



概率密度演化方程差分格式的计算精度及初值条件改进

朱志辉 刘禹兵 高雪萌 周高扬 余志武

THE CALCULATION PRECISION OF PROBABILITY DENSITY EVOLUTION EQUATION DIFFERENCE SCHEME AND THE IMPROVEMENT OF INITIAL CONDITION

ZHU Zhi-hui, LIU Yu-bing, GAO Xue-meng, ZHOU Gao-yang, YU Zhi-wu

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2021.06.0477>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于模型结构振动台试验的概率密度演化方法验证

VALIDATION OF THE PROBABILITY DENSITY EVOLUTION METHOD BASED ON SHAKING TABLE TESTS OF A MODEL STRUCTURE

工程力学. 2017, 34(3): 54-61 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2015.09.0743>

数据稀缺与更新条件下基于概率密度演化-测度变换的认知不确定性量化分析

QUANTIFICATION OF EPISTEMIC UNCERTAINTY DUE TO DATA SPARSITY AND UPDATING BASED ON THE FRAMEWORK VIA SYNTHESIZING PROBABILITY DENSITY EVOLUTION METHOD AND CHANGE OF PROBABILITY MEASURE

工程力学. 2020, 37(1): 34-42 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2019.02.0047>

地震作用下梁体碰撞间隙宽度的概率分析方法

PROBABILITY ANALYSIS OF POUNDING SEPARATION DISTANCE OF BRIDGES SUBJECTED TO EARTHQUAKE EXCITATIONS

工程力学. 2018, 35(8): 39-45 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2017.03.0263>

阻尼器对悬索桥双吊索减振效果的理论研究

THEORETICAL INVESTIGATION FOR THE EFFECTIVENESS OF THE DAMPERS INSTALLED BETWEEN THE HANGERS OF SUSPENSION BRIDGES

工程力学. 2018, 35(3): 186-192, 226 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2016.12.0945>

基于车桥耦合随机振动分析的钢桥疲劳可靠度评估

FATIGUE RELIABILITY EVALUATION OF STEEL BRIDGES BASED ON COUPLING RANDOM VIBRATION ANALYSIS OF TRAIN AND BRIDGE

工程力学. 2017, 34(2): 69-77 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2015.04.0334>

基于DEM-FDM耦合的普通铁路碎石道床-土质基床界面接触应力分析

STUDY ON INTERFACE STRESS BETWEEN BALLAST AND SUBGRADE FOR TRADITIONAL RAILWAY BASED ON COUPLED DEM-FDM

工程力学. 2018, 35(9): 170-179 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2017.06.0422>



订阅号：面向读者



订阅号：面向作者

扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

概率密度演化方程差分格式的 计算精度及初值条件改进

朱志辉^{1,2}, 刘禹兵¹, 高雪萌¹, 周高扬¹, 余志武^{1,2}

(1. 中南大学土木工程学院, 湖南, 长沙 410075; 2. 中南大学高速铁路建造技术国家工程研究中心, 湖南, 长沙 410075)

摘 要: 由于随机荷载作用下工程结构响应的一阶时间导数往往大于结构响应自身, 采用仅满足确定性结构响应分析计算精度的时间步长求解概率密度演化方程 (Probability density evolution equation, PDEE) 时, 总变差减小 (Total variation diminishing, TVD) 性质差分法计算的结构响应标准差通常无法满足精度要求。该文分别对比了不同差分时间步长下单边差分、Lax-wendroff (L-W) 双边差分 and TVD 差分三种 PDEE 数值求解方法的计算精度。为提升 TVD 差分的求解精度, 该文提出了差分时间步长的合理选取方法和正态分布型初值条件, 并通过数值算例验证了时间步长选取方法和正态分布型初值条件的准确性及普适性。数值算例结果表明: L-W 双边差分法的样本离散性最小, 误差允许范围内可采用的时间差分步长最大; 当仅关注均值和标准差等统计指标时, 建议使用 L-W 双边差分法; 利用该文方法可有效降低 TVD 差分所带来的数值误差; 正态分布型初值条件的标准差大小等于空间离散步长时, 可以获得最小均值误差。

关键词: 概率密度演化理论; 随机振动; 有限差分法; 计算精度; 差分稳定性

中图分类号: O324 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2021.06.0477

THE CALCULATION PRECISION OF PROBABILITY DENSITY EVOLUTION EQUATION DIFFERENCE SCHEME AND THE IMPROVEMENT OF INITIAL CONDITION

