

纤维增强复合板中声弹 Lamb 波的波结构分析

刘宏业¹, 刘 申¹, 吕 炎², 何存富², 周丽红¹

(1. 上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海 200093; 2. 北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘 要: 基于线性三维弹性理论和“增量变形力学”理论, 采用勒让德正交多项式展开法, 推导了在水平和垂直方向施加初应力时, 沿纤维增强复合板的非主对称轴方向传播的声弹 Lamb 波的波动方程, 并对波动方程进行数值求解。为了验证方法的准确性, 将该文方法求解的各向同性材料的相速度频散曲线与 Disperse[®] 软件的计算结果进行比较, 两者吻合良好。以单层单向纤维增强复合材料板为例, 计算了无初应力状态下的波结构应力曲线, 并与应力自由边界初始条件的一致性进行了比较。研究了水平和垂直方向初应力效应对 Lamb 波频散曲线的影响。针对声弹效应较为敏感的 Lamb 波 A_0 模式, 着重分析了初应力效应对波结构位移分布曲线的影响。

关键词: 纤维增强复合板; 声弹; Lamb 波; 正交多项式; 波结构

中图分类号: TB332 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2019.09.0565

WAVE STRUCTURE ANALYSIS OF ACOUSTOELASTIC LAMB WAVES IN FIBER REINFORCED COMPOSITE LAMINA

LIU Hong-ye¹, LIU Shen¹, LÜ Yan², HE Cun-fu², ZHOU Li-hong¹

(1. School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Based on the linear three-dimensional elasticity theory and "Incremental Deformation Mechanics" theory, the wave equations of acoustoelastic Lamb waves propagating along the non-principal symmetry axes direction of fiber reinforced composite lamina were derived by using Legendre orthogonal polynomial expansion method when the initial stresses were applied horizontally and vertically. The wave equations were solved numerically. In order to verify the accuracy of the method, the dispersion curves of phase velocity for isotropic material obtained by the author's method were compared with that from "Disperse[®]". The stress distributions of wave structure without initial stress were computed and compared with the initial condition of stress free boundary by taking a fiber reinforced composite lamina as an example. The effects of horizontal and vertical initial stresses on the dispersion curves of Lamb waves were studied. Because the Lamb wave A_0 mode was more sensitive to the acoustoelastic effect, the influence of initial stresses on the displacement distributions of wave structure was investigated.

Key words: fiber reinforced composite lamina; acoustoelasticity; Lamb waves; orthogonal polynomials; wave structure

纤维增强复合材料因其优异的力学性能, 近年被广泛应用于航空航天、军工、汽车、土木建筑等重要领域^[1-2]。由于纤维增强复合材料不同

组分之间固有的热学性能差异, 复合材料部件自身固化成型工艺的限制和服役过程中环境、工况载荷的变化, 使得该类材料结构中不可避免的会

收稿日期: 2019-09-25; 修改日期: 2020-02-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(51705325, 11872082, 11527801)

通讯作者: 刘宏业(1986—), 男, 山东人, 讲师, 博士, 硕导, 主要从事超声无损检测与结构健康监测研究 (E-mail: liuhongye@usst.edu.cn).

作者简介: 刘 申(1996—), 男, 安徽人, 硕士生, 主要从事超声无损检测研究 (E-mail: liushen223@foxmail.com);

吕 炎(1985—), 男, 河南人, 副教授, 博士, 硕导, 主要从事智能传感器与结构健康监测研究 (E-mail: lvyuan@bjut.edu.cn);

何存富(1958—), 男, 山西人, 教授, 博士, 博导, 主要从事超声无损检测新技术研究 (E-mail: hecunfu@bjut.edu.cn);

周丽红(1997—), 女, 上海人, 本科生, 主要从事智能系统工程研究 (E-mail: kk_magenta@163.com).

产生初应力。为实现纤维增强复合材料的出厂质量控制和结构健康监测,寻找一种可靠的无损检测方法至关重要。Lamb 波因其传播距离长、检测快速、经济高效等优势被广泛认为是适用于纤维增强复合材料无损检测和结构健康监测的重要技术之一^[3-6]。因此,研究初应力效应对纤维增强复合材料中潜在 Lamb 波传播模态的影响具有十分重要的意义。

在利用 Lamb 波对各向异性复合材料进行无损检测和结构健康监测时,通常采用分布式传感器阵列通过多点多传播路径对材料中的缺陷进行定位和成像。对于 Lamb 波在各向同性材料中的传播问题,由于各 Lamb 波模态传播特征各向一致性,往往不涉及“沿非主对称轴传播”的问题。周正干等^[7]推导了 Lamb 波在铝板中传播的理论模型,通过对铝板中 Lamb 波波结构的分析实现了薄铝板中缺陷的实验检测。张海燕等^[8]将拓扑成像用于各向同性板中盲孔缺陷的兰姆波检测,提出的成像方法对板类结构中非对称缺陷的 Lamb 波检测具有很强的适应能力。曹小杉等^[9]采用幂级数法研究了材料性能参数沿厚度方向连续变化的横观各向同性板中 Lamb 波的传播问题。王国锋等^[10]通过利用数值法对频散方程的求解,研究了圆管结构中纵向模态和周向 Lamb 波的频散曲线,对圆管中导波的传播机理及特征进行了分析。

但对于各向异性的纤维增强复合材料而言,Lamb 波多沿其非主对称轴方向传播。Ng 等^[11]采用三维有限元法对复合材料板中 A_0 模态的频散特性进行了分析。张海燕等^[12]通过建立各向异性界面层的弹簧模型,研究了不同界面条件对层状各向异性复合板中 Lamb 波频散特性以及位移分布的影响。徐春铃和王鑫伟^[13]采用谱有限元法,对复合材料板中对称模式与反对称模式下的 Lamb 波传播速度进行了求解,数值结果表明较好地模拟出 Lamb 波在复合材料板结构中的传播特性。何存富等^[14-15]关注沿非主对称轴方向传播的 Lamb 波,研究了单层与多层正交各向异性板中耦合 Lamb 波的传播特性。

