i^{n+1} = \frac{1}{2}(H_{i-1}^n + H_{i+1}^n) + \frac{a}{2g}(U_{i-1}^n - U_{i+1}^n) - (1 - \varepsilon) \frac{2a\Delta t}{\rho g D}(\tau_{wi-1}^n - \tau_{wi+1}^n) \quad (13)$$

其中, 平均速度 U_i 是通过了对轴向速度分布进行数值积分得到的, 即 $U_i = \frac{1}{A} \sum_{j=2}^{Nr+1} 2\pi r_{cj} u_{i,j} \Delta r_{j-1}$ 。

Korbar 方法的具体计算步骤为: 首先, 利用 Thomas 算法计算式(11), 从而得到轴向速度; 其次, 根据已知的轴向速度, 计算各节点的壁面切应力并通过数值积分得到各节点的断面平均速度; 然后, 代入式(13)中计算各节点压力水头, 如果需要计算径向通量, 将已知的节点压力水头代入式(12)中, 由于已知 $q_{i,1}=0$ (假设管道流动沿管轴对称, 管轴线处的径向通量为零), 通过显式迭代计算径向通量。

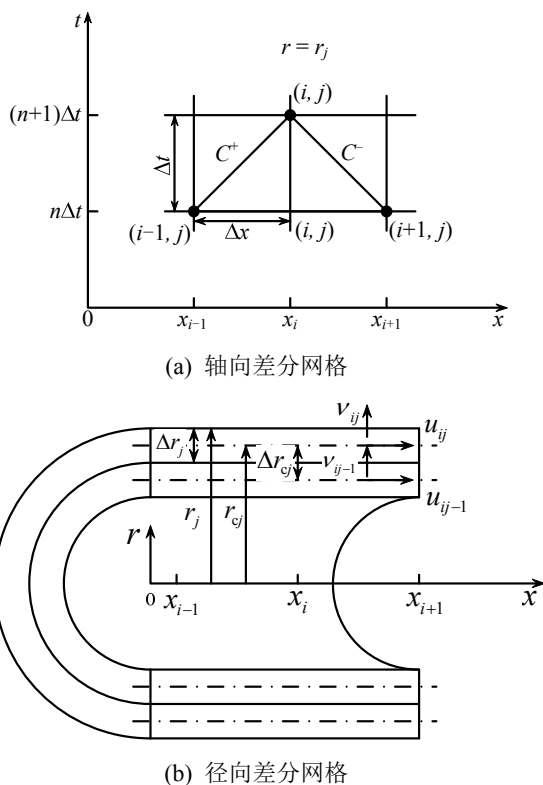


图 1 轴向和径向差分网格

Fig.1 Axial and radical difference grid systems

1.3 FVS-MOC 准二维计算方法

由于式(13)与通过一维特征方程式(9)和式(10)相加得到的计算节点压力的方程形式相同,同时如果径向的节点足够多,数值积分得到的节点断面平均流量等于一维的节点流量。基于上述条件,本文直接利用一维显式方法(即一维显式 FVS 方法)计算准二维模型中的节点压力和流量。

FVS-MOC 方法的具体计算步骤为: 首先, 利用 Thomas 算法计算式(11), 从而得到轴向速度; 其次, 根据已知的轴向速度, 计算各节点的管道壁面切应力; 然后, 利用 FVS 方法计算节点流量 Q 和节点压力水头 H ; 最后, 将已知的节点压力水头代入式(12)中通过显式迭代计算径向通量。

一维管道瞬变流控制方程式(3)和式(4)的矩阵形式表示如下:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = J(U) \quad (14)$$

其中, 守恒变量 U 、系数矩阵 A 、源向量 J 分别表示为:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{gA} \\ gA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi D \tau_w}{\rho} \end{bmatrix} \quad (15)$$

