

文章编号: 1000-4750(2020)11-0108-09

适用于黏土的分数阶应力诱导剪胀方程

李海潮¹, 马 博¹, 张 升^{1,2}, 盛岱超³

(1. 中南大学土木工程学院, 湖南, 长沙 410075; 2. 高速铁路建造技术国家工程实验室, 湖南, 长沙 410075;

3. 悉尼科技大学土木与环境工程学院, 澳大利亚, 悉尼 NSW 2007)

摘 要: 建立了适用于黏性土的分数阶下加载面模型, 该模型所采用的分数阶塑性流动法则能够在不引入塑性势函数的情况考虑塑性流动方向与土体物理屈服面之间的非正交特性, 进而统一地描述相关联和非相关联塑性流动法则。基于该流动法则可以得到一个新的应力诱导分数阶剪胀方程以考虑超固结比对黏性土剪胀特性的影响。理论分析结果表明, 在相同的应力水平下, 土体剪胀量会随着超固结比增大而逐渐减小。相比较修正剑桥模型, 该文模型仅额外地引入一个与土体剪胀特性相关的模型参数, 并且能够对超固结黏土的应变软化和剪胀特性进行合理的描述。模型计算结果与试验结果对比分析结果表明, 该文模型能够准确地描述黏性土在超固结状态下的应力-应变响应和剪胀特性。

关键词: 分数阶微分; 剪胀特性; 下加载面; 超固结比; 连续方程

中图分类号: TU43 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2019.12.0777

A STRESS-INDUCED FRACTIONAL DILATANCY RULE FOR CLAYS

LI Hai-chao¹, MA Bo¹, ZHANG Sheng^{1,2}, SHENG Dai-chao³

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China;

2. National Engineering Laboratory for High Speed Railway Construction, Changsha, Hunan 410075, China;

3. School of Civil & Environmental Engineering, University of Technology Sydney, Sydney NSW 2007, Australia)

Abstract: A fractional sub-loading surface model for clays is developed in the present study. The fractional plastic flow rule adopted in the proposed model is able to account for the non-normality of the flow direction with respect to the yield locus without introducing a plastic potential. Hence, a unified description of the associated and non-associated plastic flow rules is achieved. A stress-induced fractional dilatancy rule can be conveniently derived through the fractional plastic flow rule to consider the effect of the over-consolidation ratio on the dilatancy of clays. The analysis shows that increasing the over-consolidation ratio will reduce the dilatancy under a constant loading pressure. Compared with the modified Cam-clay model, the proposed model introduces only one extra dilatancy-related parameter and can describe the strain-softening and dilatancy features of over-consolidated clays. Model predictions show good agreement with the experimental results, indicating the capability of the proposed model in describing the behavior of clays.

Key words: fractional derivative; stress-dilatancy; sub-loading surface; over consolidation; constitutive equations

不同于正常固结重塑土, 超固结重塑土应力-应变曲线具有应变硬化和软化特征, 并且伴随着剪缩和剪胀现象的发生。修正剑桥(modified Cam-clay, MCC)模型^[1]在描述其力学特性时存在明显

不足, 具体表现在以下几个方面:

首先, MCC 模型的剪胀方程假定土体的剪胀因子仅与当前剪切应力比有关, 无法考虑温度和超固结比等外部加载因素对土体剪胀特性的影响^[2-5]。

收稿日期: 2019-12-23; 修改日期: 2020-07-06

基金项目: 国家自然科学基金优秀青年科学基金项目(51722812); 湖湘高层次人才聚集工程项目(2018RS3016); 中南大学研究生科研创新项目(1053320170586)

通讯作者: 张 升(1979—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 博导, 主要从事土体本构关系方面的研究 (E-mail: zhang-sheng@csu.edu.cn).

作者简介: 李海潮(1991—), 男, 湖北人, 博士生, 主要从事土体本构关系方面的研究 (E-mail: haichao821@outlook.com);

马 博(1993—), 男, 湖南人, 博士生, 主要从事土体本构关系方面的研究 (E-mail: mabo19@csu.edu.cn);

盛岱超(1965—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 主要从事土体本构关系方面的研究 (E-mail: daichao.sheng@gmail.com).

Gao 等^[6] 在其所建立界面模型中深入的探究了黏土的应力历史对其剪胀特性和应力-应变特性的影响。值得注意的是, 即使对于正常固结重塑土, MCC 模型的剪胀方程在描述其剪胀特性时依然存在不足。Wang 和 Yin^[7] 针对自然软土的试验结果表明, 在材料发生剪缩破坏的过程中, MCC 模型预测的剪缩量要明显小于试验值。杜修力等^[8] 基于统一非线性强度理论建立了适用于正常固结重塑土的剪胀方程。殷杰^[9] 通过引入结构屈服应力参数建立了适用于结构性软黏土的修正剑桥模型。

其次, MCC 模型采用相关联的流动法则, 并且基于非线性能量耗散方程假定土体具有椭圆形屈服面。然而试验结果表明, 岩土材料的屈服面具有更为复杂的几何形状^[2, 10]。Lagioia 等^[11] 讨论了屈服面几何形状对模型计算结果的影响; Collins 和 Kelly^[12] 则基于现代热力学理论给出了适用于岩土材料的双参数屈服函数。此外, 剪切过程中岩土材料塑性流动方向并不始终垂直于其物理屈服面^[13-14]。Sun 等^[15-18] 指出可以对屈服函数进行分数阶微分得到分数阶塑性流动法则, 进而在不引入塑性势函数的情况下统一的描述相关联和非相关联的塑性流动法则。在此基础上, 孙逸飞和沈杨^[19] 建立了适用于粗粒料的静动力界面模型, 成功地模拟了粗粒料在静动力加载条件下的应力-应变行为和循环荷载下的长期变形。Lu 等^[20] 则基于该方法在 β 应力空间建立了适用于正常固结重塑土的分数阶修正剑桥模型。