考虑初应力的影响,“声弹”描述了弹性体中声波波速随初应力效应而改变的现象。Du 等^[16]考虑在初应力作用下压电材料中 Love 波的传播问题,通过对 Love 波的相速度进行数值计算,分析了初应力对 Love 波相速度的影响,研究结果亦表

明初应力作用对波的传播速度有重要影响。Navneet 等^[17]发展了声弹 Lamb 波的理论,研究了双轴应力场作用下初应力效应对各向同性板中声弹 Lamb 波传播速度的影响。Yu 和 Zhang^[18]利用“增量变形力学”理论,研究在初应力作用下空心圆柱体中导波的传播特性,发现初应力对扭转波和纵向波的频散特性和波结构特性的影响不同。同时,Yu 和 Li^[19]研究了由 Si_3N_4 和 Zinc 构成的功能梯度板中类 Lamb 波和 SH 波的传播问题,发现重力效应的影响可以忽略不计。

本文以线性三维弹性理论和“增量变形力学”理论为基础,利用勒让德正交多项式展开法对单层单向纤维增强复合材料板中沿非主对称轴传播的声弹 Lamb 波展开研究。通过分别考虑水平和垂直方向初应力的作用,研究了纤维铺层方向的改变对 Lamb 频散特性的影响。最后,着重对声弹 Lamb 波的波结构特性进行了分析。

1 问题描述与基本方程

基于线性三维弹性体理论,图 1 所示为水平方向无限长,上下表面均为自由表面的纤维增强复合材料板,对于任意纤维铺层方向的复合材料,其本构关系可以看作单斜晶系材料予以表示。其中, O 点是纤维增强复合材料板上表面任意一点,以此作为坐标原点, (x'_1, x'_2, x'_3) 是以材料晶轴方向建立的局部坐标系, (x_1, x_2, x_3) 是把 (x'_1, x'_2, x'_3) 坐标系绕 x'_3 轴顺时针旋转 φ 角度得到的全局坐标系,复合板厚度为 h_0 。Lamb 波沿 x_1 轴方向传播。假定施加的水平初应力表示为 $S_{11} = -P$,垂直初应力表示为 $S_{33} = -Q$ 。

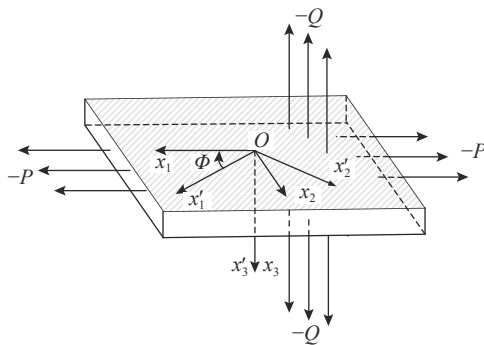


图 1 初应力作用下纤维增强复合板空间坐标示意图
Fig. 1 Schematic diagram of space coordinates for fiber reinforced composite plate under initial stress

在全局坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中,材料的弹性常数可以由局部坐标系 (x'_1, x'_2, x'_3) 下的弹性常数根据式 (1) 导出:

$$C_{mnop} = \gamma_{mi}\gamma_{nj}\gamma_{ok}\gamma_{pl}C'_{ijkl} \quad (1)$$

式中, γ_{ij} 为两坐标系下坐标轴 x'_i 和 x_j 之间的方向余弦。

在 $O-x_1x_2x_3$ 坐标系下, 单斜晶系材料的本构方程可表示为:

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + 2C_{16}\varepsilon_{12}, \\ T_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} + 2C_{26}\varepsilon_{12}, \\ T_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + 2C_{36}\varepsilon_{12}, \\ T_{23} &= 2C_{44}\varepsilon_{23} + 2C_{45}\varepsilon_{13}, \\ T_{13} &= 2C_{45}\varepsilon_{23} + 2C_{55}\varepsilon_{13}, \\ T_{12} &= C_{16}\varepsilon_{11} + C_{26}\varepsilon_{22} + C_{36}\varepsilon_{33} + 2C_{66}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (2)$$

在小变形假设下, 应变-位移关系为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

在无重力的影响下, 施加初应力的纤维增强复合板中控制波传播的方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial S_{xx}}{\partial x_3} + \\ S_{xx} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + (S_{zz} - S_{xx}) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} - S_{zz} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \\ S_{xx} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + (S_{zz} - S_{xx}) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \\ S_{zz} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式 (1)~式 (5) 中: T_{ij} 和 ε_{ij} 分别代表应力和应变; u_i 是位移量; C_{IJ} 是介质弹性常数; ρ 代表物质密

度。除非另行说明, 本文中所有小写下角标的取值为 1, 2, 3, 例如: i 和 j ; 而所有大写下角标的取值为 1, 2, ..., 6, 例如: I 和 J 。

考虑复合材料板的应力自由边界条件 (即在 $x_3=0$ 和 $x_3=h_0$ 处, $T_{33}=T_{13}=T_{23}=0$) 这里引入矩形窗函 $\pi(x_3)$:

$$\pi(x_3) = \begin{cases} 0, & \text{其他} \\ 1, & 0 \leq x_3 \leq h_0 \end{cases}$$

因为材料特性参数受到位置的约束, 故材料弹性常数 C_{IJ} 、物质密度 ρ 、水平方向初应力 S_{11} 和垂直方向初应力 S_{33} 均可通过矩形窗函数表示为位置的函数, 即:

$$\begin{aligned} C_{IJ} &= C_{IJ}\pi(x_3), \\ \rho &= \rho\pi(x_3), \\ S_{11} &= -P\pi(x_3), \\ S_{33} &= -Q\pi(x_3) \end{aligned} \quad (6)$$