ZHU Zhi-hui^{1,2}, LIU Yu-bing¹, GAO Xue-meng¹, ZHOU Gao-yang¹, YU Zhi-wu^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha, Hu'nan 410075, China;

2. National Engineering Research Center for High Speed Railway Construction Technology, Changsha, Hu'nan 410075, China)

Abstract: Since the first time derivative of engineering structure response under random load was often larger than the structure response itself, if the time step which only meets the precision requirements of deterministic structural response analysis was used to solve the probability density evolution equation (PDEE), the standard deviation of structural response calculated by total variation diminishing (TVD) property difference method cannot meet the precision requirements. The computational precision of three probability density evolution equation numerical solution methods, such as one-sided difference method, Lax-Wendroff (L-W) two-sided difference method and TVD property difference method are compared under different difference time steps. In order to improve the solving precision of TVD property difference method, a reasonable difference time step selection method and initial value condition of normal distribution type are proposed, and the precision and universality of the time step selection method and initial value condition of normal distribution type are verified

收稿日期: 2021-06-24; 修改日期: 2021-10-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(52078498); 重庆市社会事业与民生保障科技创新专项项目(CSTC2016SHMSZX30014)

通讯作者: 朱志辉 (1979—), 男, 河南人, 教授, 博士, 博导, 主要从事车-桥耦合振动研究 (E-mail: zzh0703@163.com).

作者简介: 刘禹兵 (1998—), 男, 河南人, 硕士生, 主要从事车-桥耦合振动研究 (E-mail: 1426007221@qq.com);

高雪萌 (1998—), 女, 河北人, 博士生, 主要从事车-桥耦合振动研究 (E-mail: 874338175@qq.com);

周高扬 (1999—), 男, 江西人, 博士生, 主要从事车-桥耦合振动研究 (E-mail: 806033364@qq.com);

余志武 (1955—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 博导, 主要从事车-桥耦合振动研究 (E-mail: zhwyu@csu.edu.cn).

by numerical examples. The results of numerical examples show that the sample discreteness of the two-sided difference method is the smallest, and the time difference step size is the largest within the allowable error range. When only the mean value and standard difference are concerned, the two-sided difference method is suggested. The numerical error caused by TVD property difference method can be effectively reduced by using this method. The minimum mean error can be obtained when the standard deviation of the initial condition of normal distribution is equal to the space step.

Key words: probability density evolution theory; random vibration; finite difference method; calculation precision; differential stability

工程结构服役期内会受到各类随机动力作用^[1], 结构响应也表现出明显的随机性。开展随机动力作用下的结构可靠度分析对结构性能和安全性评估至关重要。近年来, 由李杰和陈建兵^[2-3]提出的广义概率密度演化理论 (Generalized probability density evolution theory, GPDET) 为结构的随机响应预测及其可靠度分析提供了新的途径。

由于实际工程的复杂性, GPDET 的偏微分方程很难获得精确理论解析解, 因此常采用数值方法求解^[4]。这些数值算法包括有限元法^[5]、路径积分法^[6]、等效线性化法^[7]、有限差分法^[8]等。当采用适当的差分格式时, 有限差分法在概率密度演化分析中表现出良好性能^[9]。目前常用的概率密度演化方程 (PDEE) 有限差分法按照差分近似微分的处理方式分为单边差分、L-W 双边差分和总变差减小 (TVD) 性质差分^[10]三种数值差分方法。单边差分和 L-W 双边差分法分别利用单向差分和中心差分来近似微分结果, 两者分别具有一阶和二阶计算精度。而 TVD 差分法由于引入了通量限制器, 避免了 L-W 双边差分法可能存在的非物理负数概率解。因此, 李杰和陈建兵^[10]构造了一类适用于 PDEE 求解的 TVD 差分格式并将其沿用其后开展的各项概率密度演化分析。

GPDET 分为概率分配和 PDEE 求解两大关键步骤。概率分配对计算精度影响的研究^[11-12]已较为成熟。在概率分配满足计算精度的前提下, YU 等^[13]基于 GPDET 开展铁路桥梁在随机荷载条件下的结构响应分析时, 通过对比数论选点法与蒙特卡洛法的激励样本计算结果, 验证了车轨桥随机振动模型的正确性; XU 等^[14]基于 GPDET 将车辆—轨道相互作用模型与轨道不平顺概率模型有效耦合, 同样利用数论选点法与蒙特卡洛法计算结果对比, 验证了耦合模型的正确性。以往研究中, GPDET 与蒙特卡洛法的对比结果仅体现了概率分配步骤中代表性样本对样本空间的表征性,