MCC 模型在描述黏土在超固结状态时的应力-应变响应时同样存在明显不足, 模型计算得到的剪切强度明显偏大, 且应力-应变曲线为一条不光滑的曲线^[21]。为了克服该不足, Dafalias 等^[22-23] 和 Hashiguchi 等^[24-26] 分别提出了边界面和下加载面的力学概念。其中, 下加载面模型假定在任意加载时刻, 材料当前的应力点始终位于下加载面上并发生弹塑性体积变形^[27-31]; 边界面模型则假定当前应力点位于边界面内, 并且采用某种映射准则计算得到其塑性流动方向和塑性模量^[32-36]。

本文首先将 Caputo 微分方法应用于 MCC 模型的屈服函数, 从而得到一个新的分数阶剪胀方程用于考虑超固结比对黏土剪胀特性的影响。在此基础上可以建立适用于黏土的分数阶下加载面模型, 该模型所采用的分数阶塑性流动法则能够统一的描述相关联和非相关联的流动法则。相比

较 MCC 模型, 本文模型仅额外地引入了一个与土体剪胀特性相关的模型参数, 同时能够对超固结黏土的应变软化和剪胀特性进行合理的描述。

1 应力诱导分数阶剪胀方程

如无特别说明, 本文应力均为有效应力且体积变形以压为正。有效平均主应力 p , 剪应力 q 和剪应力比 η 分别表示为:

$$p = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}), q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\xi}\|, \eta = \frac{q}{p} \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量; $\boldsymbol{\xi}$ 为剪应力张量, 满足如下表达式:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\sigma} - \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})/3 \cdot \mathbf{1} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} 为克罗内克符号。

1.1 分数阶微分定义

分数阶微分是传统整数阶微分的直接扩展, 通过对岩土材料的屈服函数进行分数阶微分, 可以在不引入塑性势函数的情况下得到一个新的流动法则。通过调整分数阶数, 该流动法则能够直接描述塑性流动方向和加载方向两者之间的非关联性。本文采用 Caputo 定义的积分形式^[37]:

$${}_a D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad x > a \quad (3)$$

式中: $D(= \partial^\alpha / \partial x^\alpha)$ 为分数阶微分符号; α 为分数阶数; $a=0$ 为积分下限, x 为积分上限, 在本文中表征当前应力状态; 伽马函数 Γ 的表达式为 $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-\tau) \tau^{x-1} d\tau$ 。值得注意的是, 幂函数的 Caputo 分数阶微分具有如下显示解:

$${}_0 D_x^\alpha (x^m) = \frac{\partial^\alpha (x^m)}{\partial x^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha}, \quad m > -1 \quad (4)$$

孙逸飞和沈杨^[19] 指出分数阶微分具有长程记忆性, 适用于描述路径和记忆依赖性行为。后文将根据分数阶微分推导出一个新的应力诱导剪胀方程, 并由此建立一个适用于超固结重塑土的分数阶下加载面模型。

1.2 分数阶塑性流动法则

不同于传统的弹塑性理论, 分数阶弹塑性理论通过对材料的屈服函数求分数阶偏导来确定其塑性流动方向 m_α 。由此, 分数阶塑性流动法则可以表述为:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Lambda \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{H})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\alpha} \quad (5)$$

式中: $\Delta \epsilon^p$ 为塑性应变增量; Λ 为塑性因子; $f(\sigma, \mathbf{H})$ 为屈服函数, 且 $\mathbf{H}$ 为硬化参数。根据 Lu 等^[20], $\partial^\alpha f(\sigma, \mathbf{H}) / \partial \sigma^\alpha$ 可以通过链式法则求解得到, 有:

$$\frac{\partial^\alpha f(\sigma, \mathbf{H})}{\partial \sigma^\alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial p^\alpha} \right) \cdot \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \right) \cdot \frac{\xi}{\|\xi\|} \quad (6)$$

如图 1 所示, 当 $\alpha=1$ 时, 塑性流动方向 $m_{\alpha=1}$ 垂直于屈服面, 此时该分数阶流动法则退化为相关联流动法则。可以通过改变 α 的取值来调整塑性流动方向与加载方向之间的夹角, 从而在不引入塑性势函数的情况下描述两者之间的非相关性。

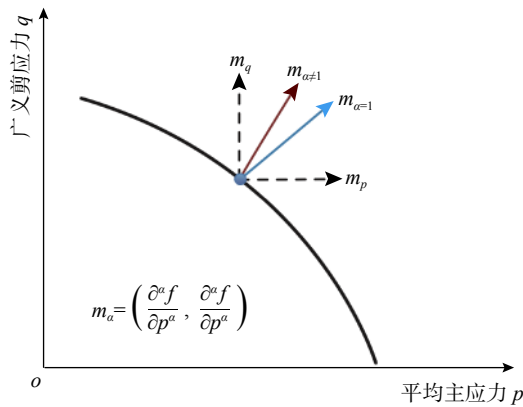


图 1 分数阶流动法则示意图

Fig. 1 Schematic plot of fractional flow rule

1.3 正常固结屈服面和相似因子

为了表述超固结重塑土的应变软化和剪胀特性, 本文引入了下加载面的力学概念。如图 2 所示, 表征超固结状态的当前应力点 $A(p, q)$ 位于下加载面上, 而参考应力点 $B(\bar{p}, \bar{q})$ 则位于正常固结屈服面上。为了动态地描述在 $p-q$ 平面中下加载面和正常固结屈服面两者之间相对位置的演变关系, 基于径向映射法则定义了相似因子 R :