对于纤维增强复合板, 假定沿 x_2 方向无限长, 则满足平面应变问题的条件, 质点位移的自由谐波解可以表示为:

$$\begin{aligned} u_1 &= U(x_3) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_2 &= V(x_3) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_3 &= W(x_3) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $U(x_3)$ 、 $V(x_3)$ 、 $W(x_3)$ 代表质点位移在 x_1 、 x_2 、 x_3 方向上的振动幅度; k 是波数; ω 是角频率。

将式 (2)、式 (3)、式 (5)~式 (7) 代入式 (4) 中, 得到单层纤维增强复合板中 Lamb 波传播的波动方程为:

$$\begin{aligned} \{[(C_{55} + 0.5P - 0.5Q)U'' + 0.5P'U' + (ik)^2C_{11}U] + \\ [C_{45}V'' + (ik)^2C_{16}V] + [(ik)(C_{13} + 0.5Q - 0.5P + C_{55}) \cdot \\ W' + 0.5(ik)P'W]\}\pi(x_3) + \\ [C_{55}U' + C_{45}V' + (ik)C_{55}W] \cdot [\delta(x_3 - a) - \delta(x_3 - b)] = \\ -\rho\omega^2 U\pi(x_3) \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \{[(C_{44} - 0.5Q)V'' + (ik)^2(C_{66} - 0.5P)V] + \\ [C_{45}U'' + (ik)^2C_{16}U] + [(ik)(C_{36} + C_{45})W']\}\pi(x_3) + \\ [C_{45}U' + C_{44}V' + (ik)C_{45}W] \cdot [\delta(x_3 - a) - \delta(x_3 - b)] = \\ -\rho\omega^2 V\pi(x_3) \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \{(ik)(C_{55} + C_{13} + 0.5P - 0.5Q)U' + (ik)(C_{45} + C_{36})V' + \\ [C_{33}W'' + (ik)^2(C_{55} + 0.5Q - 0.5P)W]\}\pi(x_3) + \\ [(ik)C_{13}U + (ik)C_{36}V + C_{33}W'] \cdot \\ [\delta(x_3 - a) - \delta(x_3 - b)] = -\rho\omega^2 W\pi(x_3) \end{aligned} \quad (8c)$$

此时的 Lamb 波由准对称模态、准反对称模态和准 SH 模态三种模式耦合而成。为得到式 (8a)、

式 (8b) 和式 (8c) 控制的耦合波动方程的解, 把质点在 x_1 、 x_2 、 x_3 方向上的振动幅度 $U(x_3)$ 、 $V(x_3)$ 和 $W(x_3)$ 用勒让德正交多项式展开^[20], 即:

$$\begin{aligned} U(x_3) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_{\alpha}^1 Q_{\alpha}(x_3), \\ V(x_3) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_{\alpha}^2 Q_{\alpha}(x_3), \\ W(x_3) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_{\alpha}^3 Q_{\alpha}(x_3) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $p_{\alpha}^i (i=1,2,3)$ 是展开系数。

$$Q_{\alpha}(x_3) = \sqrt{\frac{2\alpha+1}{h}} P_{\alpha}\left(\frac{2x_3}{h} - 1\right)$$

式中, P_{α} 代表第 α 阶勒让德正交多项式, 则 Q_{α} 形成了一组完备的正交归一的多项式组。就理论上而言, α 取从 0 到无穷大值, 但实际计算中 α 取一有限值 α_{Γ} , 更高阶的项认为是高阶小量, 可以忽略不计。

在式 (8a)、式 (8b) 和式 (8c) 两边同乘以 $Q_{\beta}^*(x_3)$, 然后各式对 x_3 从 0 到 h 积分, 利用勒让德正交多项式的正交性, 可以得到 $3(\alpha_{\Gamma}+1)$ 个方程:

$$\begin{aligned} (A_{11}^{\beta,\alpha} + \omega^2 M_{\alpha}^{\beta}) P_{\alpha}^1 + A_{12}^{\beta,\alpha} P_{\alpha}^2 + A_{13}^{\beta,\alpha} P_{\alpha}^3 &= 0, \\ A_{21}^{\beta,\alpha} P_{\alpha}^1 + (A_{22}^{\beta,\alpha} + \omega^2 M_{\alpha}^{\beta}) P_{\alpha}^2 + A_{23}^{\beta,\alpha} P_{\alpha}^3 &= 0, \\ A_{31}^{\beta,\alpha} P_{\alpha}^1 + A_{32}^{\beta,\alpha} P_{\alpha}^2 + (A_{33}^{\beta,\alpha} + \omega^2 M_{\alpha}^{\beta}) P_{\alpha}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

假定公式中的哑标适用爱因斯坦求和约定。 $A_{ij}^{\beta,\alpha}$ 和 M_{α}^{β} 是系数矩阵元素, α, β 的取值均为从 0~ α_{Γ} 范围内的正整数。要想使式 (10) 有非零解, 则式 (10) 系数矩阵的行列式必须为零, 即:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{\beta,\alpha} + \omega^2 M_{\alpha}^{\beta} & A_{12}^{\beta,\alpha} & A_{13}^{\beta,\alpha} \\ A_{21}^{\beta,\alpha} & A_{22}^{\beta,\alpha} + \omega^2 M_{\alpha}^{\beta} & A_{23}^{\beta,\alpha} \\ A_{31}^{\beta,\alpha} & A_{32}^{\beta,\alpha} & A_{33}^{\beta,\alpha} + \omega^2 M_{\alpha}^{\beta} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

式 (11) 的频散方程可以化归为一个特征值问题, 即:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{\beta,\alpha} & A_{12}^{\beta,\alpha} & A_{13}^{\beta,\alpha} \\ A_{21}^{\beta,\alpha} & A_{22}^{\beta,\alpha} & A_{23}^{\beta,\alpha} \\ A_{31}^{\beta,\alpha} & A_{32}^{\beta,\alpha} & A_{33}^{\beta,\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\alpha}^1 \\ p_{\alpha}^2 \\ p_{\alpha}^3 \end{pmatrix} = \omega^2 M_{\alpha}^{\beta} \begin{pmatrix} p_{\alpha}^1 \\ p_{\alpha}^2 \\ p_{\alpha}^3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

