

文章编号: 1000-4750(2020)01-0145-07

非等向固结砂土极小应变刚度的超弹性模型

张 帅, 程晓辉, 王天麟

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 反映砂土极小应变刚度的 Hardin-Richart 公式主要是基于等向固结的实验数据, 但是天然土体基本都是处于非等向固结状态。实验研究表明, 随着非等向程度的加深, Hardin-Richart 公式对土体刚度的估算偏差越大, 误差最大可超过 20%。3 种类型的超弹性模型能够反映土体极小应变刚度随应力水平增大而增大的幂律关系, 但仅有 HE1 模型具有弹性剪胀等特殊的正剪耦合特性, 对土体非等向固结状态下的刚度规律趋势预测正确。HE1 模型对土体非等向固结状态下的刚度规律预测结果受到其参数取值的影响, 但总体而言与实验结果总结的规律一致。

关键词: 非等向固结; 极小应变刚度; Hardin-Richart 公式; 超弹性模型; 砂土

中图分类号: TU441.4 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2019.02.0058

VERY-SMALL-STRAIN STIFFNESS OF ANISOTROPICALLY CONSOLIDATED SAND: A HYPERELASTIC MODEL

ZHANG Shuai, CHENG Xiao-hui, WANG Tian-lin

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The Hardin-Richart formula used to characterize the very-small-strain stiffness of sands, is mainly based on the experimental data under the isotropic consolidation stress state. The natural soils are anisotropically consolidated. The previous experimental studies have shown that the error of the Hardin-Richart formula will magnify up to 20% as the anisotropic consolidation stress ratio increases. All three different hyperelastic models developed in the soil mechanics literature can reflect the power-law relationship of very-small-strain soil stiffness with respect to the increased mean stress level. But only the HE1 model, accounting for the normal-shear coupling effect including elastic shear dilatation, is capable of modelling the effects of anisotropic consolidation stress ratio on the very-small-strain stiffness. The prediction results of the HE1 model are affected by the values of the model parameters, but generally consistent with the experimental results.

Key words: anisotropic consolidation; very-small-strain stiffness; Hardin-Richart formula; hyperelastic model; sand

作为典型的颗粒材料, 砂土具有显著的压硬性, 其刚度表现受到实际应力水平的影响。土体刚度的这种特性在工程应用中需要得到充分的重视, 尤其是在土体应力有较大变化时的应用场景中, 例如基坑的开挖/回填^[1-2]、土石坝的蓄水/泄水^[3]、地震波沿深度方向的传递^[4-5]和地下结构抗震^[6]等。基

坑开挖相关的研究表明, 如果不考虑土体刚度随深度(即应力水平)的变化, 将大幅度低估挡土墙的侧向变形^[1]。膨胀土地基中的桩-土共同作用研究发现, 土体刚度对于桩身轴力和桩头位移都有很大影响^[7]。

室内实验(波速法、共振柱、扭剪和三轴等)

收稿日期: 2019-02-25; 修改日期: 2019-05-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(51778338)

通讯作者: 张 帅(1990—), 男, 河南人, 博士生, 主要从事岩土力学及地下结构研究(E-mail: zhsh09@outlook.com).

作者简介: 程晓辉(1971—), 男, 江苏人, 副教授, 博士, 博导, 主要从事岩土力学及地下结构研究(E-mail: chengxh@tsinghua.edu.cn);

王天麟(1996—), 男, 湖北人, 硕士生, 主要从事岩土力学及地下结构研究(E-mail: wangtl18@mails.tsinghua.edu.cn).

研究表明,土体在极小应变(小于 10^{-5})条件下处于准弹性状态,其模量为常数^[8-10]。可记此时的剪切模量为极小应变剪切模量 G_0 或最大剪切模量 G_{\max} 。土体的极小应变模量是深入研究小应变模量或者动模量的前提,具有极为重要的科研及应用价值。

土体的极小应变模量受到许多因素的影响,主要有固结应力水平、密实度、颗粒形状、粒径级配、微观结构等。对于同一种砂土而言,主要是密实度和固结应力水平的影响,最常用的回归公式是 Hardin-Richart 公式^[11]:

$$G_0 = A \cdot F(e) \cdot (p')^m \quad (1)$$

式中, $F(e)$ 是孔隙率 e 的函数,主要反映了堆积密度对于土体刚度的影响,常取为 $(e_g - e)^2 / (1 + e)$ 。 A 、 m 和 e_g 是土体参数,综合反映了颗粒形状、粒径级配、微观结构等因素的影响。 $(p')^m$ 主要反映了土体刚度随应力水平而非线性增长的特征。理想弹性球的经典赫兹接触给出 $G_0 \sim (p')^{1/3}$ 的关系,但是天然土体颗粒之间的接触与理想弹性球体相互间的接触有一定区别,土力学实验得出的 m 值大多分布在 $1/3 \sim 3/5$ 的区间内^[12-13]。