带有源项的瞬变流方程一般采用分步法^[26]进行求解, 具体为: 先求解无源项的偏微分方程, 然后将该方程的解作为初始条件, 求解带有源项的常微分方程, 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} &= 0, \\ \mathbf{U}(x, t=0) &= \mathbf{U}_0(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\mathbf{U}}(x, t) \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{dt} &= \mathbf{J}(\mathbf{U}), \\ \mathbf{U}(x, t) &= \bar{\mathbf{U}}(x, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{U}(x, t) \quad (17)$$

式中: $\mathbf{F}$ 为数值通量向量, 由齐次性知, $\mathbf{F}(\mathbf{U})=\mathbf{A}\mathbf{U}$; $\mathbf{U}_0(x)$ 为给定初始条件的已知变量, 即稳态的流量和压力; $\bar{\mathbf{U}}(x, t)$ 为式(17)在 t 时刻给定的初始值; $\mathbf{U}(x, t)$ 为在给定初值 $\bar{\mathbf{U}}(x, t)$ 条件下的式(17)的解。

FVS 算法的计算网格采用 Sun 等^[24]提出的与特征线法计算节点相对应的网格系统, 见图 2。该计算网格的节点布置与特征线法计算节点相对应, 对于内部节点, 每段的端点为控制体(control volume, 简称 CV)的中点, 相邻控制体的边界被称为控制面(control surface, 简称 CS), 在边界处, 控制体的中点与一个控制面重合。

式(16)在 $x-t$ 坐标系上的计算区域 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ 积分可以得到控制体 i 的解, 表示如下:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}] \quad (18)$$

式中： $\mathbf{F}_{i+1/2}$ 为在 $x_{i+1/2}$ 处的数值通量向量； Δt 为时间间隔； Δx 为区间长度； n 为上标，表示时间步数； i 为下标，表示计算节点位置。

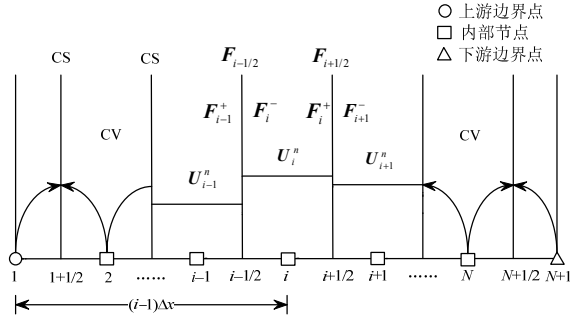


图2 FVS 格式的网格划分

Fig.2 Grid for FVS scheme

将式(14)中系数矩阵 A 进行对角化为:

$$A = KAK^{-1} \quad (19)$$

式中: A 为由矩阵 A 的特征值 ($\lambda_1 = -a$ 和 $\lambda_2 = +a$) 所组成的对角矩阵; K 为对应特征值 λ_k ($k=1,2$) 的特征向量组成的矩阵; K^{-1} 为矩阵 K 的逆阵。

根据特征值符号的不同, 将对角矩阵 A 分开, 表示如下:

$$A = A^+ + A^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

同样地, 系数矩阵 A 可以分解为:

$$A = A^+ + A^- \quad (21)$$

其中:

$$A^+ = KA^+K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & \frac{aB}{2} \\ \frac{a}{2B} & \frac{a}{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$A^- = KA^-K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{2} & \frac{aB}{2} \\ \frac{a}{2B} & \frac{-a}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中, B 为常数, $B = \frac{a}{gA}$ 。

根据 F 的齐次性, 即 $F(U) = AU$, 数值通量 $F(U)$ 可以分解为:

$$F^+ = A^+U = \begin{bmatrix} \frac{aH}{2} + \frac{aBQ}{2} \\ \frac{aH}{2B} + \frac{aQ}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$F^- = A^-U = \begin{bmatrix} \frac{aBQ}{2} - \frac{aH}{2} \\ \frac{aH}{2B} - \frac{aQ}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