式 (12) 为声弹 Lamb 波沿纤维增强复合板任意方向传播时的频散方程。随着 α_{Γ} 值的增加, 其特征值亦会相应增加, 该问题只取随着 α_{Γ} 值的增

加, 数值上趋于收敛的解。

2 数值算例

基于上述理论公式, 利用 Mathematica[®] 软件编写程序对纤维增强复合板中沿任意方向传播的声弹 Lamb 波的波动方程进行求解。为验证计算结果的正确性, 首先将程序应用于无初应力的各向同性材料中, 并与 Disperse[®] 软件 (全局矩阵法) 的计算结果进行比较。然后以碳纤维增强复合材料 T300/914 单层板为例, 计算了无初应力各向异性板的波结构应力曲线, 验证了应力分布曲线的连续性及其边界应力与初始条件的一致性。最后, 分析了碳纤维增强复合材料 T300/914 单层板中初应力效应和纤维铺层方向改变时, 对 Lamb 波频散特性和波结构特性的影响。

2.1 方法的验证

为了验证本文方法所编写程序的正确性, 首先计算了无初应力作用时, 各向同性铝板 6061-T6 中 Lamb 波的频散曲线。所采用铝板的厚度为 1 mm, 其它材料特性参数如下: 密度 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 69 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。图 2 为本文方法所计算的铝板相速度频散曲线与 Disperse[®] 软件计算结果对比图, 其中实心圆点为本文计算结果, 实线为 Disperse[®] 计算结果。从图 2 可以看出, 两种方法计算结果吻合良好。

进一步验证本文方法对单斜晶系材料的适用性, 以单层单向碳纤维增强复合材料 T300/914 为例, 图 3 计算了无初应力情况下纤维铺层方向 0° 时, Lamb 波 A_0 模态在 300 kHz 频率下的应力波

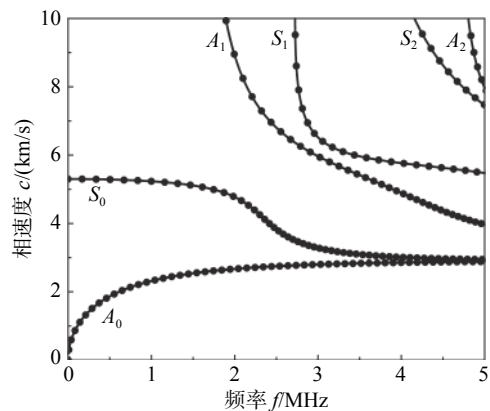


图 2 本文方法所计算的铝板相速度频散曲线与 Disperse[®] 软件计算结果对比图

Fig. 2 Comparison of phase velocity dispersion curves for aluminum plate by the authors' program with available data calculated from Disperse[®]

结构曲线, 算例中材料的密度 $\rho_f = 1560 \text{ kg/m}^3$, 厚度 $h_f = 1 \text{ mm}$, 弹性常数如表 1 所示^[15]。由图 3 可见, 应力分布曲线呈现出较好的连续性, 在上下表面处应力分量 T_{33} 、 T_{13} 、 T_{23} 均与应力自由边界条件一致。应力分量以 T_{11} 为主, 说明 Lamb 波在传播过程中 A_0 模态能流主要沿 x_1 方向传播。

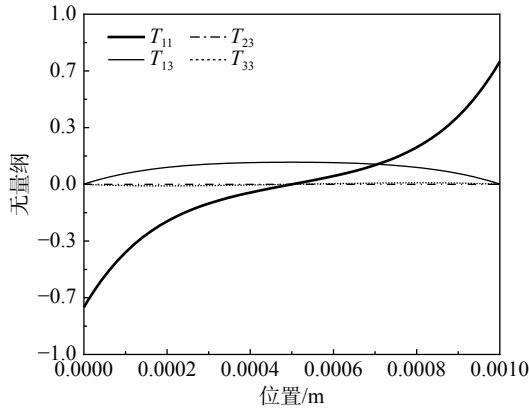


图 3 300 kHz 频率下 Lamb 波 A_0 模态的应力波结构曲线
Fig. 3 Stress distributions of Lamb wave A_0 mode at 300 kHz

表 1 碳纤维增强复合材料 T300/914 的弹性常数 C_{IJ} /GPa
Table 1 Elastic constants of carbon-fiber reinforced composites T300/914

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
143.8	6.2	6.2	13.3	6.5	13.3	3.6	5.7	5.7

2.2 计算结果的收敛性

考虑到截止项 α_T 对本文算例精确性的影响, 图 4 给出了碳纤维增强复合材料 T300/914 单层板在无初应力状态时, 截止项 α_T 由 3 变化到 7 时各模态频散曲线的收敛情况。从图 4 中可以看出, 当截止项 α_T 增大至 5 时, 各模态的频散曲线漂移已基本趋于稳定。图 5 是 S_0 模态频散曲线收敛过程的放大图。由图 5 可见, 随着截止项 α_T 由 3 到 7 变化, S_0 模态频散曲线的收敛过程存在着“跳跃”现象, 即当截止项 α_T 由 3 变化到 5 时, 计算结果迅速收敛; 而当截止项 α_T 由 5 变化到 7 时, 计算结果的收敛速度则十分缓慢。这主要是因为渐进求解方法计算结果的精度受截止项舍断累计误差的影响, 其收敛过程呈现非线性变化的特性, 当截止项取值较小时, 计算结果与理论真值之间误差较大。为保证本文所讨论频率范围内计算结果的精度, 下文算例中均取截止项 $\alpha_T = 7$ 进行计算。