而两种方法对比的均值和标准差均采用 TVD 差分法计算。由于该差分方法计算精度有限, 且在局部极值点附近精度降低^[15], 这也导致概率密度演化分析中^[16-17], 在荷载作用的后半程 (卸载阶段), 结构响应的概率密度演化标准差结果依旧持续增大, 这样的计算结果显然不满足精度要求, 甚至不符合实际情况。因此, PDEE 求解步骤中产生的计算误差不容忽视, 开展基于 TVD 差分法的 PDEE 数值求解精度分析非常重要。

通常情况下, PDEE 的初值条件为在空间方向可导性较差的脉冲型狄拉克 (Dirac) 函数, 这将影响到概率密度数值解和可靠度分析的精确性。为提升 TVD 差分方法的求解精度, 石晟等^[18]提出了余弦型初值条件, 余弦型初值虽比脉冲型初值平滑, 但空间方向的初始概率赋值范围受限于余弦函数周期, 且未给出时间差分步长选取原则。

本文针对 PDEE, 首先对单边差分、L-W 双边差分和 TVD 差分三种差分方法开展单样本和多样本的差分精度分析; 进而提出了 TVD 差分的时间步长合理选取方法和正态分布型初值条件, 通过与蒙特卡洛法的数理统计均值和方差作对比, 验证了本文方法的合理性。

1 概率密度演化方程及数值求解方法

1.1 概率密度演化方程

结构响应量 $\mathbf{Z}$ 和随机变量 $\boldsymbol{\theta}$ 组成的增广系统 $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta})$ 是一个保守的随机系统, 随机性完全来自于 $\boldsymbol{\theta}$, 整个过程中, 没有随机因素的增减。将 $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta})$ 的联合概率密度函数记为 $p_{\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}, t)$, 根据概率守恒原理^[19], 对于给定的离散参数代表点集 $\boldsymbol{\theta}_l$ ($l = 1, 2, \dots, n_{\text{sel}}$), PDEE 可写为一维偏微分方程形式:

$$\frac{\partial p_{\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}_l, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{Z}} \frac{\partial p_{\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}}(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}_l, t)}{\partial \mathbf{Z}} = 0 \quad (1)$$

第 l 组离散代表点集对应的边界条件和初始条

件为:

$$\begin{aligned} p_{Z,\theta}(Z, \theta_l, t) \Big|_{z_i=\pm\infty} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, nz; \\ p_{Z,\theta}(Z, \theta_l, t) \Big|_{t=t_0} &= \delta(Z - Z_0) P_l \end{aligned} \quad (2)$$

式中: δ 为 Dirac 函数; P_l 为初始赋得概率; Z_0 为初始时刻对应的结构响应量。

对 n_{sel} 组概率密度分布值 $p_{Z,\theta}(Z, \theta_l, t)$ 进行累计求和, 得到最终的结构响应数值解:

$$p_Z(Z, t) = \sum_{l=1}^{n_{\text{sel}}} p_{Z,\theta}(Z, \theta_l, t) \quad (3)$$

按照 GPDET 计算均值 μ 与标准差 σ :

$$\begin{cases} \mu(t) = \sum_{j=1}^{nz} p_Z(Z_j, t) Z_j dz \\ \sigma(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{nz} p_Z(Z_j, t) [Z_j - \mu(t)]^2 dz} \end{cases} \quad (4)$$

式中: dz 为空间离散步长; nz 为空间离散点数量。

1.2 数值求解方法

式 (1) 的偏微分方程很难给出理论解析解, 故通常采用数值差分方法进行求解计算。通过对概率密度值 p 进行时间 t 方向的一阶和二阶泰勒展开^[9], 利用差分方法近似 p 的一阶和二阶偏微分, 可得:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_j^k = \frac{p_j^{k+1} - p_j^k}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial Z}\right)_{j-1}^k = \frac{p_j^k - p_{j-1}^k}{\Delta Z} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \ddot{Z}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} - \ddot{Z} \frac{\partial p}{\partial Z}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}\right)_j^k = \frac{p_{j+1}^k - 2p_j^k + p_{j-1}^k}{\Delta Z^2} \quad (6)$$