实验室实验中的相关研究大多是基于等向固结状态,而实际地基大都处于非等向固结状态。因此,基于实验室实验的 Hardin-Richart 公式直接应用于实际工程中,会带来一定的误差。许多实验研究表明,非等向固结下的土体刚度并不符合 Hardin-Richart 公式的预测,从而需要增加一定的修正系数。

Hardin-Richart 等经验公式属于 Cauchy 弹性模型,在循环荷载等复杂应力路径下可能表现出能量非保守特性,即弹性能量是与应力路径相关的,这在理论上不正确,同时也会引起不正确的残余变形^[14]。而弹性力学中的超弹性模型也称为 Green 弹性模型,其应力-应变关系始终从一个自由能函数的微分形式给出,完全满足热力学基本定律的要求,在不同材料的本构关系研究中得到广泛应用^[15-16]。另外,超弹性模型在处理正剪耦合时比较方便,例如剪胀性、应力引起的各向异性、主应力旋转等^[17-18]。因此研究非等向固结,尤其是高度非等向状态下的土体刚度,采用超弹性模型更为合适。Houlsby 等研究了能反映土体刚度随平均应力变化的超弹性模型^[16],但非等向固结状态的影响并没有

得到讨论。

本文首先对以往学者完成的非等向固结状态下的砂土极小应变刚度实验进行研究分析,得出有较多实验数据支持的经验规律;然后针对 3 种能够反映土体刚度随应力水平增大规律的超弹性模型进行研究,发现其中仅有 HE1 模型对砂土非等向固结状态下的刚度规律趋势预测正确;最后,对于 HE1 模型进行了参数影响分析。

1 非等向固结实验研究分析

关于非等向固结状态的研究,一般是考虑常规三轴固结状态,即 $\sigma'_1 \neq \sigma'_2 = \sigma'_3$,记此时的固结应力比 $k_{13} = \sigma'_1 / \sigma'_3$ 。非等向固结状态下的土体极小应变剪切模量,可以由下列形式的修正 Hardin-Richart 公式给出:

$$G_0 = A \cdot F(e) \cdot (p')^m \cdot R \quad (2)$$

其中: R 为修正系数,取值由 k_{13} 决定。实验研究发现,土体剪切刚度主要受相应平面内的两个主应力的影响^[19],因此 Yu 和 Richart^[20] 建议采用 $(\sigma'_1 + \sigma'_3) / 2$ 来代替 p' 对刚度做归一化:

$$G_0 = A \cdot F(e) \cdot \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right)^m \cdot R^* \quad (3)$$

并基于 Ottawa 砂和 Toyoura 砂实验数据给出了经验公式:

$$R^* = 1 - 0.3k_n^{1.5} \quad (4)$$

其中,归一化固结应力比 $k_n = \frac{k_{13} - 1}{k_{13,\max} - 1} =$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}}, k_{13,\max}$$

是土体能达到的最大固结应力比。

可以看出,该修正系数 R^* 随固结应力比 k_{13} 是单调递减的。

另外,也有人采用 $\sqrt{\sigma'_1 \sigma'_3}$ 或 σ'_3 来进行归一化。为了便于统一比较,我们将这些实验数据(参见表 1)以及经验公式统一换算为式(2),然后研究其修正系数 R 随 k_{13} 的变化规律,如图 1 所示,显然经典 Hardin-Richart 公式意味着 R 恒定为 1。

在使用 p' 进行归一化时, Yu-Richart 公式(式(3)和式(4))换算为式(2)后给出的修正系数 R 随着固结应力比 k_{13} 的增大先是略微增大,而后较大幅度下降。总的来说,当固结应力比小于某阈值时,修正

系数 R 基本为 1; 当固结应力比相对较大时, 修正系数 R 迅速降低, 降低幅值可超过 20%。这与 Kuribayashi 等关于 Toyoura 砂^[21](图中三角符号)、Tatsuoka 等关于 Toyoura 砂^[22](图中未列出)以及