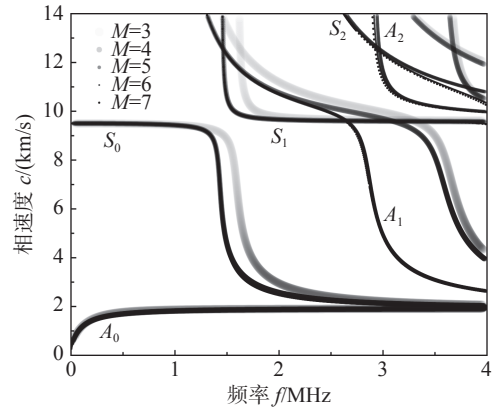


图 4 截止项 α_T 由 3 变化到 7 时各模态频散曲线的收敛
Fig. 4 Convergence of dispersion curves of all the modes with the change of cut-off term α_T from 3 to 7

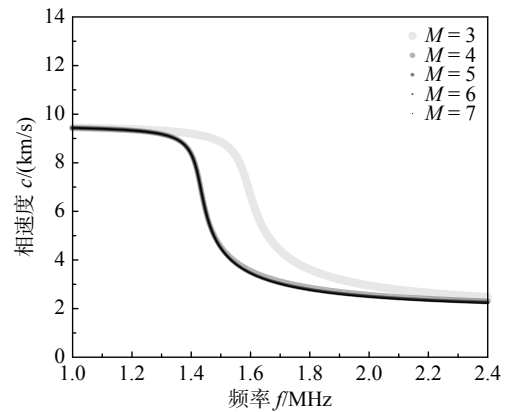


图 5 S_0 模态频散曲线收敛过程的放大图
Fig. 5 Zoom-in graph of convergence process of the S_0 mode

2.3 水平方向初应力效应

为研究水平方向上初应力对单层单向纤维增强复合板中沿任意(含非主对称轴)方向传播的耦合 Lamb 波的影响, 图 6 计算了沿水平方向施加 $\pm 1 \text{ GPa}$ 的初应力时, Lamb 波沿 0° 方向传播的相速度频散曲线。符号“+”表示在水平方向施加压应力, 符号“-”表示在水平方向施加拉应力。需要提及地是 1 GPa 的拉应力粗略地相当于该材料所能承受极限强度的 30%。由图 6 中可以看出, 对于低阶模态而言, 低频段水平初应力对 A_0 模态有着更为显著的影响, SH_0 模态其次, 对 S_0 模态的影响最小。高频段、高阶模态的截止频率在压应力的影响下呈现增加趋势(向右漂移), 在拉应力的影响下呈现减少趋势(向左漂移), 压应力与拉应力对高阶模态截止频率的影响效果相反。

上文分析已表明: A_0 模态在低频段受水平初应力的影响更为明显。鉴于 A_0 模态的易激发性和工程适用的潜在可能性, 下文着重对 A_0 模态的波

结构位移曲线在不同程度水平初应力作用时的变化情况进行分析。

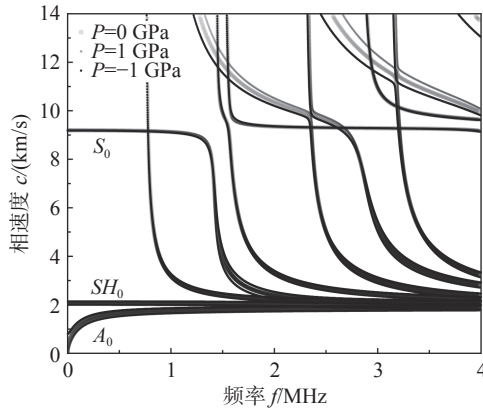


图6 ± 1 GPa 初应力作用下, 单层单向纤维增强复合材料板中沿 0° 方向传播的 Lamb 波相速度频散曲线

Fig. 6 Phase velocity dispersion curves of Lamb waves propagating along 0° direction in fiber reinforced composite lamina under the initial stresses of ± 1 GPa

图7、图8和图9分别为纤维增强复合板在0 GPa、0.8 GPa 和 1.6 GPa 水平初应力状态下, A_0 模态在激励频率 300 kHz 时沿 15° 、 45° 和 75° 方向(即局部坐标系 x'_1 轴与全局坐标系 x_1 轴的夹角分别为 15° 、 45° 和 75°) 传播的位移分布曲线。由图7、图8和图9可以看出, 在单层纤维增强复合材料板中, A_0 模态的质点位移以平面的法向位移分量 u_3 为主, 且 u_3 曲线关于板的中心平面呈对称特性, 而 u_1 和 u_2 曲线则呈现出反对称特性。不同于各向同性板中 A_0 模态传播的情形, 纤维增强复合材料板中 A_0 模态的质点位移包含了 u_1 、 u_2 和 u_3 三个分量, 暗示出此时的 A_0 模态实际上为准 Lamb 波模态。

进一步观察图7可以发现, 水平方向初应力效应对 u_2 曲线的影响最为明显, u_1 其次, 对 u_3 曲线的影响最弱。总体而言, Lamb 波 A_0 模态对水平初应力的影响更为敏感, 但由于 Lamb 波沿非主轴方向传播时各模态耦合效应的存在, 水平初应力主要通过影响 u_2 位移分量实现对 A_0 模态的调控。如图8所示, 当 Lamb 波 A_0 模态的传播方向变为 45° 时, 水平初应力的影响较 15° 时更加明显。对比图9和图7、图8则发现, 随着传播方向角度超过 45° 逐渐增大到 75° , 位移波结构 u_3 曲线发生了明显的向下弯曲。同时, u_2 位移曲线在靠近上下表面处的幅度逐渐减小, u_1 位移曲线靠近上下表面处的幅度逐渐增大, 表明此时耦合 Lamb

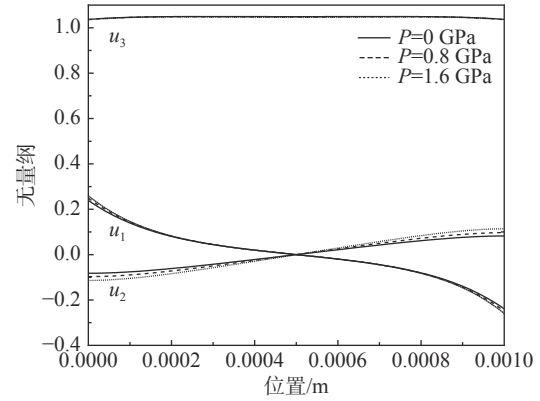


图7 传播方向为 15° 时, 频率 300 kHz 的 A_0 模态在不同水平初应力作用下的位移分布

Fig. 7 Displacement distributions of A_0 mode at 300 kHz along 15° propagation direction under different horizontal initial stresses