对式(16)应用一阶迎风差分格式表示如下:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+(U_i^n - U_{i-1}^n) -$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} A^-(U_{i+1}^n - U_i^n) =$$

$$U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F^+(U_i^n) + F^-(U_{i+1}^n) -$$

$$F^+(U_{i-1}^n) - F^-(U_i^n)] \quad (26)$$

将式(26)与式(18)进行对比可知, 界面通量 $F_{i+1/2}$ 和 $F_{i-1/2}$ 在控制面 $i+1/2$ 和 $i-1/2$ 上可分别表示为:

$$F_{i+1/2} = F^+(U_i^n) + F^-(U_{i+1}^n) \quad (27)$$

$$F_{i-1/2} = F^+(U_{i-1}^n) + F^-(U_i^n) \quad (28)$$

在边界处, 利用雷诺不变性, 边界方程表示如下:

$$H_1^{n+1} - BQ_1^{n+1} = H_2^n - BQ_2^n \quad (29)$$

$$H_{N+1}^{n+1} + BQ_{N+1}^{n+1} = H_N^n + BQ_N^n \quad (30)$$

2 数值试验及结果分析

2.1 试验基本参数

在水库-管道-阀门系统上, 本文提出的 FVS-MOC 准二维计算方法同 Zhao-Ghidaoui 方法和 Korbar 方法在准确性和计算效率方面进行了比较。试验的具体参数为: 上游水库水位 $H_0=40.0$ m, 管道长度 $L=120$ m, 管径 $D=0.50$ m, 水锤波速 $a=1200$ m/s, 流量 $Q_0=1.80$ m³/s, 运动粘度系数 $\nu=1.14 \times 10^{-6}$ m²/s, 雷诺数 $Re=4.02 \times 10^6$ 。瞬变流是由下游阀门突然关闭产生的。

对于三种方法在准确性和计算效率方面的比较, 本文采用了三种网格数(分别是 $N_x \times N_r=30 \times 60$, $N_x \times N_r=30 \times 90$ 和 $N_x \times N_r=30 \times 120$)和四种时间差值格式(分别是全隐式时间差值格式($\epsilon; \theta$) = (1.0; 1.0), 部分隐式时间差值格式($\epsilon; \theta$) = (1.0; 0.75), ($\epsilon; \theta$) = (0.75; 1.0)和($\epsilon; \theta$) = (0.75; 0.75))。

2.2 准确性比较

由于 FVS-MOC 方法是基于 Korbar 方法提出的改进方法, 并且, 文献[20]表明 Zhao-Ghidaoui 方法和 Korbar 方法在准确性方面的差异非常小, 因而, 在计算的准确性方面, 本文仅将 FVS-MOC 方法同 Korbar 方法进行了比较。具体操作如下: 在不同的网格数和时间差值格式情况下, 分别利用 FVS-MOC 方法和 Korbar 方法进行数值模拟计算, 从而得到两种方法的模拟结果(包括节点压力水头、流量、节点的壁面切应力和轴向速度分布), 并通过计算得到两种方法的模拟结果的最大差值的百分比。

图3为FVS-MOC方法同Korbar方法以及一维FVS方法模拟结果对比图。该图模拟的是阀门处的压力变化,其中准二维计算方法采用网格数($N_x \times N_r = 30 \times 90$),时间差值格式为 $(\varepsilon; \theta) = (0.75; 0.75)$ 。从图3可以看出,FVS-MOC方法得到的计算结果同Korbar方法得到的结果基本相同;并且任意节点处任意时刻的FVS-MOC方法同Korbar方法得到的压力水头的最大差值与 aU_0/g 的百分比(即 $\max_{1 \leq n \leq N_t} [\max_{1 \leq i \leq N_x} (|\Delta H_i^n|) \times 100] / (aU_0/g)$)为 $8.10 \times 10^{-3} \%$,其中 N_t 为总时间步数。然而,FVS-MOC方法同一维FVS方法在压力水头波动的峰谷处差异较大,主要是由于两种方法处理摩擦阻力项的不同引起的,一维FVS方法利用达西-维斯巴赫公式计算管道的摩擦阻力,其中阻力系数采用稳态值,流量为瞬时值,但是FVS-MOC方法利用壁面切应力计算摩擦阻力,其中壁面附近的速度梯度是通过计算瞬时的轴向速度分布得到的,因而,FVS-MOC方法相比一维FVS方法得到的结果更准确。