Bellotti 等关于 Ticino 砂^[23](图中方块符号)的实验研究结果相一致。另外, DEM 数值模拟^[24]、极小应变条件下的弹性模量的实验研究^[25]和循环荷载条件下的剪切模量的实验研究^[26]同样得出了类似的结论。

表 1 前人实验总结

Table 1 Summary of previous experiments

序号	归一化参量	非线性参数 m 固结应力比 k_{13} m 值	实验方法	实验所用砂	土样状况	k_{13} 范围	参考文献
1	p'	0.5	共振柱	Toyoura 砂	饱和	1~4.3	Kuribayashi 等 ^[19]
2	$(\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$	0.5	共振柱	Ottawa 砂、Toyoura 砂	干	1~4.5	Yu 和 Richart ^[18]
3	$\sqrt{\sigma'_1 \sigma'_3}$	≈ 0.5	波速法	Ticino 砂	干	1~3.03	Bellotti 等 ^[21]
4	p'	≈ 0.5	波速法	Blue 砂	饱和	1~2.5	Payan 等 ^[24]

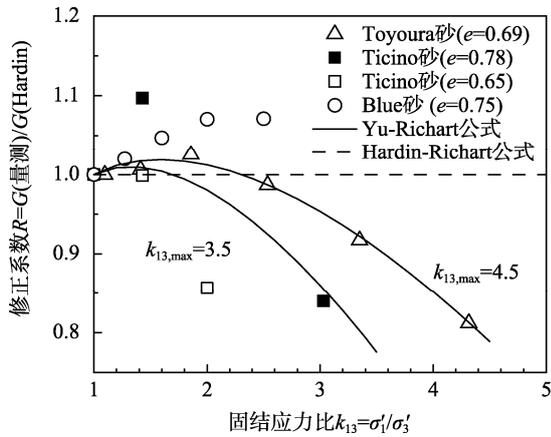


图 1 不同固结应力比下的土体极小应变模量修正系数
Fig.1 Comparison of the relationships between shear modulus ratio and stress ratio by various investigations

虽然也有实验研究认为修正系数 R 随着 k_{13} 的增大而增大^[27-29], 如 Payan 等^[27]关于 Blue 砂的实验(图中圆形符号), 但这些研究的 k_{13} 值范围普遍较小, 一般小于 2.5。鉴于 Yu-Richart 的研究系统性更强, 且得到多数相关研究的重复验证, 因此我们主要采用其研究结果来作为参考。考虑到 Yu-Richart 建议了新的归一化方式, 因此, 本文中两种归一化方式的结果都予以呈现。

2 超弹性模型

2.1 超弹性模型简介

本文所有应力均指有效应力, 所有应变均指弹性应变(极小应变条件下, 弹性应变等于总应变)。 σ_{ij} 为 Cauchy 有效应力张量, ε_{ij} 为弹性应变张量; δ_{ij} 为 Kronecker delta 记号, 上述 2 阶张量均遵循哑标的爱因斯坦求和约定。应力不变量有平均应力 $\sigma_v = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ 及剪应力 $\sigma_s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$, 其中 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_v \delta_{ij}$

为偏应力张量。同样, 应变不变量有体积应变 $\varepsilon_v = \varepsilon_{ii}$ 及剪应变 $\varepsilon_s = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$, 其中 $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij}$ 为偏应变张量。在常规三轴条件下, 一般采用如下形式 $\sigma'_1 = \sigma_{11}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$ 的简写; 此时的应力和应变不变量有 $\sigma_v \equiv p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$, $\sigma_s \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}q = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma'_1 - \sigma'_3)$, $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$, $\varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ 。

超弹性模型是指材料具有 Helmholtz 自由能 F (又可称为弹性势能)或 Gibbs 自由能 E (又可称为应变余能), 其应力-应变关系可以从相应的自由能函数的微分中推导得出。这两种形式的自由能可以通过勒让德变换来互相推导, 但是对于某些函数形式的自由能, 可能并不存在简单函数形式的另一种对应的自由能函数形式。

对于 Helmholtz 自由能形式的超弹性模型有:

$$\sigma_v = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v}, \quad \sigma_s = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_s} \quad (5)$$

进而得出其应力-应变关系为:

$$\begin{pmatrix} d\sigma_v \\ d\sigma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & J \\ J & 2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_s \end{pmatrix} \quad (6)$$

切线刚度矩阵中体积模量 $K = \frac{\partial \sigma_v}{\partial \varepsilon_v} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_v \partial \varepsilon_v}$, 剪切