式中: p_j^k 为第 j 个空间步在第 k 个时间点对应的概率密度; Δt 和 ΔZ 分别为时间间隔和空间响应间隔。

在微小时间间隔 $[t, t + \Delta t]$ 内, 加速度 $\ddot{Z} \approx 0$, 故略去加速度项 $\ddot{Z}$, 利用式 (5) 和式 (6), 经整理可得到式 (7) 所示的单边差分格式和式 (8) 所示的 L-W 双边差分格式 (下文简称为双边差分):

$$\begin{aligned} p_j^{k+1} - p_j^k &= -0.5(\lambda \dot{Z} - |\lambda \dot{Z}|) \Delta p_{j+\frac{1}{2}}^k - \\ &\quad 0.5(\lambda \dot{Z} + |\lambda \dot{Z}|) \Delta p_{j-\frac{1}{2}}^k \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p_j^{k+1} - p_j^k &= -0.5(\lambda \dot{Z} - |\lambda \dot{Z}|) \Delta p_{j+\frac{1}{2}}^k - 0.5(\lambda \dot{Z} + |\lambda \dot{Z}|) \Delta p_{j-\frac{1}{2}}^k - \\ &\quad 0.5(|\lambda \dot{Z}| - \lambda^2 \dot{Z}^2) (\Delta p_{j+\frac{1}{2}}^k - \Delta p_{j-\frac{1}{2}}^k) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\lambda = dt/dz \quad (9)$$

$$\Delta p_{j-\frac{1}{2}}^k = p_j^k - p_{j-1}^k \quad (10)$$

式中: λ 为网格差分比; Δp 为概率密度差值。

单边或双边差分法的概率密度值 p_j^{k+1} 可由第 k 个时刻各空间步对应的概率密度值线性叠加得到, 故可将单边或双边差分法改写为:

$$p_j^{k+1} = \sum_{\gamma=-1}^1 A_\gamma p_{j+\gamma}^k \quad (11)$$

式中, A_γ 为第 k 个时间点对应的线性算子。

单边差分法线性算子为:

$$\begin{cases} A_1 = 0.5(|\lambda \dot{Z}| - \lambda \dot{Z}) \\ A_0 = 1 - |\lambda \dot{Z}| \\ A_{-1} = 0.5(|\lambda \dot{Z}| + \lambda \dot{Z}) \end{cases} \quad (12)$$

双边差分法线性算子为:

$$\begin{cases} A_1 = 0.5(\lambda^2 \dot{Z}^2 - \lambda \dot{Z}) \\ A_0 = 1 - \lambda^2 \dot{Z}^2 \\ A_{-1} = 0.5(\lambda^2 \dot{Z}^2 + \lambda \dot{Z}) \end{cases} \quad (13)$$

由于双边差分法在泰勒展开时忽略了高阶量, 导致计算结果产生数值振荡, 甚至出现非物理的概率密度负值。为解决这一问题, 采用带有通量限制器 ϕ 的 TVD 性质双边差分格式 (简称 TVD 差分), 以此来限制数值通量恒为正数:

$$\begin{aligned} p_j^{k+1} - p_j^k &= -0.5(\lambda \dot{Z} - |\lambda \dot{Z}|) \Delta p_{j+\frac{1}{2}}^k - 0.5(\lambda \dot{Z} + |\lambda \dot{Z}|) \Delta p_{j-\frac{1}{2}}^k - \\ &\quad 0.5(|\lambda \dot{Z}| - \lambda^2 \dot{Z}^2) (\phi_{j+\frac{1}{2}} \Delta p_{j+\frac{1}{2}}^k - \phi_{j-\frac{1}{2}} \Delta p_{j-\frac{1}{2}}^k) \end{aligned} \quad (14)$$

式中, ϕ 为通量限制器, 取值范围为 $[0, 1]$, 具体表达式详见文献 [10]。当 ϕ 恒为 0, 式 (14) 转化为单边差分法; 当 ϕ 恒为 1, 式 (14) 转化为双边差分法^[9]。