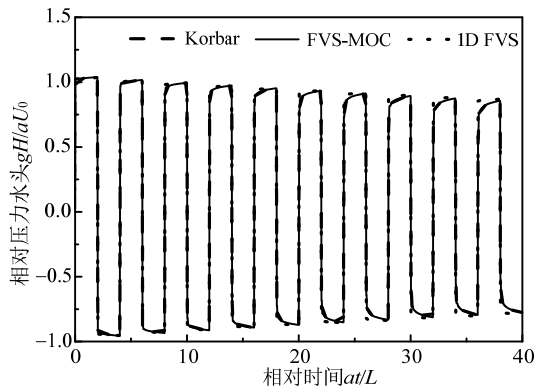


图3 FVS-MOC方法同Korbar方法和一维FVS算法计算阀门处的压力变化

Fig.3 Pressure head traces at valve calculated by FVS-MOC method, Korbar method and 1D FVS method

图4为不同网格数和时间差值格式下,FVS-MOC方法与Korbar方法在任意节点任意时刻的压力水头最大差值与 aU_0/g 的百分比。从该图中可以看出,权重系数 $(\varepsilon=1.0)$ 得到的压力水头最大差值的百分比远小于权重系数 $(\varepsilon=0.75)$ 得到的结果,并且与权重系数 θ 无关。这是因为当 $\varepsilon=1.0$ 时,Korbar方法利用式(13)计算得到的压力水头与上一时刻的相邻节点的壁面切应力无关,只与该时刻的节点平均速度有关,然而当 $\varepsilon=0.75$ 时,压力水头的计算也与上一时刻相邻节点的壁面切应力的差值有关,然而FVS-MOC方法计算压力水头直接利用一维FVS

方法,没有考虑上一时刻相邻节点的壁面切应力,从而导致了当 $\varepsilon=0.75$ 时,与Korbar方法计算节点压力水头的差值增大。图4还可以看出,当径向计算节点数不断增加时,权重系数 $(\varepsilon=1.0)$ 得到的压力水头最大差值的百分比显著变小,然而权重系数 $(\varepsilon=0.75)$ 得到的压力水头最大差值的百分比变化不大,并且不同权重系数 θ 的结果基本相同。这是因为当 $\varepsilon=0.75$ 时,由上述分析知,两种方法计算压力水头的最大差值始终存在并且与径向节点数无关;然而当 $\varepsilon=1.0$ 时,两种方法计算压力水头都不考虑邻近节点的壁面切应力,并且随着径向节点的不断增多,轴向速度分布计算更准确,从而使得两种方法计算节点压力需用到的平均速度和壁面切应力计算更准确,使得两种方法得到的压力水头的差值显著减小。

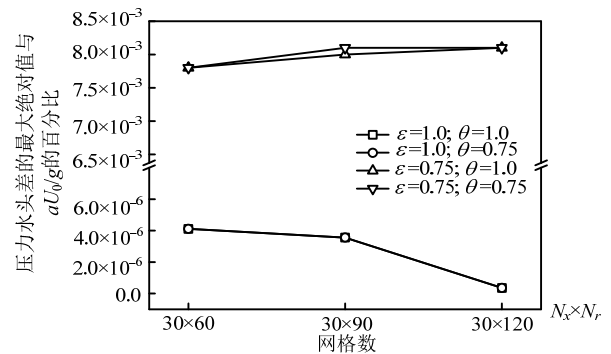


图4 FVS-MOC方法同Korbar方法计算不同网格数和时间差值格式下压力水头最大差值的百分比

Fig.4 Percentages of maximum pressure head difference calculated by FVS-MOC method and Korbar method using different grid numbers and temporal difference schemes