$$R = p/\bar{p} = q/\bar{q}, \quad 0 < R \leq 1 \quad (7)$$

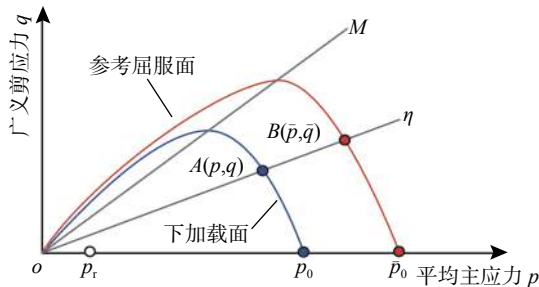


图 2 下加载面示意图

Fig. 2 Schematic plot of sub-loading surface

R 与超固结比 OCR 具有相似的物理意义, 在单调加载过程中, 随着土体超固结特性的减弱,

R 的值逐渐增大, 当 $R=1$ 时, 下加载面与正常固结屈服面最终重合, 此时土体处于正常固结状态。

此外, 参照界面模型土体的参考应力点可以通过引入一个标量 ρ 来表示:

$$\bar{p} = \rho \bar{p}_0, \quad \bar{q} = \rho \eta \bar{p}_0 \quad (8)$$

为了便于分析, 本文采用 MCC 模型屈服函数描述正常固结屈服面, 并且假定其硬化参量为塑性体积应变 ϵ_v^p , 有:

$$\bar{f} = (2\bar{p} - \bar{p}_0)^2 + \left(\frac{2\bar{q}}{M} \right)^2 - \bar{p}_0^2 = 0 \quad (9)$$

式中: M 为 $p-q$ 平面临界状态线的斜率; $\bar{p}_0$ 为正常固结屈服面与 p 轴的交点。在加载过程中, 正常固结屈服面大小控制参数 $\bar{p}_0$ 具有如下演变关系:

$$\bar{p}_0 = \bar{p}_{0i} \exp \left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \epsilon_v^p \right) \quad (10)$$

式中: e_0 为初始孔隙比; λ 和 κ 分别为 $-\ln p$ 平面各向同性压缩曲线的压缩模量和回弹模量。根据 Sun 和 Zheng^[17] 的建议, 正常固结屈服面的初始位置 $\bar{p}_{0i}$ 具有如下表达式:

$$\bar{p}_{0i} = 2p_r \exp \left(\frac{e_r - e_0 - \kappa \ln p_{ic}}{\lambda - \kappa} \right) \quad (11)$$

式中: e_r 为参考有效平均主应力 $p_r = 1$ kPa 时所对应的临界孔隙比; p_{ic} 为初始围压。将式 (8) 代入式 (9) 中, 可以得到 ρ 的具体表达式为:

$$\rho = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (12)$$

结合式 (7)、式 (8) 和式 (10)、式 (12), 进一步可以得到表征土体超固结性的相似因子 R 的演化规律, 有:

$$R^{-1} = \frac{p_r}{p} 2\rho \cdot \exp \left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \epsilon_v^p + \frac{e_r - e_0 - \kappa \ln p_{ic}}{\lambda - \kappa} \right) \quad (13)$$

1.4 分数阶剪胀方程

基于非线性的能量耗散方程, Roscoe 和 Burland^[1] 给出了如下 MCC 模型的剪胀方程:

$$d = \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (14)$$

式中: d 为剪胀因子; $d\epsilon_v^p$ 和 $d\epsilon_s^p$ 分别为塑性体积应变增量和塑性剪切应变增量。

MCC 剪胀方程无法反映温度和超固结性等外部加载因素对土体剪胀特性的影响, 同时对于超固结重塑土, 该剪胀方程预测的剪胀量要明显大

于实测值。为此, 联合式 (5)、式 (9), 本文基于 Caputo 分数阶微分给出了一个新的剪胀方程:

$$d = \frac{\partial^\alpha \bar{f} / \partial \bar{p}^\alpha}{\partial^\alpha \bar{f} / \partial \bar{q}^\alpha} \quad (15)$$

其中:

$$\frac{\partial^\alpha \bar{f}}{\partial \bar{p}^\alpha} = \frac{2M^2 \bar{p}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{M^2 \bar{p}_0 \bar{p}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^\alpha \bar{f}}{\partial \bar{q}^\alpha} = \frac{2\bar{p}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \quad (17)$$

由式 (8)、式 (12) 可以得到 $\bar{p}_0 = \bar{p}[1+(\eta/M)^2]$, 将其代入式 (16) 中, 则式 (15) 可改写为:

$$d = \frac{\alpha M^2 - (2-\alpha)\eta^2}{2\eta^{2-\alpha}} \quad (18)$$

可以看出, 当 $\alpha = 1$ 时, 式 (18) 可以直接退化为 MCC 模型的剪胀方程。通过建立 α 与温度或超固结比之间的联系, 本文所给出的分数阶剪胀方程能够考虑不同外部加载因素对材料剪胀特性的影响。值得注意的是, α 的演化规律需要同时满足以下两个条件:

1) 当土体发生充分的剪切变形后进入到临界状态时, 需满足关系 $\eta = M$ 和 $d_{\eta=M} = 0$, 根据式 (18), 此时分数阶数 α 等于 1;

2) 当材料当前的应力点位于剪胀线上 ($\eta = M_d$) 时, 其中 M_d 为剪胀应力比, 需要选取合适的 α 取值, 以满足条件 $d_{\eta=M_d} = 0$ 。