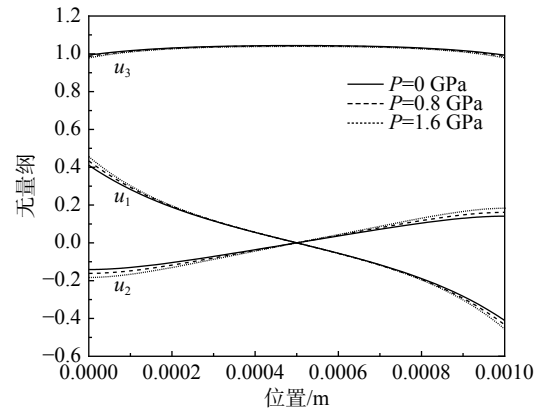


图8 传播方向为 45° 时, 频率 300 kHz 的 A_0 模态在不同水平初应力作用下的位移分布

Fig. 8 Displacement distributions of A_0 mode at 300 kHz along 45° propagation direction under different horizontal initial stresses

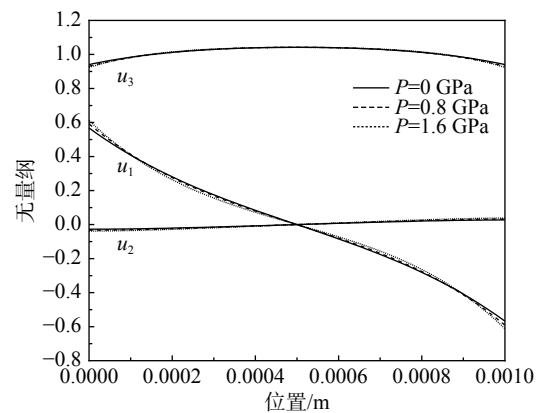


图9 传播方向为 75° 时, 频率 300 kHz 的 A_0 模态在不同水平初应力作用下的位移分布

Fig. 9 Displacement distributions of A_0 mode at 300 kHz along 75° propagation direction under different horizontal initial stresses

波的能量分布随着传播方向的改变而发生变化。考虑水平初应力的影响,当传播方向超过 45° 角时,水平初应力效应对波结构位移曲线的整体影响趋弱,该结果表明对于实际的无损检测和结构健康检测而言,水平初应力对沿不同方向传播的 Lamb 波存在不同程度的影响。

2.4 垂直方向初应力效应

本小节继续研究了垂直方向上初应力效应对单层单向纤维增强复合板中沿非主对称轴方向传播的耦合 Lamb 波的影响。如图 10 所示,分别计算了纤维增强复合板当在垂直方向受到 ± 1 GPa 初应力作用时的相速度频散曲线。由图 10 的计算结果可见,对于低阶模态而言,低频段垂直初应力依然对 A_0 模态有着最为明显的影响,对 SH_0 模态和 S_0 模态的影响较小。高频范围内对高阶模态的影响与图 6 的水平初应力效应相反。整体来看垂直初应力对高阶模态的影响较水平初应力更大,表现为高频段频散曲线的漂移程度更大。此外,压应力与拉应力的影响效果也完全相反。

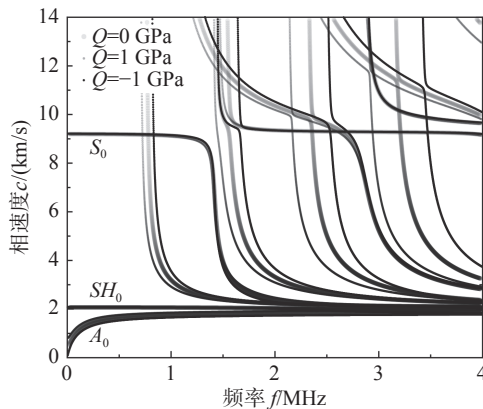


图 10 ± 1 GPa 垂直初应力作用下,单层单向纤维增强复合材料板中沿 0° 方向传播的 Lamb 波相速度频散曲线
Fig. 10 Phase velocity dispersion curves of Lamb waves propagating along 0° direction in fiber reinforced composite lamina under the vertical initial stresses of ± 1 GPa

同样地,针对垂直方向初应力效应,图 11、图 12 和图 13 着重对 A_0 模态在 300 kHz 频率下,沿不同方向传播时在不同程度垂直初应力状态下的波结构位移分布变化情况进行分析。由三幅图的结果可见,当 Lamb 波 A_0 模态分别沿 15° 、 45° 和 75° 方向传播时,随着垂直初应力由 0 GPa 向 0.8 GPa 和 1.6 GPa 变化,垂直初应力效应对 A_0 模态整体波结构位移分布曲线的影响有限,其变化量较水平初应力的影响要小。相较于垂直初应力

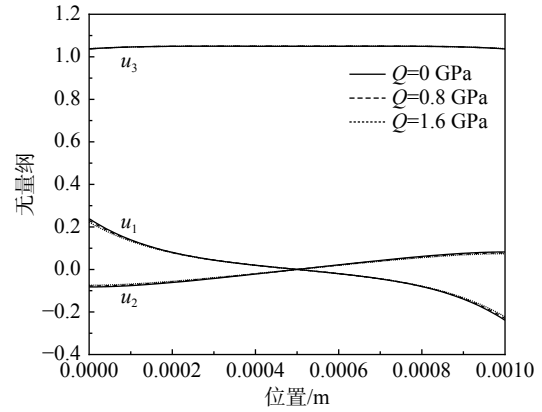


图 11 传播方向为 15° 时,频率 300 kHz 的 A_0 模态在不同垂直初应力作用下的位移分布

Fig. 11 Displacement distributions of A_0 mode at 300 kHz along 15° propagation direction under different vertical initial stresses