图5为不同网格数和时间差值格式下,FVS-MOC方法与Korbar方法在任意节点任意时刻的流量最大差值与 Q_0 的百分比(即 $\max_{1 \leq n \leq N_t} [\max_{1 \leq i \leq N_x} (|\Delta Q_i^n|) \times 100] / Q_0$)。从图5可以看出,与压力水头的最大差值的结果相似,权重系数 $(\varepsilon=1.0)$ 得到的流量最大差值的百分比远小于权重系数 $(\varepsilon=0.75)$ 得到的结果;随着径向计算节点数的不断增加,权重系数 $(\varepsilon=1.0)$ 得到的流量最大差值的百分比显著减小并且不同权重系数 θ 的结果基本相同,然而权重系数 $(\varepsilon=0.75)$ 得到的流量最大差值的百分比变化不大并且不同权重系数 θ 的结果不同,但差值相对较小。这是因为当 $\varepsilon=0.75$ 时,由上述分析知,两种方法得到的压力水头的最大差值始终存在并不随径向节点数的增加有显著改变,从而使得两种方法利用式(11)计算等号右侧的源项值的结果不

同, 进而影响轴向速度分布以及平均速度的计算, 同时不同的权重系数 θ 同样使得式(11)等号右侧的源项值不同; 然而当 $\varepsilon=1.0$ 时, 两种方法得到的压力水头的最大差值较小并随着径向节点数的增加而显著减小, 从而使得两种方法利用式(11)计算轴向速度分布的差异较小, 进而流量的最大差值较小并随径向节点的不断增加而减小。

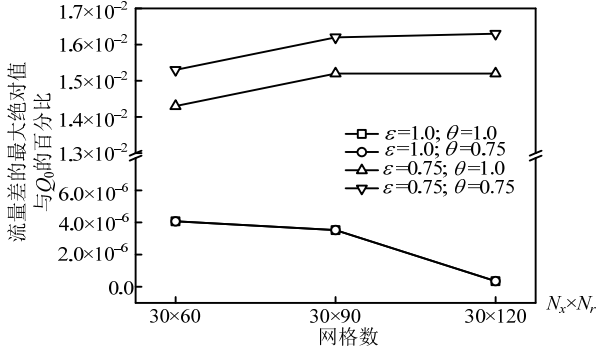


图5 FVS-MOC方法同Korbar方法计算不同网格数和时间差值格式下流量最大差值的百分比

Fig.5 Percentages of maximum discharge difference calculated by FVS-MOC method and Korbar method using different grid numbers and temporal difference schemes

图6为网格数($N_x \times N_r = 30 \times 90$)以及时间差值格式($\varepsilon; \theta = (0.75; 0.75)$)下, FVS-MOC方法同Korbar方法计算不同时刻管道中点处的壁面切应力。从该图中可以看出, FVS-MOC方法得到的计算结果同Korbar方法得到的结果基本相同; 并且任意节点处任意时刻的FVS-MOC方法同Korbar方法得到的壁面切应力的最大差值与 τ_w 的百分比(即 $\max_{1 \leq n \leq N_t} [\max_{1 \leq i \leq N_x} (|\Delta \tau_{wi}^n|) \times 100] / (\tau_{w0})$)为 $2.72 \times 10^{-2}\%$, 其中 τ_{w0} 为稳态的管道壁面切应力。

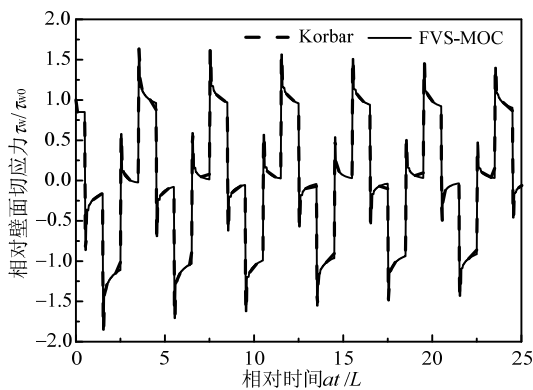


图6 FVS-MOC方法和Korbar方法计算管道中点处的壁面切应力变化

Fig.6 Wall shear stress traces at midpoint of pipe calculated by FVS-MOC method and Korbar method