对于超固结重塑土, Gao 等^[6, 38] 指出剪胀应力比 M_d 与相似因子 R 之间满足以下经验公式:

$$M_d = MR^m \quad (19)$$

其中, m 为与土体剪胀特性有关的模型参量。结合该经验公式与条件 2, 可以直接建立分数阶数 α 与相似因子 R 两者之间的关系式:

$$\alpha = \frac{2R^{2m}}{1 + R^{2m}} \quad (20)$$

当土体进入临界状态时, 土体内部的超固结性被完全破坏, 根据式 (20) 有 $R=1$ 且 $\alpha=1$, 因此该演化规律自动满足条件 1。联合式 (18) 和式 (20), 可以最终得到适用于黏土的应力诱导分数阶剪胀方程。该剪胀方程表明应力历史会对黏土的剪胀特性产生显著的影响, 并且需要在相应的土的弹塑性本构关系中加以考虑。

图 3 给出了剪胀因子 d 随剪应力比 η 和相似因子 R 的变化规律。可以看出, 在相同的应力水平

下, d 随着 R 的增大而逐渐增大, 即黏土的剪胀量会随着超固结性的破坏而逐渐增大, 与试验结果保持一致。

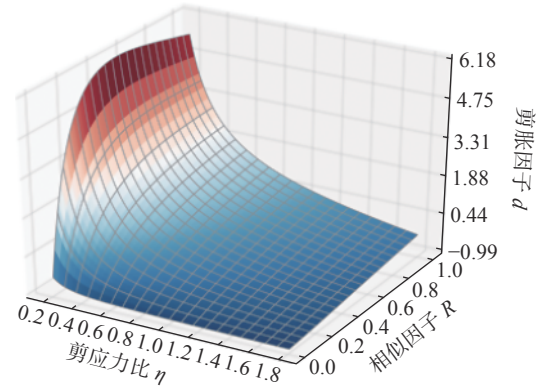


图 3 剪胀因子 d 随剪应力比 η 和相似因子 R 变化规律
Fig. 3 Evolution of dilatancy ratio d with shear stress ratio η and similarity ratio R

2 分数阶下加载面模型

基于本文提出的应力诱导分数阶剪胀方程, 通过给定一个合理的下加载面硬化法则, 可以直接建立适用于黏土的分数阶下加载面模型。

2.1 下加载面和硬化法则

根据 Hashiguchi 等^[24-26] 的研究成果, 本文假定下加载面与正常固结屈服面具有相似的几何形状, 则下加载面屈服函数 f 可以表示为:

$$f = (2p - p_0)^2 + \left(\frac{2q}{M}\right)^2 - p_0^2 = 0 \quad (21)$$

其中, p_0 为下加载面与 p 轴的交点, 作为硬化参量用于控制下加载面的大小。 f 关于 σ 的分数阶微分表达式为:

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \sigma^\alpha} = \frac{1}{3} \left[\frac{\alpha M^2 p^2 - (2-\alpha)q^2}{\Gamma(3-\alpha)p^\alpha} \right] 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{2q^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \frac{\xi}{\|\xi\|} \quad (22)$$

参考 Jocković 和 Vukićević^[34] 所建立的适用于超固结重塑土的边界面模型, 本文首先定义一个软化因子 S , 有:

$$S = \ln \left(\frac{2M_d^2}{M_d^2 + \eta^2} \right) \quad (23)$$

软化因子 S 能够直观反映在加载过程中材料当前的应力点与剪胀线之间的位置关系: 当材料当前的应力点位于剪胀线上 ($\eta = M_d$) 时, 根据式 (23) 有 $S=0$; 若当前的应力点位于剪胀线上方 ($\eta > M_d$) 时有 $S < 0$; 反之则可以得到 $S > 0$ 。对于正

常固结重塑土, 软化因子 S 的表达式可以改写为 $S = \ln[2M^2/M^2 + \eta^2]$, 此时 S 可用于描述材料当前应力点与临界状态线之间位置关系。

进一步, 本文假定下加载面的硬化法则具有如下表达式:

$$dp_0 = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} p_0 \left(1 - \frac{\ln R}{RS} \right) d\epsilon_v^p \quad (24)$$

当 $R=1$ 时, 式 (24) 将退化为 MCC 模型的硬化法则, 此时正常固结屈服面和下加载面重合, 并且以相同的速率在 $p-q$ 平面沿着 p 轴运动。本文模型所采用的硬化法则考虑了土体超固结特性对其屈服面运动规律的影响, 从而能够合理描述超固结黏土的应变软化和剪胀特性。

相比较 MCC 模型, 本文所建立的分阶下加载面模型仅额外的引入了一个与土体剪胀特性相关的模型参数 m 。临界状态参数 (e_Γ 、 e_0 、 ν 、 M 、 λ 和 κ) 可以根据常规的三轴压缩试验结果进行简单标定。根据式 (20), 只有当土体超固结比 OCR 大于 1 时参数 m 才会对模型计算结果产生影响, 因此可以采用本文模型对一组超固结重塑土的三轴压缩试验结果进行拟合, 从而得到 m 的最佳取值。

2.2 模型实现

类似于传统弹塑性理论, 分数阶弹塑性理论假定总的应变增量 $d\epsilon$ 可以表示为弹性应变增量 $d\epsilon_v^p$ 和塑性应变增量 $d\epsilon_s^p$ 之和, 即 $d\epsilon = d\epsilon_v^p + d\epsilon_s^p$, 其中, $d\epsilon_s^p$ 需要采用分数阶流动法则进行求解。根据虎克定律, 应力增量 $d\sigma$ 可以表示为:

$$d\sigma = (C^e - C^p) : d\epsilon \quad (25)$$

式中: C^e 和 C^p 分别为弹性和塑性应力-应变张量; 符号 “:” 表示张量缩并。 C^e 是体积模量 K 和剪切模量 μ 的函数, 具有如下表达式:

$$C^e = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (26)$$

式中: $\mathbf{I}$ 为四阶单位张量; 符号 “ $\otimes$ ” 表示张量乘积。参考 MCC 模型, 假定 K 是关于当前孔隙比 e 和有效平均主应力 p 的函数, 引入泊松比 ν , 则 K 和 μ 可以分别表示为:

$$K = \frac{1+e}{\kappa} p, \mu = \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} K \quad (27)$$