1.3 差分格式的数值耗散

为比较差分格式的数值耗散情况, 通过观察 PDEE 中初始概率值为谐波函数 $e^{i\beta Z}$ 的传播, 来了解差分格式的特征, 谐波函数初值条件为:

$$p_j^0 = e^{i\beta j \Delta Z} \quad (15)$$

式中: β 为波数; Δz 为空间离散步长。

将式 (15) 代入式 (11) 可得:

$$\begin{aligned} p_j^1 &= \sum_{\gamma=-1}^1 A_\gamma p_{j+\gamma}^0 = \sum_{\gamma=-1}^1 A_\gamma e^{i\beta(j+\gamma)\Delta Z} = \\ &\quad \left(\sum_{\gamma=-1}^1 A_\gamma e^{i\beta\gamma\Delta Z} \right) e^{i\beta j \Delta Z} = B(\lambda, \dot{Z}) p_j^0 \end{aligned} \quad (16)$$

式中, B 为概率密度演化算子, 其大小由网格差分比 λ 和结构响应一阶时间导数 $\dot{Z}$ 确定。当 $|B| \leq 1$ 时, 式 (16) 为稳定差分格式^[9]。

通过对式 (16) 进行迭代便可得到任一时刻的概率值 p_j^{k+1} :

$$p_j^{k+1} = B(\lambda, \dot{Z}) p_j^k = B^{k+1} p_j^0 \quad (17)$$

式中, B^{k+1} 的上标 $k+1$ 为对初始概率 p_j^0 进行了 $k+1$ 次差分迭代计算, 而不是对算子 B 进行简单的幂计算。

由于式 (5) 和式 (6) 利用差分代替微分得到线性算子 A_γ , 由式 (17) 可知, 差分格式、结构响应方向上各时刻概率密度函数 p 的可导性、结构响应一阶时间导数 $\dot{Z}$ 、差分求解次数 k (或时间长短) 和概率初值条件 p^0 均对数值差分结果有直接影响。且任一时刻的概率密度值都可由初值条件 p_j^0 迭代获得。

整理得到单边差分与双边差分概率密度演化算子 B_o 和 B_d 的表达式分别为:

$$B_o = 1 - \lambda \dot{Z} (1 - e^{-i\beta \Delta Z}),$$

$$B_d = (1 - \lambda^2 \dot{Z}^2) + \lambda^2 \dot{Z}^2 \cos(\beta \Delta Z) - i \lambda \dot{Z} \sin(\beta \Delta Z) \quad (18)$$

当 $|\lambda \dot{Z}| < 1$ 时, 双边差分的概率密度演化算子 B_d 比单边差分的 B_o 更接近 1。由式 (18) 可知, 只考虑一阶泰勒展开的单边差分法, 其数值耗散大于考虑二阶泰勒展开项的双边差分法。结合式 (14) 可知, TVD 差分法的数值耗散情况介于单边差分与双边差分之间。

2 数值差分时间步长及正态分布型初值条件

2.1 时间步长选取

数值差分的稳定性条件为 CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy condition):

$$|\lambda \dot{Z}| \leq 1 \quad (19)$$

由式 (9) 和式 (19) 可得空间离散步长的要求为:

$$dZ \geq \max(|\dot{Z}|) \cdot dt \quad (20)$$

式 (20) 表明: 只要响应离散步长 dZ 足够大, 便可保证概率密度演化计算收敛。而当工程结构受地震^[20]、轨道不平顺^[21] 和风载荷^[22] 等剧烈变化的随机荷载时, 则需要更小的时间步长与空间步长来提升概率密度演化结果计算精度。为呈现出概率密度演化结果的峰值变化, 并保证结果误差符合工程要求, 必须使各样本的概率演化曲线在“时间—空间”网格上有明显的重叠和分离部分, 这就对网格离散精度提出了要求。

有限差分法求解过程示意图如图 1 所示, 竖轴代表响应量, 样本 A 和样本 B 分别代表样本空间中某两条以通量速度为 $\dot{Z}_A$ 和 $\dot{Z}_B$ 在“时间 t —空间 Z ”网格上进行概率密度演化的曲线。