图7为网格数($N_x \times N_r = 30 \times 90$)以及时间差值格式($\varepsilon; \theta = (0.75; 0.75)$)下, FVS-MOC方法与Korbar方法计算不同时刻管道中点处的轴向速度分布。从图中可以看出两种方法得到的结果基本相同, 同时任意节点任意时刻的FVS-MOC方法与Korbar方法得到的轴向速度的最大差值与 U_0 的百分比(即 $\max_{1 \leq n \leq N_t} [\max_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_r} (|\Delta u_{i,j}^n|) \times 100] / U_0$)为 $1.60 \times 10^{-2}\%$ 。

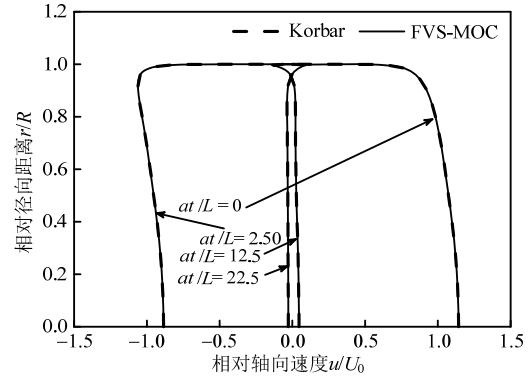


图7 FVS-MOC方法同Korbar方法计算不同时刻管道中点处的轴向速度分布

Fig.7 Axial velocity profiles at mid-point of pipe at different times calculated by FVS-MOC method and Korbar method

2.3 计算效率比较

由于准二维模型计算方法考虑了轴向速度分布, 因而增加了部分计算量, 使得准二维模型方法的计算时间远大于一维算法的计算时间, 因此, 本文只将FVS-MOC方法同Zhao-Ghidaoui方法和Korbar方法在计算效率方面进行了比较。具体操作如下: 在不同的网格数和时间差值格式的情况下, 分别记录三种方法的CPU计算时间, 多次记录求其平均值, 从而得到不同的网格数和时间差值格式下的FVS-MOC方法同Zhao-Ghidaoui方法和Korbar方法的CPU时间比。

图8为不同的网格数和时间差值格式下, FVS-MOC方法与Zhao-Ghidaoui方法计算的CPU时间比。从图8可以看出, FVS-MOC方法与Zhao-Ghidaoui方法的CPU时间比大约是0.95, 即FVS-MOC方法计算需要的CPU时间相比Zhao-Ghidaoui方法节约了5%。这是因为FVS-MOC方法利用显式方程计算节点压力和径向通量相比Zhao-Ghidaoui方法利用矩阵运算计算节点压力和径向通量的效率更高。因而, FVS-MOC方法相比Zhao-Ghidaoui方法计算更高效。

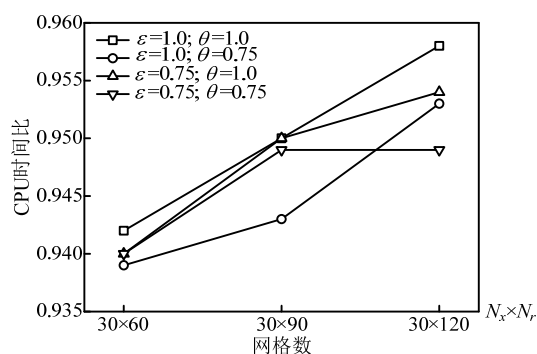


图8 FVS-MOC方法同Zhao-Ghidaoui方法计算不同网格数和时间差值格式下CPU时间比

Fig.8 CPU time ratios of FVS-MOC method and Zhao-Ghidaoui method using different grid numbers and temporal difference schemes