塑性应力-应变张量 C^p 可以采用如下表达式进行迭代求解:

$$C^p = \frac{C^e : \partial f / \partial \sigma \otimes \partial^\alpha f / \partial \sigma^\alpha : C^e}{K_p + \partial f / \partial \sigma : C^e : \partial^\alpha f / \partial \sigma^\alpha} \quad (28)$$

式中, K_p 为塑性模量, 其具体表达式可以根据协调方程得到, 有:

$$K_p = - \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial^\alpha f}{\partial^\alpha p} \quad (29)$$

2.3 参数试验

这里主要探究参数 m 的取值对模型计算结果的影响。首先将数值试样各向同性固结至 800 kPa, 然后卸载至 100 kPa, 从而形成 $OCR=8$ 的超固结试样。在此基础上分别选取不同的 m 的取值开展三轴压缩排水和不排水数值试验, 模型参数如表 1 所示。

表 1 模型参数敏感性试验材料参数
Table 1 Parameters used in model sensitive analysis

参数名称	参数取值
参考临界状态孔隙比 e_Γ	1.23
初始孔隙比 e_0	0.83
泊松比 ν	0.2
临界状态剪应力比 M	0.94
压缩模量 λ	0.093
回弹模量 κ	0.02
剪胀特性相关模型参数 m	0.0、0.3、0.6 和 0.9

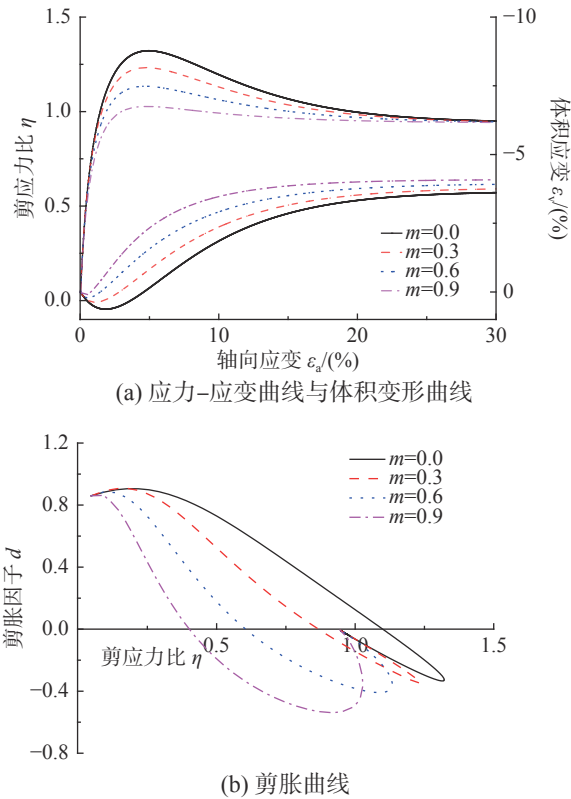
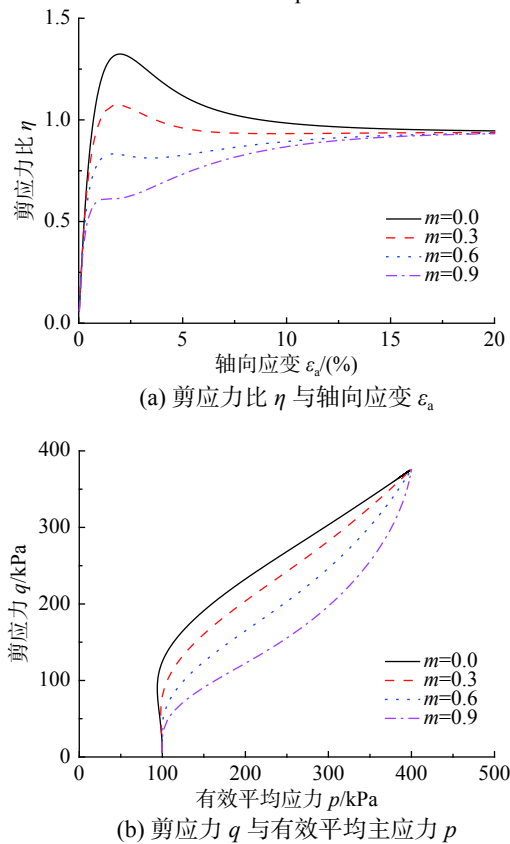
模型参数 m 对超固结重塑土的三轴压缩排水试验模型计算结果的影响如图 4 所示。根据图 4(a), 该试样的峰值强度随着 m 值的增大而减小, 体应变的剪胀量则逐渐增大。图 4(b) 给出了不同 m 值对材料剪胀曲线的影响, 可以看出, 随着 m 值的增大, 该试样的剪胀应力比 M_d 逐渐减小, 而 m 不会对材料的临界状态剪应力比产生影响。

模型参数 m 对超固结重塑土的三轴压缩不排水试验模型计算结果的影响如图 5 所示。根据图 5(a), 该试样的不排水抗剪强度随着 m 值的增大而减小, 随着 m 值的进一步增大, 材料的不排水抗剪强度甚至会小于其临界强度, 该现象与密实砂土的应力-应变曲线变化特点具有某种相似性^[22]。图 5(b) 给出了 m 对该试样的应力路径的影响。

3 模型验证

为了进一步验证本文所建立的分阶下加载面模型的适用性, 采用该模型分别对 Black Kaolin 黏土^[39] 和 Fujinomor 黏土^[29] 的三轴压缩试验结果进行模拟, 重点探究土体超固结性对其剪胀特性的影响, 模型参数如表 2 所示。