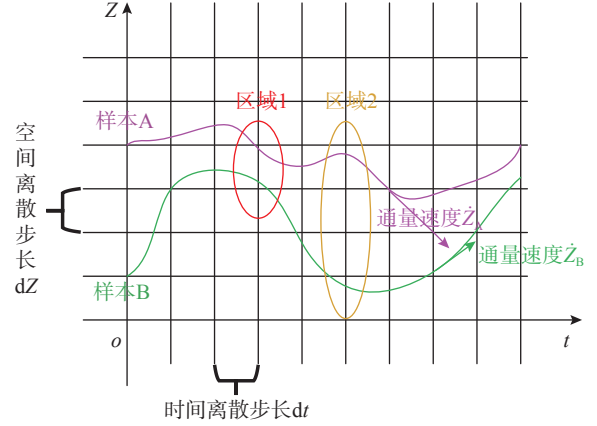


图 1 有限差分法求解过程示意图
Fig. 1 Finite difference method solution process diagram

图 1 中, 区域 1 的两样本差异小于 dZ , 两样本的概率密度值将在同一空间离散步左右相邻网格节点上表征, 致使两样本结果差异性较低, 随着类似情况的增加, 误差不断累积, 最终的概率密度分布范围也将比实际情况更宽 (标准差结果失真)。同时, 由于概率守恒 (各时刻概率之和恒为 1), 概率密度峰值也将比实际情况更小。因此, 只有当空间离散步长 dZ 较小时, 各样本的变化差异性才能很好的体现出来 (如区域 2)。

使用 TVD 差分法求解 PDEE 时, 由于通量限制器 ϕ 取值范围为 $[0, 1]$, 故 TVD 差分法的单样本概率密度演化曲线的离散性只能随差分迭代次数的增加逐渐增大或维持离散性不变, 这也将导致最终的概率密度演化结果 (或标准差结果) 误差较大, 甚至是错误的。

为保证数值差分计算精度, 体现出各样本之间的差异性, 本文提出空间步长 dZ 的最大限度:

$$dZ \leq H \cdot \frac{1}{T}, \quad H = \min \left[\frac{|\dot{Z}|}{\ln(n_{\text{sel}} + 1)}, 0.05 \right] \quad (21)$$

式中: $|\dot{Z}|$ 为关注时间段的各样本结构响应差值范围; T 为结构响应分析总时长。

为同时满足计算稳定性与精度要求, 改进时间步长 dt^* 应为:

$$dt^* \leq \frac{H}{\Psi \cdot \max(|\dot{Z}|) \cdot T} \quad (22)$$

式中: T 为概率密度演化分析总时长; Ψ 为保守系

数,各样本响应结果差异越小,保守系数取值越大。

2.2 正态分布型初值条件

在评价可靠度时,通常将获得关注量的响应与规定限值比较,令“ W =规定限值-关注量响应”。通过假设等价极值事件 $W\sin(t)$,将该虚拟三角函数的一阶时程导数 $W\cos(t)$ 代入式(1),即可得到虚拟随机过程的概率密度演化结果。当 $t=\pi/2$ 时,等价极值事件与实际过程 W 相等^[23]。

基于这一思想,即可得到结构可靠度 R :

$$R = \int_0^{+\infty} p_Z dZ \quad (23)$$

由式(23)可知,概率密度 p_Z 的求解精度会直接影响后续的可靠度分析结果,通常各样本对应的 PDEE 初始条件为式(3)所示的 Z_0 处的脉冲型 Dirac 函数,而 Dirac 函数初值条件在空间方向振荡明显,这导致初值条件关于空间方向的可导性对数值计算结果产生影响^[18]。

为进一步提高 TVD 差分的计算精度,本文基于正态分布函数提出了一种如图 2 所示的初值条件:

$$p_j^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(Z_j - Z_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (24)$$

式中: p_j^0 为在空间离散点 Z_j 处由正态分布函数 $N(Z_0, \sigma)$ 得到的概率密度值; Z_0 为初始时刻虚拟随机过程对应的解。

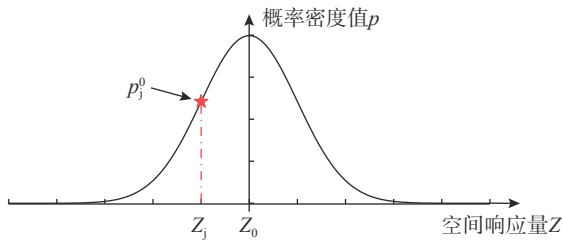


图 2 基于正态分布函数的初值条件

Fig. 2 Initial condition based on normal distribution function

为满足概率守恒条件,需使初始时刻各空间离散点的概率之和为 1,则修正后的概率密度 $\hat{p}_j^0$ 为:

$$\hat{p}_j^0 = p_j^0 / \left(\sum_{\omega=1}^{n_j} p_{\omega}^0 \right) \quad (25)$$