模量 $2G = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_s \partial \varepsilon_s}$, 剪胀模量 $J = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_v} =$

$\frac{\partial \sigma_v}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_v \partial \varepsilon_s}$ 。极小应变剪切模量 G_0 就等于该切线剪切模量 G 。

对于 Gibbs 自由能形式的超弹性模型有:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial E}{\partial \sigma_v}, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial E}{\partial \sigma_s} \quad (7)$$

进而得出其应力-应变关系为:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\sigma_v \\ d\sigma_s \end{pmatrix} \quad (8)$$

切线柔度矩阵中 $c_1 = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_v} = \frac{\partial^2 E}{\partial \sigma_v \partial \sigma_v}$, $c_2 = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \sigma_s} = \frac{\partial^2 E}{\partial \sigma_s \partial \sigma_s}$, $c_3 = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_s} = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \sigma_v} = \frac{\partial^2 E}{\partial \sigma_v \partial \sigma_s}$ 。柔度矩阵求逆得出刚度矩阵:

$$\begin{pmatrix} K & J \\ J & 2G \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1 c_2 - c_3^2} \begin{pmatrix} c_2 & -c_3 \\ -c_3 & c_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

考虑 Hardin-Richart 公式给出的刚度随平均应力的幂律关系, 其对应的超弹性模型大致有 3 种^[16], 如表 2 所示。其中应力和应变不变量的定义及其与三轴状态下的不变量的关系参见 2.1 节; 参数 n 反映了土体刚度随应力水平的增长, 与 Hardin-Richart 公式中的 m 有关, 具体关系 2.1.1 节、2.1.2 节、2.1.3 节将推导给出; ξ 或 ζ 与泊松比有关; B 或 C 影响着土的刚度模量的大小。

表 2 3 种能反映 Hardin-Richart 公式的超弹性模型
Table 2 Three types of hyperelastic models compatible to the Hardin-Richart formula

模型	Helmholtz 自由能	Gibbs 自由能	剪切应力比
HE1	$F = B\varepsilon_v^n (\varepsilon_v^2 + \xi\varepsilon_s^2)$	无简单形式	$\frac{q}{p'} \leq \sqrt{\frac{3\xi}{2n(n+2)}}$
HE2	$F = B(\varepsilon_v^2 + \xi\varepsilon_s^2)^n$	$E = C(\sigma_v^2 + \zeta\sigma_s^2)^{n/(2n-1)}$	$\frac{q}{p'} = \frac{\sqrt{6}\xi\varepsilon_s}{2\varepsilon_v}$
HE3	无简单形式	$E = B\sigma_v^n (\sigma_v^2 + \xi\sigma_s^2)$	$\frac{q}{p'} \leq \sqrt{\frac{3(n+2)}{-2n\xi}}$

2.1.1 HE1 模型

首先得出 HE1 超弹性模型的应力不变量为:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= B(n+2)\varepsilon_v^{n+1} + Bn\xi\varepsilon_s^2\varepsilon_v^{n-1}, \\ \sigma_s &= 2B\xi\varepsilon_v^n\varepsilon_s \end{aligned} \quad (10)$$

进而可以得出其切向刚度矩阵, 其中:

$$G = \xi B \varepsilon_v^n \quad (11)$$

如果考虑等向固结状态下:

$$p' = (n+2)B\varepsilon_v^{n+1} \quad (12)$$

$$G = \xi(n+2) \frac{-n}{n+1} B^{\frac{1}{n+1}} (p')^{\frac{n}{n+1}} \quad (13)$$

式中, $\frac{n}{n+1}$ 相当于 Hardin-Richart 公式中的 m ,

$\xi(n+2) \frac{1}{n+1} B^{\frac{1}{n+1}}$ 相当于 $A \cdot F(e)$, 其中密实度的影

响可通过将 B 设定为密实度相关函数来体现。可见, HE1 模型对于等向固结土体, 能够给出完全符合 Hardin-Richart 公式的预测结果。

接下来我们推导三轴条件下的刚度规律,

记 $k_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_v}$, 则剪切应力比 $\frac{q}{p'} = \frac{\sqrt{1.5}\sigma_s}{\sigma_v} =$

$$\frac{\sqrt{6}\xi k_s}{n+2+n\xi k_s^2} \leq \sqrt{\frac{3\xi}{2n(n+2)}},$$

可以看出 HE1 模型对于土体能达到的最大剪切应力比有一个限值。土体相应的固结应力比为:

$$k_{13} = \frac{3(n+2+n\xi k_s^2) + 2\sqrt{6}\xi k_s}{3(n+2+n\xi k_s^2) - \sqrt{6}\xi k_s} \quad (14)$$