图 6 给出了 Black Kaolin 黏土的三轴压缩排水试验结果和模型计算结果, 其中, Black Kaolin 黏

图4 参数 m 三轴压缩排水试验模型计算结果的影响Fig. 4 Effect of parameter m on drained triaxial test model predictions图5 参数 m 三轴压缩不排水试验模型计算结果的影响Fig. 5 Effect of parameter m on undrained triaxial test model predictions

土的加载围压分别为 100 kPa、200 kPa、400 kPa 和 800 kPa，且 OCR 分别为 8、4、2 和 1。在不同的围压下，Black Kaolin 黏土的初始孔隙比 e_0 分别为 1.09、1.06、0.94 和 0.91。根据图 6(a) 和图 6(b)，

表2 模型参数敏感性试验材料参数

Table 2 Parameters used in model sensitive analysis

土体名称	参考临界状态 孔隙比 e_r	泊松比 ν	临界状态 剪应力比 M	压缩 模量 λ	回弹 模量 κ	剪胀特性相关 模型参数 m
Black Kaolin 黏土	1.65	0.2	0.83	0.244	0.079	0.2
Fujinomori 黏土	1.23	0.2	1.36	0.093	0.020	0.9

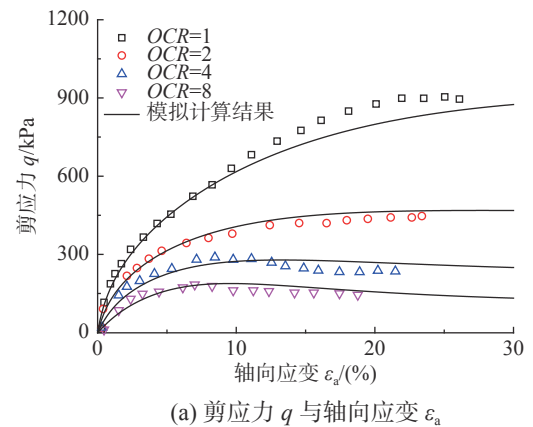
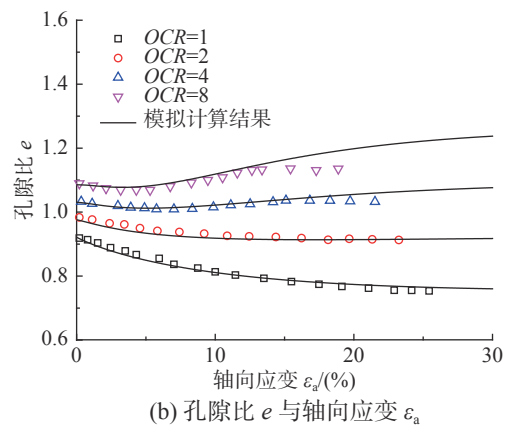
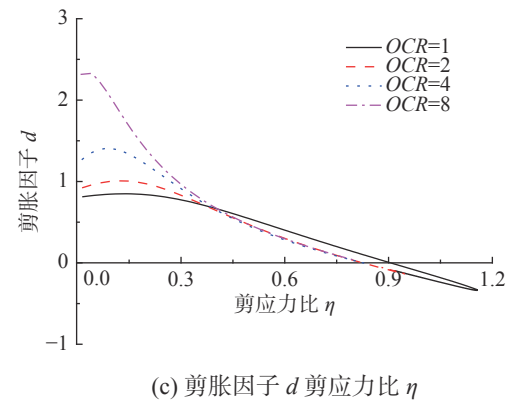
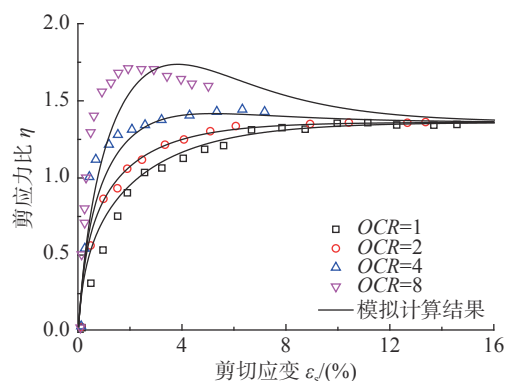
(a) 剪应力 q 与轴向应变 ϵ_a (b) 孔隙比 e 与轴向应变 ϵ_a (c) 剪胀因子 d 剪应力比 η

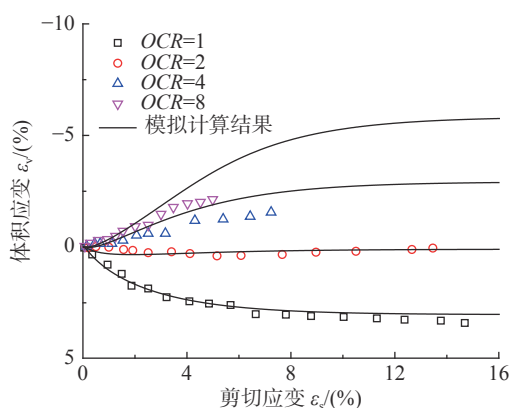
图6 Black Kaolin 黏土试验结果与模型计算结果对比

Fig. 6 Comparison between experimental data and model predictions of Black Kaolin clay