式中, n_j 为空间离散点数量。

正态分布函数型初值条件的概率峰值及分布范围受标准差 σ 控制。当 σ 取值较小(即初值条件集中在 Z_0 处)时,该分布条件可近似于脉冲型 Dirac 函数初值分布。

3 差分格式计算精度的影响因素

3.1 样本精度影响分析

3.1.1 单样本数值差分精度

为对比不同差分格式对结构可靠度计算精度的影响,构造目标三角函数 $y(t)$:

$$y(t) = A \sin(t) \quad (26)$$

式中: A 为三角函数幅值,取值为 2; t 为时间,选取范围为 0 s~3.15 s。

选取差分时间步长 0.0001 s,按式(4)计算单样本的均值和标准差(该统计特征值无实际物理意义,仅用于判断演化结果的离散程度),结果见图 3。

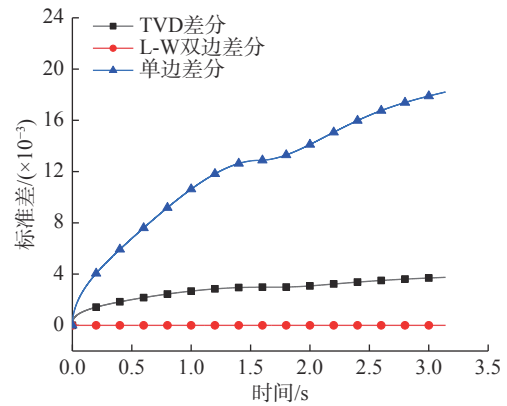


图 3 不同差分格式的单样本离散程度

Fig. 3 The degree of single sample dispersion of different difference schemes

图 3 中:三种差分格式计算的单样本标准差均随着时间增大而增大(其中双边差分结果过小而不明显),这是由于随着差分迭代次数的增加,数值耗散越来越严重。其中,双边差分格式的数值耗散问题最小,单样本标准差都远小于其他差分格式。0.0001 s 差分时间步长下,双边差分格式在 π 时刻的标准差为 2.5×10^{-10} ;而单边差分法单样本离散程度最严重,不建议工程使用,下文将不再对单边差分法进行计算分析。

图 4 为 0.01 s~0.0001 s 内不同差分时间步长的单样本均值结果。由图 4 可知,0.01 s 的时间步长即可满足目标函数“确定性分析计算要求”。各差分时间步长下单样本均值结果一致,差分方法以及差分步长对均值结果的不产生影响。

图 5 为 TVD 差分和双边差分格式不同差分步长的单样本离散程度。由图 5(a)可知,0.01 s 和 0.0001 s 差分时间步长在 π 时刻对应的 TVD 差分标准差分别为 0.0774 和 0.0037,仅满足确定性分析计

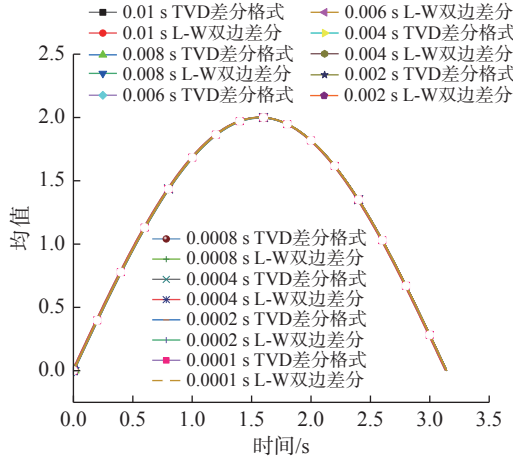


图4 不同差分时间步长的单样本均值

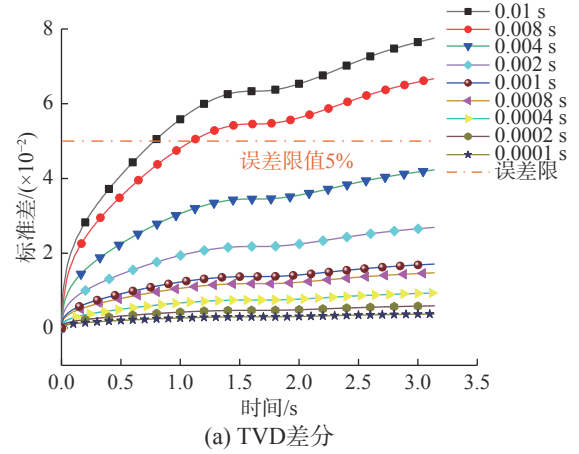
Fig. 4 Single sample means with different difference time steps