将土体剪切模量中的应变项消去, 得出:

$$G = \left[\xi(n+2) \frac{-n}{n+1} B^{\frac{1}{n+1}} \right] (p')^{\frac{n}{n+1}} \left[\frac{n+2+n\xi k_s^2}{n+2} \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad (15)$$

与式(2)对比, 可以得出 HE1 模型给出的 Hardin-Richart 公式修正系数为:

$$R = \left[\frac{n+2+n\xi k_s^2}{n+2} \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad (16)$$

和式(14)共同绘图可以得出其随固结应力比变化的规律。

2.1.2 HE2 模型

对于 HE2 超弹性模型, 其两种自由能形式给出的结果是等价的, 在此仅给出 Helmholtz 自由能形式的结果。首先得出其应力不变量为:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 2nB(\varepsilon_v^2 + \xi\varepsilon_s^2)^{n-1}\varepsilon_v, \\ \sigma_s &= 2n\xi B(\varepsilon_v^2 + \xi\varepsilon_s^2)^{n-1}\varepsilon_s \end{aligned} \quad (17)$$

进而得出其切向刚度矩阵, 其中:

$$G = n\xi B(\varepsilon_v^2 + \xi\varepsilon_s^2)^{n-2} [\varepsilon_v^2 + (2n-1)\xi\varepsilon_s^2] \quad (18)$$

在等向固结状态下同样可以得出与 HE1 类似的符合经典 Hardin-Richart 公式的结果, 在此不再重复。

常规三轴条件下, 剪切应力比 $\frac{q}{p'} = \frac{\sqrt{6}\xi\varepsilon_s}{2\varepsilon_v}$, 可

见 HE2 模型对于土体能达到的最大剪切应力比没有限制。将 p' 和 q 的公式代入刚度式中消去应变, 即可得出剪切刚度与剪切应力比的关系:

$$G = \frac{\xi}{2} (2nB)^{\frac{1}{2n-1}} (p')^{\frac{2n-2}{2n-1}} \frac{1 + \frac{2(2n-1)q^2}{3\xi p'^2}}{\left(1 + \frac{2q^2}{3\xi p'^2}\right)^{\frac{n}{2n-1}}} \quad (19)$$

式中, $\frac{2n-2}{2n-1}$ 相当于 Hardin-Richart 公式中的 m , 将 $\frac{q}{p'} = \frac{3k_{13}-3}{k_{13}+2}$ 代入其中, 即可得出其与固结应力比 k_{13} 的关系。

2.1.3 HE3 模型

首先得出 HE3 超弹性模型的应变不变量为

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= B[(n+2)\sigma_v^{n+1} + n\xi\sigma_s^2\sigma_v^{n-1}], \\ \varepsilon_s &= 2B\xi\sigma_v^n\sigma_s \end{aligned} \quad (20)$$

进而得出其切向柔度矩阵, 求逆可得出其切向刚度矩阵, 其中

$$G = \frac{1}{4\xi B} (p')^{-n} \frac{1 + \frac{2n(n-1)\xi}{3(n+2)(n+1)} \left(\frac{q}{p'}\right)^2}{1 - \frac{2n\xi}{3(n+2)} \left(\frac{q}{p'}\right)^2} \quad (21)$$

式中: $-n$ 相当于 Hardin-Richart 公式中的 m , 因此 n 的取值一般为 $-1/3 \sim 3/5$, 即小于 0。考虑到体应变不能为负, 则由式(20)可知 $\frac{\sigma_s}{\sigma_v} \leq \sqrt{\frac{n+2}{-n\xi}}$, 即

$$\frac{q}{p'} \leq \sqrt{\frac{3(n+2)}{-2n\xi}}$$

可以看出 HE3 模型对于土体能达到的最大剪切应力比也有一个限值。

2.2 模拟对比分析

式(16)、式(19)、式(21)中给出了修正 Hardin-Richart 公式中的修正系数 R , 将其随固结应力比 k_{13} 的变化绘制出来如图 2 所示。图中同时给出了经典 Hardin-Richart 公式以及 Yu-Richart 经验公式的结果。