图9为不同的网格数和时间差值格式下，FVS-MOC方法与Korbar方法计算的CPU时间比。从图9可以看出，FVS-MOC方法与Korbar方法的CPU时间比大约是0.93，即FVS-MOC方法需要的计算时间相比Korbar方法节约了7%。这是因为FVS-MOC方法直接采用一维显式算法计算节点压力和流量相比Korbar方法计算节点压力时需要先通过数值积分轴向速度分布得到节点平均速度的效率更高。因而，FVS-MOC方法相比Korbar方法计算更高效。

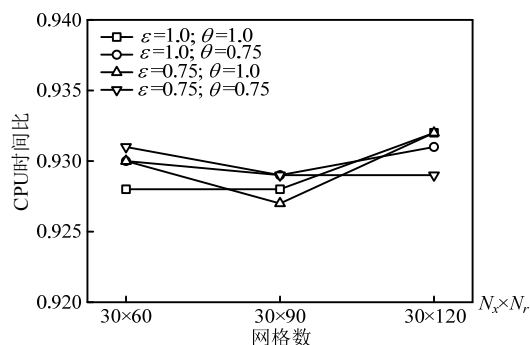


图9 FVS-MOC方法同Korbar方法计算不同网格数和时间差值格式下CPU时间比

Fig.9 CPU time ratios of FVS-MOC method and Korbar method using different grid numbers and temporal difference schemes

3 结论

本文提出了一种改进的准二维模型计算方法，即直接利用一维显式方法计算管道流量和压力，利用准二维模型的特征方程计算管道轴向的速度分布，利用显式方程计算径向通量。本文的一维显式方法采用FVS方法。在水库-管道-阀门系统中，该方法同Zhao-Ghidaoui方法和Korbar方法在准确性

和计算效率方面进行了比较，得到以下结论：

(1) FVS-MOC方法同Korbar方法得到的计算结果基本相同。但是，FVS-MOC方法的粘性项权重系数 ε 值的选取对计算结果的精度影响较大，当 $\varepsilon=1.0$ 时的计算结果相比其他 ε 值得到的结果更准确，径向通量项权重系数 θ 值对计算结果的精度影响较小。

(2) FVS-MOC方法同Korbar方法得到的计算结果的最大差值的百分比大于 $3.00 \times 10^{-2} \%$ 时，粘性项权重系数 ε 值的选取对计算结果的精度影响可忽略。

(3) FVS-MOC方法相比Zhao-Ghidaoui方法和Korbar方法的计算效率更高，在本文的数值试验中，该方法需要的CPU时间相比Zhao-Ghidaoui方法和Korbar方法分别节约了5%和7%。

因此，所提出的方法是一种准确并且高效的准二维模型计算方法，可适用于管道系统瞬变流的模拟计算。

参考文献：

- [1] 楼云锋, 曹源, 杨颜志, 等. 基于混合模型方法的大型输水隧道水锤冲击响应数值分析[J]. 工程力学, 2016, 33(2): 224—231.
Lou Yunfeng, Cao Yuan, Yang Yanzhi, et al. Application of hybrid modeling method to simulate water hammer impacts in ultra-large water conveyance tunnel [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(2): 224—231. (in Chinese)
- [2] 梁峰, 包日东. 输流管道含有内共振的横向受迫振动研究[J]. 工程力学, 2015, 32(4): 185—190.
Liang Feng, Bao Ridong. Transverse forced vibration with internal resonance of a pipe conveying fluid [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(4): 185—190. (in Chinese)
- [3] 李俊花, 孙昭晨, 崔莉. 一种新的长输管道泄漏监测方法[J]. 工程力学, 2009, 26(8): 205—209.
Li Junhua, Sun Zhaochen, Cui Li. A new leakage monitoring method for long-distance pipeline [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(8): 205—209. (in Chinese)
- [4] Chaudhry M H. Applied hydraulic transients [M]. 3rd ed. New York: Springer, 2014: 55.
- [5] Wylie E B, Streeter V L. Fluid Transients in systems [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1993: 41.
- [6] Ghidaoui M S, Zhao M, McInnis D A, et al. A review of water hammer theory and practice [J]. Applied Mechanics Reviews, 2005, 58(1): 49—76.
- [7] Bergant A, Simpson A R, Vitkovsky J. Developments in unsteady pipe flow friction modelling [J]. Journal of Hydraulic Research, 2001, 39(3): 249—257.