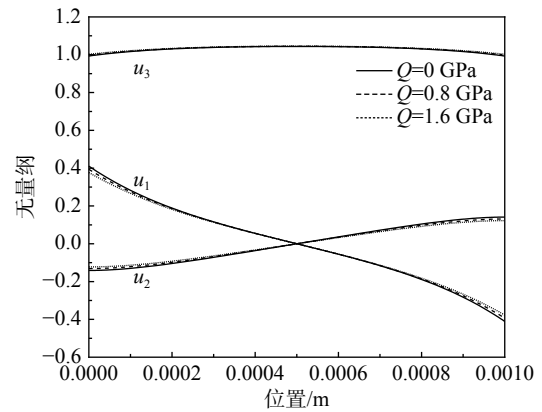


图 12 传播方向为 45° 时,频率 300 kHz 的 A_0 模态在不同垂直初应力作用下的位移分布

Fig. 12 Displacement distributions of A_0 mode at 300 kHz along 45° propagation direction under different vertical initial stresses

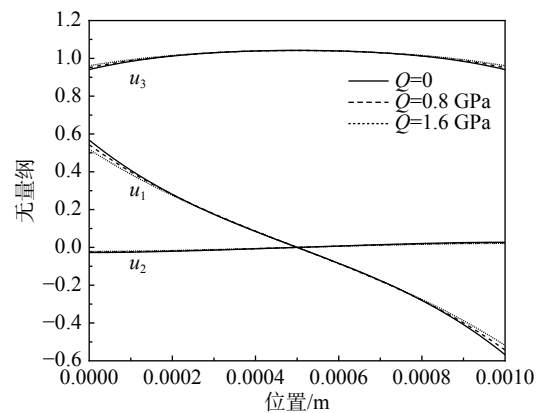


图 13 传播方向为 75° 时,频率 300 kHz 的 A_0 模态在不同垂直初应力作用下的位移分布

Fig. 13 Displacement distributions of A_0 mode at 300 kHz along 75° propagation direction under different vertical initial stresses

的影响, 纤维铺层方向的改变更能引起 Lamb 波 A_0 模态位移波结构曲线的改变, 即此时 Lamb 波 A_0 模态波结构的变化主要由 Lamb 波传播方向的改变引起, 而非垂直初应力的影响。相比较而言, 当 Lamb 波沿 45° 方向传播时, 垂直初应力效应对 u_1 和 u_2 的影响最为明显, 表明垂直初应力效应依然是通过耦合效应凭借影响 u_1 和 u_2 位移分量的大小, 实现对 A_0 模态沿板厚方向上的能量调控。

3 结论

采用勒让德正交多项式展开法, 研究了水平和垂直方向上施加初应力时, 沿纤维增强复合板非主对称轴方向传播的声弹 Lamb 波。通过本文的研究发现, 利用勒让德正交多项式展开法的正交特性, 可以把声弹 Lamb 波耦合波动方程的求解问题方便地转化为特征值问题, 合理的截止项取值使得对求解过程获得了很快的收敛解。对于单层单向纤维增强复合板来说, 在水平方向施加压应力与拉应力的影响效果相反, 但水平方向的拉应力与垂直方向压应力的影响效果基本相同。对于低阶的 Lamb 波 A_0 模态而言, 初应力效应主要通过耦合效应影响波结构位移分量的大小来实现 Lamb 波传播能量的调控。相较于纤维铺层方向的改变, 即 Lamb 波传播方向的变化, Lamb 波高阶模态的截止频率对初应力效应有着更为敏感的变化。对于纤维增强复合板来讲, 初应力效应对沿不同方向传播的 Lamb 波模态亦有着不同程度的影响。因此, 在无损检测和结构健康监测中, 应妥善考虑 Lamb 波接收角度和初应力效应的影响, 相关结论亦可进一步用于传感器监测网络的布局优化。

参考文献:

- [1] 邢丽英, 包建文, 礼嵩明, 等. 先进树脂基复合材料发展现状和面临的挑战[J]. 复合材料学报, 2016, 33(7): 1327 — 1338.
Xing Liying, Bao Jianwen, Li Songming, et al. Development status and facing challenge of advanced polymer matrix composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2016, 33(7): 1327 — 1338. (in Chinese)
- [2] Deng M, Yang J. Characterization of elastic anisotropy of a solid plate using nonlinear Lamb wave approach [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 308(1/2): 201 — 211.
- [3] Cao X, Shi J, Jin F. Cut-off frequencies of Lamb waves in various functionally graded thin films [J]. Applied Physics Letters, 2011, 99(12): 121907-1 — 121907-3.
- [4] 郑阳, 何存富, 周进节, 等. 超声 Lamb 波在缺陷处的二维散射特性研究 [J]. 工程力学, 2013, 30(8): 236 — 243.
Zheng Yang, He Cunfu, Zhou Jinjie, et al. 2D scattering characteristics of Lamb wave at defects [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(8): 236 — 243. (in Chinese)
- [5] 刘增华, 徐营赞, 何存富, 等. 板状结构中基于 Lamb 波单模态的缺陷成像试验研究 [J]. 工程力学, 2014, 31(4): 232 — 238.
Liu Zenghua, Xu Yingzan, He Cunfu, et al. Experimental study on defect imaging based on single LAMB wave mode in plate-like structures [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(4): 232 — 238. (in Chinese)
- [6] Pei N, Bond L J. Higher order acoustoelastic Lamb wave propagation in stressed plates [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2016, 140(5): 3834 — 3843.
- [7] 周正干, 冯占英, 高翌飞, 等. 超声导波在大型薄铝板缺陷检测中的应用 [J]. 航空学报, 2008, 29(4): 1044 — 1048.
Zhou Zhenggan, Feng Zhanying, Gao Yifei, et al. Application of ultrasonic guided waves to defect inspection of large thin aluminum plate [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2008, 29(4): 1044 — 1048. (in Chinese)
- [8] 张海燕, 刘凡杰, 范国鹏, 等. 各向同性板中盲孔缺陷的兰姆波拓扑成像 [J]. 声学学报, 2018, 43(6): 968 — 976.
Zhang Haiyan, Liu Fanjie, Fan Guopeng, et al. Lamb wave topological imaging for blind hole defects in isotropic plates [J]. Acta Sinica, 2018, 43(6): 968 — 976. (in Chinese)
- [9] 曹小杉, 金峰, 王子昆. 功能梯度材料板中 Lamb 波传播特性研究 [J]. 固体力学学报, 2009, 30(1): 35 — 41.
Cao Xiaoshan, Jin Feng, Wang Zikun. Propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material plate [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(1): 35 — 41. (in Chinese)
- [10] 王国锋, 李富才, 刘志强, 等. 超声导波在圆管结构损伤定位中的应用 [J]. 振动、测试与诊断, 2017, 37(3): 440 — 448.
Wang Guofeng, Li Fucui, Liu Zhiqiang, et al. Application of ultrasonic guided wave in damage localization of circular tube structure [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2017, 37(3): 440 — 448. (in Chinese)
- [11] NG C T, Veidt M. Scattering analysis of fundamental anti-symmetric Lamb wave at delaminations in composite laminates [J]. Australian Journal of Mechanical Engineering, 2011, 129(3): 1288 — 1296.
- [12] 张海燕, 刘镇清, 马小松. 界面层对层状各向异性复合结构中 Lamb 波的影响 [J]. 物理学报, 2003(10): 2492 — 2499.
Zhang Haiyan, Liu Zhenqing, Ma Xiaosong. The