HE1 模型给出的修正系数 R 随着固结应力比 k_{13} 的增大而衰减, 与 Yu-Richart 经验公式给出的趋势较为一致; 而 HE2 和 HE3 模型给出的 R 都随着固结应力比 k_{13} 的增大而持续增大, 与实验规律不一致。需要说明的是, 图示曲线具体数值仍然受到模型参数的影响, 但并不改变这种明显不同的趋势。从模型本身角度而言, 这些不同的趋势主要受到两个因素的影响: 一个是弹性剪胀或剪缩特性, 另一个是剪切刚度的影响因素。从式(10)可以看出, HE1 模型

具有弹性剪胀特性, 即保持平均应力不变条件下剪切, 能使得弹性体积应变减小; 而式(11)表明其剪切刚度仅受弹性体积应变影响, 因而非等向固结这种剪切能够使得剪切刚度变小。式(17)显示 HE2 模型同样具有弹性剪胀特性, 但式(18)显示其剪切刚度同时受到弹性体积应变和弹性剪切应变的影响, 非等向固结状态下这两者共同作用使得剪切刚度增大。而式(20)显示 HE3 模型则具有弹性剪缩特性, 不能反映非等向固结状态下土体刚度的衰减规律。

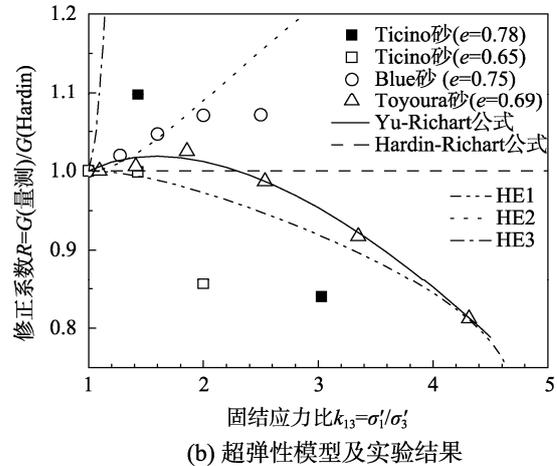
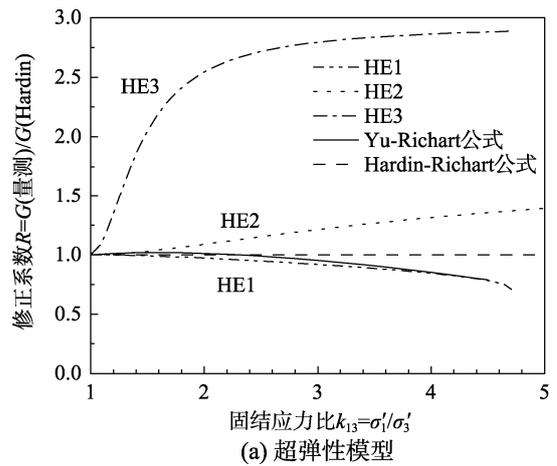


图 2 不同固结应力比下的土体极小应变模量修正系数
Fig.2 The relationships between shear modulus ratio and stress ratio

考虑到 HE2 和 HE3 预测的趋势与实验结果有较大差异, 因此我们仅对 HE1 进行定量的参数分析。在做此分析时, 主要对比一下 HE1 的预测与 Yu-Richart 公式的结果, 因此在绘图时采用 Yu-Richart 的建议: 纵坐标刚度的归一化时采用 $(\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$, 即为式(3)中的 R^* ; 横坐标固结应力比的归一化时采用式(4)中的 k_n 。HE1 模型对土体能达到的最大固结应力比有一个限值, 我们采用这个限

值对其固结应力比进行归一化,从而得到 HE1 模型中相应的 k_n 。

HE1 模型的 3 个参数中: B 只影响土体刚度的大小,不影响该相对规律; n 的具体数值可通过实验数据很精确地标定,且对于表 1 所总结的砂土都大致为 1; ζ 的具体数值难以通过常规土力学实验来精确标定,所以有必要进行参数分析。将 Yu-Richart 公式与 HE1 模型的结果对比,如图 3 所示。HE1 模型的结果受到其参数 ζ 的影响: ζ 越大时,修正系数 R^* 整体越小。HE1 的结果与 Yu-Richart 公式总体比较吻合。在较低应力比时,HE1 的结果要略小于 Yu-Richart 公式;在较高应力比时,HE1 的结果要略大于($\zeta=2$ 或 $\zeta=3$)或略小于($\zeta=4$)Yu-Richart 公式。