- [8] Brunone B, Karney B W, Mecarelli M, et al. Velocity profiles and unsteady pipe friction in transient flow [J]. *Journal of Water Resources Planning Management*, 2000, 126(4): 236—244.
- [9] Vardy A E, Brown J M B. Transient, turbulent, smooth pipe friction [J]. *Journal of Hydraulic Research*, 1995, 33(4): 435—456.
- [10] Vardy A E, Brown J M B. Transient turbulent friction in fully rough pipe flows [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 270(1/2): 233—257.
- [11] Ohmi M, Kyomen S, Usui T. Numerical analysis of transient turbulent flow in a liquid line [J]. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1985, 28(239): 799—806.
- [12] Vardy A E, Hwang K L. A characteristics model of transient friction in pipes [J]. *Journal of Hydraulic Research*, 1991, 29(5): 669—684.
- [13] Silva-Araya W F, Chaudhry M H. Computation of energy dissipation in transient flow [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1997, 123(2): 108—115.
- [14] Pezzinga G. Quasi-2D model for unsteady flow in pipe networks [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1999, 125(7): 676—685.
- [15] Pezzinga G, Cannizzaro D. Analysis of Transient Vaporous in pipes by a distributed 2D model [J]. 2014, 140(6): 04014019-1—04014019-10.
- [16] Tazraei P, Riasi A. Quasi-two-dimensional numerical analysis of fast transient flows considering non-Newtonian effects [J]. *Journal of Fluids Engineering*, 2016, 138(1): 011203-1—011203-8.
- [17] Jang T U, Wu Y B, Xu Y, et al. Efficient quasi-two-dimensional water hammer model on a characteristic grid [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2016, 142(12): 06016019-1—06016019-6.
- [18] Zhao M. Numerical solutions of quasi-two-dimensional models for laminar water hammer problems [J]. *Journal of Hydraulic Research*, 2016, 54(3): 360—368.
- [19] Zhao M, Ghidaoui M S. Efficient quasi-two-dimensional model for water hammer problems [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003, 129(12): 1007—1013.
- [20] Korbar R, Virag Z, Šavar M. Truncated method of characteristics for quasi-two-dimensional water hammer model [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2014, 140(6): 04014013-1—04014013-7.
- [21] Korbar R, Virag Z, Šavar M. Efficient solution method for quasi two-dimensional model of water hammer [J]. *Journal of Hydraulic Research*, 2014, 52(4): 575—579.
- [22] 陈明, 伍建林, 王建华. 气液固三相管流耦合水击振动特性的参数影响分析[J]. *工程力学*, 2015, 32(2): 233—240.
Chen Ming, Wu Jianlin, Wang Jianhua. Analysis of parametric influence of a coupled water hammer on the vibration characteristics of gas-liquid-solid three-phase flow in pipelines [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(2): 233—240. (in Chinese)
- [23] Geng Y F, Wang Z L, Jin S. FVS scheme for severe transient flow in pipe networks [J]. *Journal of Hydrodynamics, Series B*, 2005, 17(5): 621—628.
- [24] Sun Q, Wu Y B, Xu Y, et al. Flux vector splitting schemes for water hammer flows in pumping supply systems with air vessels [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology (New Series)*, 2015, 22(3): 69—74.
- [25] Anderson J D. *Computational fluid dynamics: the basics with applications* [M]. New York: McGraw-Hill, 1995, 534—538.
- [26] Toro E F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics* [M]. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 265—282.