- influences of interface layer characteristics on Lamb waves in layered anisotropic media [J]. *Acta Physica Sinica*, 2003(10): 2492 — 2499. (in Chinese)
- [13] 徐春铃, 王鑫伟. Lamb波在复合材料板中传播的谱有限元模拟[J]. 力学季刊, 2011, 32(1): 10 — 18.
Xu Chunling, Wang Xinwei. Finite element simulation of Lamb wave propagation in composite plate [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2011, 32(1): 10 — 18. (in Chinese)
- [14] 何存富, 刘宏业, 刘增华, 等. 正交各向异性板中非主轴方向的Lamb波[J]. *固体力学学报*, 2013, 34(1): 55 — 62.
He Cunfu, Liu Hongye, Liu Zenghua, et al. Lamb waves propagation along non-principal directions in orthotropic plate [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2013, 34(1): 55 — 62. (in Chinese)
- [15] He C F, Liu H Y, Liu Z H, et al. The propagation of coupled Lamb waves in multilayered arbitrary anisotropic composite laminates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332 (26): 7243 — 7256.
- [16] Du J K, Jin X Y, Wang J. Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress [J]. *Acta Mechanica*, 2007, 192 (1/2/3/4): 169 — 189.
- [17] Navneet G, Jennifer E M, Sang J L. Acoustoelastic Lamb wave propagation in biaxially stressed plates [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2012, 132(3): 1284 — 1293.
- [18] Yu J G, Zhang C H. Influences of initial stresses on guided waves in functionally graded hollow cylinders [J]. *Acta Mechanica*, 2013, 224(4): 745 — 757.
- [19] Yu J G, Li S L. Dispersion of guided wave in initially stressed layered plates [J]. *Mechanics of materials and structures*, 2013, 8(2/3/4): 185 — 198.
- [20] Lefebvre J E, Zhang V, Gazalet J, et al. Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2001, 48(5): 1332 — 1339.

(上接第 220 页)

- [9] 杨庆生, 刘夏, 刘健. 大变形条件下纤维增强复合材料的有效性能[J]. 中国科学: 物理学力学天文学, 2010, 40(12): 1521 — 1531.
Yang Qingsheng, Liu Xia, Liu Jian. Effective properties of fiber-reinforced composites under large deformation [J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2010, 40(12): 1521 — 1531. (in Chinese)
- [10] Takano N, Ohnishi Y, Zako M, et al. The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials [J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2000, 37(44): 6517 — 6535.
- [11] Xing L, Reifsnider K L, Huang X. Progressive damage modeling for large deformation loading of composite structures [J]. *Composites Science & Technology*, 2009, 69(6): 780 — 784.
- [12] Aboudi J, Volokh K Y. Needleman symposium: failure prediction of unidirectional composites undergoing large deformations [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2015, 82(7): 1 — 15.
- [13] Xue P, Cao J, Chen J. Integrated micro/macro-mechanical model of woven fabric composites under large deformation [J]. *Composite Structures*, 2005, 70(1): 69 — 80.
- [14] Upadhyay A K, Shukla K K. Large deformation flexural behavior of laminated composite skew plates: an analytical approach [J]. *Composite Structures*, 2012, 94(12): 3722 — 3735.
- [15] Peterson M E, Murphey T W. Large deformation bending of thin composite tape spring laminates [C]//Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences, 54th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Boston: AIAA, 2013: 1667-1681.
- [16] Cui Z, Moltschaniwskyj G, Bhattacharyya D. Buckling and large deformation behaviour of composite domes compressed between rigid platens [J]. *Composite Structures*, 2004, 66(1): 591 — 599.
- [17] ASTM D790, Standard test methods for flexural properties of unreinforced and reinforced plastics and electrical insulating materials [S]. PA: ASTM, 2017.
- [18] ASTM D7264, Standard test method for flexural properties of polymer matrix composite materials [S]. PA: ASTM, 2015.
- [19] GB/T 3356, 定向纤维增强聚合物基复合材料弯曲性能试验方法 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2014.
GB/T 3356, Test method for flexural properties of orientational fiber reinforced polymer matrix composite materials [S]. Beijing: Standards Press of China, 2014. (in Chinese)