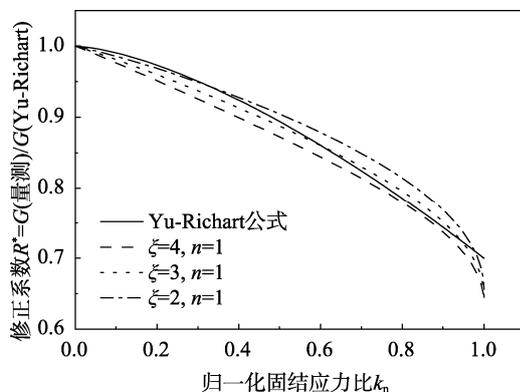


图 3 HE1 模型不同固结应力比下的模量修正系数

Fig.3 The relationships between shear modulus ratio and stress ratio by HE1 model

3 结论

(1) 3 种类型的超弹性模型能够反映等向固结状态下土体刚度随应力水平增大而增大的幂律关系,但仅有 HE1 模型对土体非等向固结状态下的刚度规律趋势预测正确。这主要是因为其具有包括弹性剪胀在内的特殊的正剪耦合特性。

(2) HE1 模型对土体非等向固结状态下的刚度规律预测结果受到其参数 ζ 取值的影响,但总体而言与实验结果总结的规律一致。

(3) 下一步工作,考虑具有非线性刚度地基与地下结构的弹性动力相互作用,以便反映在边界条件下的地基非等向固结极小应变刚度对地下结构抗震性能的影响。

参考文献:

[1] Clayton C R I. Stiffness at small strain: research and practice [J]. Géotechnique, 2011, 61(1): 5–37.

- [2] 温科伟, 刘树亚, 杨红坡. 基于小应变硬化土模型的基坑开挖对下穿地铁隧道影响的三维数值模拟分析[J]. 工程力学, 2018, 35(增刊): 80–87.
- Wen Kewei, Liu Shuya, Yang Hongpo. Three-dimensional numerical simulation analysis of the influence of pit excavation based on Hardening soil-small strain model for metro tunnel [J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(Suppl): 80–87. (in Chinese)
- [3] 张凌凯, 王睿, 张建民, 等. 不同应力路径下堆石料的动力变形特性试验研究[J]. 工程力学, 2019, 36(3): 114–120.
- Zhang Lingkai, Wang Rui, Zhang Jianmin, et al. Experimental study on dynamic deformation characteristics of rockfill materials under different stress paths [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(3): 114–120. (in Chinese)
- [4] Towhata I. Seismic Wave Propagation in Elastic Soil with Continuous Variation of Shear Modulus in the Vertical Direction [J]. Journal of the Japanese Geotechnical Society Soils & Foundation, 1996, 36(1): 61–72.
- [5] 李志远, 李建波, 林皋, 等. 饱和层状地基条形基础动刚度的精细积分算法[J]. 工程力学, 2018, 35(6): 15–23.
- Li Zhiyuan, Li Jianbo, Lin Gao, et al. Precise integration method for dynamic stiffness of strip foundation on saturated soil [J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(6): 15–23. (in Chinese)
- [6] 刘晶波, 王东洋, 谭辉, 等. 隧道纵向地震反应分析的整体式反应位移法[J]. 工程力学, 2018, 35(10): 17–26.
- Liu Jingbo, Wang Dongyang, Tan Hui, et al. Integral response displacement method for longitudinal seismic response analysis of tunnel structure [J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(10): 17–26. (in Chinese)
- [7] 张大峰, 杨军, 李连友, 等. 考虑膨胀土地基膨胀率和刚度沿深度变化的桩-土共同作用解析解[J]. 工程力学, 2016, 33(12): 86–93.
- Zhang Dafeng, Yang Jun, Li Lianyou, et al. Analytical solution of pile-soil interaction in expansive soil foundation with expansion rate and stiffness variation along the pile [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(12): 86–93. (in Chinese)
- [8] 顾晓强, 杨峻, 黄茂松, 等. 砂土剪切模量测定的弯曲元、共振柱和循环扭剪试验[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(4): 740–746.
- Gu Xiaoqiang, Yang Jun, Huang Maosong, et al. Combining bender element, resonant column and cyclic torsional shear tests to determine small strain shear modulus of sand [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(4): 740–746. (in Chinese)
- [9] 杨同帅, 叶冠林, 顾琳琳. 上海软土小应变三轴试验及