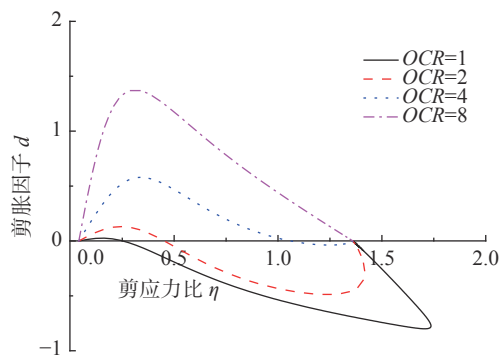
模型计算结果与试验结果具有良好的相关性。当 $OCR=8$ 时, 由于应力历史的影响, Black Kaolin 黏土的应力-应变曲线表现出明显的应变软化特点; 在加载的初始阶段, 土体的孔隙比 e 逐渐减小, 产生剪缩变形, 随着剪切破坏的进一步发生, e 开始反向增加并伴随着剪胀现象的发生。Black Kaolin 黏土在不同围压下的剪胀曲线如图 6(c) 所示, 可以看出土体的剪胀应力比 M_d 随着 OCR 的增大而增大, 同时在 $OCR=4, 8$ 的情况下, 土体会发生明显的剪胀变形。进一步, 图 7 给出了本文



(a) 剪应力比 η 与剪切应变 ε_s



(b) 体积应变 ε_v 与剪切应变 ε_s



(c) 剪胀因子 d 剪应力比 η

图 7 Fujinomori 黏土试验结果与模型计算结果对比

Fig. 7 Comparison between experimental data and model predictions of Fujinomori clay

模型对 Fujinomori 黏土的平均主应力一定的三轴压缩试验结果的模拟结果, 其中, Fujinomori 黏土的平均主应力分别为 98 kPa、196 kPa、196 kPa 和 196 kPa, 且 OCR 分别为 8、4、2 和 1。在不同的围压下, Fujinomori 黏土的初始孔隙比 e_0 分别为 0.727、0.713、0.76 和 0.81。根据图 7(a) 和图 7(b), 可以看出本文模型能够较好的描述 Fujinomori 黏土的应力-应变和体积变形特点。当 $OCR=8$ 时, 本文模型计算得到的峰值强度所对应的轴向应变明显偏大, 存在 20% 左右的误差, 此时计算得到的体应变剪胀量也相应偏大。值得注意的是, 相比常规的三轴压缩不排水试验, 在平均主应力一定的情况下, 模型计算得到剪胀曲线呈现出完全不同的变化特点。如图 7(c) 所示, 在加载的初始阶段, 剪胀因子 d 会逐渐增大, 在达到峰值后反向减小, 当 OCR 大于 1 时, d 会减小至负值, 此时土体发生剪胀破坏, 随着 OCR 的增大, 该趋势将更加明显。

从上述分析可以看出, 本文建立的模型能够合理地反映超固结重塑土的应变软化和剪胀特性, 进而对土体应力-应变和体积变形特点进行准确的描述。此外, 本文模型的计算结果表明, 超固结性会对土体的剪胀特性产生影响。

4 结论

本文基于 Caputo 微分方法提出了分数阶应力诱导剪胀方程以考虑超固结性对土体剪胀特性的影响, 在此基础上引入了下加载面的力学概念, 从而建立了适用于超固结重塑土的分数阶下加载面模型。通过将模型计算结果与试验结果进行对比分析, 初步验证了该模型的合理性, 主要结论有:

(1) 基于 Caputo 分数阶微分方法, 可以在不引入塑性势函数的情况下得到一个新的分数阶塑性流动法则, 该流动法则能够合理地描述塑性流动方向与土体屈服面之间的非正交性, 进而统一地描述相关联和非相关联的塑性流动法则。

(2) 基于分数阶塑性流动法则, 可以给出适用于黏土的分数阶应力诱导剪胀方程。由于分数阶数是关于表征超固结程度的相似因子的函数, 因此本文提出的剪胀方程能够考虑超固结性对黏土剪胀特性的影响。

(3) 通过引入下加载面的力学概念并且给出相应的硬化法则, 本文所建立的分数阶下加载面模

型能够准确地描述超固结黏土的应变软化和剪胀特性。相比较 MCC 模型, 本文模型仅额外地引入了一个与土体剪胀特性有关的材料参数。

参考文献:

- [1] Roscoe K H, Burland J B. On the generalized stress-strain behaviour of wet clay [J]. *Engineering Plasticity*, 1968: 535 — 609.
- [2] Uchaipichat A, Khalili N. Experimental investigation of thermo-hydro-mechanical behaviour of an unsaturated silt [J]. *Géotechnique*, 2009, 59(4): 339 — 353.
- [3] 李海潮, 张 升, 沈 远. 考虑温度影响的岩土材料高阶屈服函数[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(12): 2795 — 2803.
Li Haichao, Zhang Sheng, Shen Yuan. A high order yield function for geo-materials considering the effect of temperature [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(12): 2795 — 2803. (in Chinese)
- [4] Hattab M, Hicher P Y. Dilating behaviour of overconsolidated clay [J]. *Soils and Foundations*, 2004, 44(4): 27 — 40.
- [5] Yin Z Y, Chang C S. Stress-dilatancy behavior for sand under loading and unloading conditions [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2013, 37(8): 855 — 870.
- [6] Gao Z, Zhao J, Yin Z Y. Dilatancy relation for overconsolidated clay [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2016, 17(5): 06016035-1 — 06016035-7.
- [7] Wang L Z, Yin Z Y. Stress dilatancy of natural soft clay under an undrained creep condition [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2012, 15(5): A4014002-1 — A4014002-5.
- [8] 杜修力, 马 超, 路德春. 岩土材料的非线性统一强度模型[J]. *力学学报*, 2014, 46(3): 389 — 397.
Du Xiuli, Ma Chao, Lu Dechun. Nonlinear unified strength model of geomaterials [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, 46(3): 389 — 397. (in Chinese)
- [9] 殷杰. 结构性软黏土的修正剑桥模型[J]. *工程力学*, 2013, 30(1): 190 — 197.
Yin Jie. A modified cam clay model for structured soft calys [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(1): 190 — 197. (in Chinese)
- [10] Panteghini A, Lagioia R. An extended modified Cam-clay yield surface for arbitrary meridional and deviatoric shapes retaining full convexity and double homothety [J]. *Géotechnique*, 2018, 68(7): 590 — 601.
- [11] Lagioia R, Puzrin A M, Potts D M. A new versatile expression for yield and plastic potential surfaces [J]. *Computers & Geotechnics*, 1996, 19(3): 171 — 191.
- [12] Collins I, Kelly P. A thermomechanical analysis of a family of soil models [J]. *Géotechnique*, 2002, 52(7): 507 — 518.
- [13] Alonso E E, Romero E E, Ortega E. Yielding of rockfill in relative humidity-controlled triaxial experiments [J]. *Acta Geotechnica*, 2016, 11(3): 455 — 477.
- [14] Nguyen L, Fatahi B. Behaviour of clay treated with cement & fibre while capturing cementation degradation and fibre failure—C3F model [J]. *International Journal of Plasticity*, 2016, 81: 168 — 195.
- [15] Sun Y F, Xiao Y. Fractional order plasticity model for granular soils subjected to monotonic triaxial compression [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 118: 224 — 234.
- [16] Sun Y F, Gao Y F, Zhu Q Z. Fractional order plasticity modelling of state-dependent behaviour of granular soils without using plastic potential [J]. *International Journal of Plasticity*, 2018, 102: 53 — 69.
- [17] Sun Y F, Zheng C J. Fractional-order modelling of state-dependent non-associated behaviour of soil without using state variable and plastic potential [J]. *Advances in Difference Equations*, 2019(1): 83.
- [18] Qu P F, Zhu Q Z, Sun Y F. Elastoplastic modelling of mechanical behavior of rocks with fractional-order plastic flow [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 163: 105102.
- [19] 孙逸飞, 沈 扬. 基于分数阶微积分的粗粒料静动力界面本构模型[J]. *岩土力学*, 2018, 39(4): 1219 — 1226.
Sun Yifei, Shen Yang. Bounding surface model for granular aggregates incorporating the concept of fractional calculus [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, 39(4): 1219 — 1226. (in Chinese)
- [20] Lu D C, Liang J Y, Du X L, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule [J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 105: 277 — 290.
- [21] Henkel D J. The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear [J]. *Géotechnique*, 1956, 6(4): 139 — 150.
- [22] Dafalias Y F. Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(9): 966 — 987.
- [23] Anandarajah A M, Dafalias Y F. Bounding surface plasticity. III: Application to anisotropic cohesive soils [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(12): 1292 — 1318.
- [24] Hashiguchi K. Subloading surface model in

- unconventional plasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, 25(8): 917 — 945.
- [25] Hashiguchi K, Chen Z P. Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and the rotational hardening [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1998, 22(3): 197 — 227.
- [26] Hashiguchi K, Tsutsumi S, Okayasu T. Evaluation of typical conventional and unconventional plasticity models for prediction of softening behaviour of soils [J]. *Géotechnique*, 2002, 52(8): 561 — 578.
- [27] Yao Y P, Hou W, Zhou A N. UH model: Three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays [J]. *Géotechnique*, 2009, 59(5): 451 — 469.
- [28] Yao Y P, Zhou A N. Non-isothermal unified hardening model: A thermo-elasto-plastic model for clays [J]. *Géotechnique*, 2013, 63(15): 1328 — 1345.
- [29] Nakai T, Hinokio M. A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters [J]. *Soils and Foundations*, 2004, 44(2): 53 — 70.
- [30] Zhang S, Leng W M, Zhang F, et al. A simple thermo-elastoplastic model for geomaterials [J]. *International Journal of Plasticity*, 2012, 34: 93 — 113.
- [31] 张 升, 李海潮, 滕继东, 等. 考虑围压依存性的软岩结构性下加载面模型 [J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(7): 1269 — 1276.
Zhang Sheng, Li Haichao, Teng Jidong, et al. Structured subloading yield surface model for soft rock considering confining pressure [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(7): 1269 — 1276. (in Chinese)
- [32] Gajo A, Muir Wood D. A new approach to anisotropic, bounding surface plasticity: General formulation and simulations of natural and reconstituted clay behaviour [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2001, 25(3): 207 — 241.
- [33] Petalas A L, Dafalias Y F, Papadimitriou A G. Sanisand: An evolving fabric-based sand model accounting for stress principal axes rotation [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2019, 43(1): 97 — 123.
- [34] Jocković S, Vukićević M. Bounding surface model for overconsolidated clays with new state parameter formulation of hardening rule [J]. *Computers and Geotechnics*, 2017, 83: 16 — 29.
- [35] Taiebat M, Dafalias Y F. Sanisand: Simple anisotropic sand plasticity model [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2008, 32(8): 915 — 948.
- [36] 张 涛, 刘松玉, 蔡国军. 考虑胶结作用的木质素固化粉土边界面塑性模型 [J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(4): 670 — 680.
Zhang Tao, Liu Songyu, Cai Guojun. Boundary surface plasticity model for lignin-treated silt considering cementation [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(4): 670 — 680. (in Chinese)
- [37] Caputo M, Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel [J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2015, 1(2): 73 — 85.
- [38] 董晓丽, 赵成刚, 张卫华. 考虑相变状态的较密实饱和砂土弹塑性模型 [J]. *工程力学*, 2017, 34(1): 51 — 57.
Dong Xiaoli, Zhao Chenggang, Zhang Weihua. The saturated dense sand elastic-plastic model considering phase transition state [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, 34(1): 51 — 57. (in Chinese)
- [39] Zervoyannis C. Etude synthétique des propriétés mécaniques des argiles saturées et des sables sur chemin oedométrique et triaxial dérévolution [D]. Paris: Ecole Centrale des Arts et Manufactures, 1982.