- 本构模拟[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(10): 1930—1935.
- Yang Tongshuai, Ye Guanlin, Gu Linlin. Small-strain triaxial tests and constitutive modeling of Shanghai soft clays [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(10): 1930—1935. (in Chinese)
- [10] Kong G, Li H, Yang G, et al. Investigation on shear modulus and damping ratio of transparent soils with different pore fluids [J]. Granular Matter. 2018, 20(1): 1—8.
- [11] Hardin B O, Richart F E. Elastic wave velocities in granular soils [J]. Journal of the Soil Mechanics & Foundations Division, 1963, 89(2): 33—66.
- [12] Oztoprak S, Bolton M D. Stiffness of sands through a laboratory test database [J]. Géotechnique, 2013, 63(1): 54—70.
- [13] 王海波, 徐明, 宋二祥. 考虑土体小应变特性的一种实用本构模型[J]. 工程力学, 2011, 28(6): 60—65.
- Wang Hai-bo, Xu Ming, Song Erxiang. A practical constitutive model of soil considering the behavior at small strains [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(6): 60—65. (in Chinese)
- [14] 郭晓霞, 迟世春, 林皋. 邓肯 E-B 模型弹性部分能量守恒的探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(增刊 1): 3114—3121.
- Guo Xiaoxia, Chi Shichun, Lin Gao. Discussion on energy conservation for elastic component of Duncan-Chang E-B model [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(Suppl1): 3114—3121. (in Chinese)
- [15] 李雪冰, 危银涛. 一种改进的 Yeoh 超弹性材料本构模型[J]. 工程力学, 2016, 33(12): 38—43.
- Li Xuebing, Wei Yintao. An improved Yeoh constitutive model for hyperelastic material [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(12): 38—43. (in Chinese)
- [16] Housley G T, Amorosi A, Rojas E. Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation [J]. Géotechnique, 2005, 55(5): 383—392.
- [17] 陈志辉, 程晓辉. 饱和黏土不排水抗剪强度各向异性的热力学本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(5): 836—846.
- Chen Zhihui, Cheng Xiaohui. Thermodynamic constitutive model for anisotropic undrained shear strength of saturated clays [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(5): 836—846. (in Chinese)
- [18] 程晓辉, 陈志辉. 纯主应力旋转条件下饱和黏土累积变形的热力学模型分析[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(9): 1581—1590.
- Cheng Xiaohui, Chen Zhihui. Thermodynamic modeling of accumulated deformation of saturated clays under pure principal stress rotation [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(9): 1581—1590. (in Chinese)
- [19] Roesler S K. Anisotropic shear modulus due to stress anisotropy[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1979, 105(7): 871—880.
- [20] Yu P, Richart F E. Stress ratio effects on shear modulus of dry sands [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, 110(3): 331—345.
- [21] Kuribayashi E, Iwasaki T, Tatsuoka F. Effects of stress-strain conditions on dynamic properties of sands [J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1975(242): 105—114.
- [22] Tatsuoka F, Iwasaki T, Fukushima S, et al. Stress conditions and stress histories affecting shear modulus and damping of sand under cyclic loading [J]. Soils and Foundations, 1979, 19(2): 29—43.
- [23] Bellotti R, Jamiolkowski M, Presti D C F L, et al. Anisotropy of small strain stiffness in Ticino sand [J]. Géotechnique, 1996, 46(1): 115—131.
- [24] Gu X, Yang J, Huang M. DEM simulations of the small strain stiffness of granular soils: effect of stress ratio [J]. Granular Matter, 2013, 15(3): 287—298.
- [25] Hoque E, Tatsuoka F. Effects of stress ratio on small-strain stiffness during triaxial shearing [J]. Géotechnique, 2004, 54(7): 429—439.
- [26] Ueno K, Kuroda S, Hori T, et al. Elastic shear modulus variations during undrained cyclic loading and subsequent reconsolidation of saturated sandy soil [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, 2019(116): 476—489.
- [27] Payan M, Khoshghalb A, Senetakis K, et al. Small-strain stiffness of sand subjected to stress anisotropy [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2016, 2016(88): 143—151.
- [28] 袁晓铭, 孙静. 非等向固结下砂土最大动剪切模量增长模式及 Hardin 公式修正[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(3): 264—269.
- Yuan Xiaoming, Sun Jing. Model of maximum dynamic shear modulus of sand under anisotropic consolidation and revision of Hardin's formula [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(3): 264—269. (in Chinese)
- [29] Jafarian Y, Javdanian H, Haddad A. Dynamic properties of calcareous and siliceous sands under isotropic and anisotropic stress conditions [J]. Soils and Foundations. 2018, 58(1): 172—184.