算要求 (0.01 s) 的概率结果离散性明显大于 0.0001 s 的标准差结果。当差分步长小于 0.004 s 时, TVD 差分在第一个周期内的标准差均小于 5%。按式 (22) 计算的时间步长为 $dt^* \leq 0.05 / (5 \times 2 \times 5) = 0.001$ s, 该步长能很好地保证 TVD 差分的单样本计算精度。图 5(b) 中, 双边差分标准差均符合误差限值要求, 这表明相同误差限值要求下, 双边差分可采用更大的差分步长, 提升计算效率。

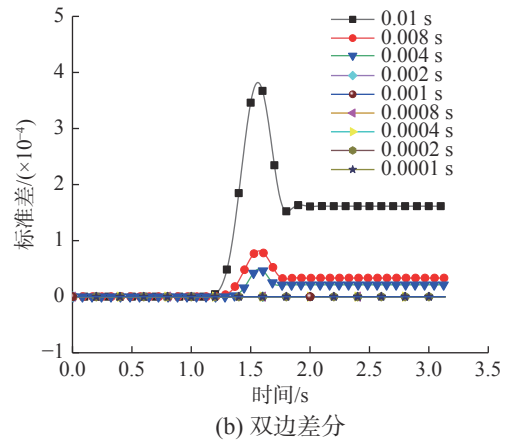
3.1.2 多样本数值差分精度

为进一步验证式 (22) 的时间步长选取的合理性, 假定式 (26) 的三角函数幅值 A 为服从正态分布 $N(2, 0.1)$, 并对 100 条随机正弦曲线开展概率密度演化计算, 验证本文时间步长选取方法的合理性。满足式 (22) 的差分时间步长为 $dt^* \leq \frac{0.04}{5 \times 2 \times 5} = 0.0008$ s。

图 6 为不同差分时间步长的多样本统计特征值。图 6(a) 中, 差分时间步长对多样本均值不产生影响。图 6(b) 中, TVD 差分的标准差结果受差分时间步长影响显著, 0.0008 s 和 0.01 s 时间步长的 $\pi/2$ 时刻处标准差值分别为 0.098 56 和 0.1147, 与精确解 0.1 的误差分别为 1.44% 和 14.7%, 随着概率的演化, 各差分时间步长的标准差相对于精确解均出现了增大现象, 其中 π 时刻精确解为 0, 而 0.01 s 步长计算的标准差为 0.071 22, 计算结果严重偏离精确解。图 6(c) 中, 由于双边差分的单样本的数值耗散远小于 TVD 差分, 故其多样本标准差结果也更接近于精确解。双边差分法以 0.0008 s 和 0.01 s 时间步长计算的 $\pi/2$ 时刻处标准差值分别为 0.099 69 和 0.0987, 与精确解 0.1 的误



(a) TVD 差分



(b) 双边差分

图5 不同差分时间步长的单样本标准差

Fig. 5 Single sample standard deviations with different difference time steps

差分别为 0.31% 和 1.3%。因此, 当计算结果仅关注均值和标准差等统计指标时, 使用数值耗散较小的双边差分法, 可在较大步长条件下获得高精度的统计指标, 并大幅缩减计算时间。

3.2 改进初值条件

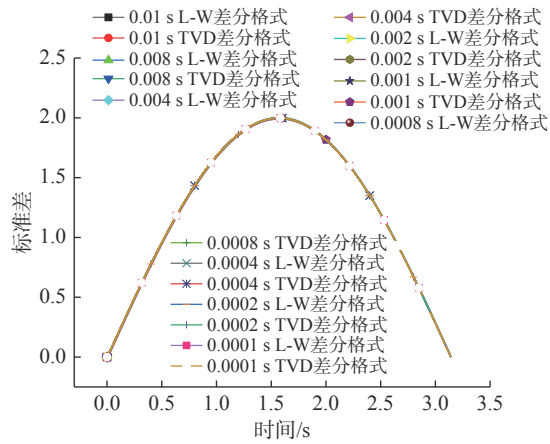
第 3.1 节中目标函数 $y(t)$ 的一阶时间导数值相较于函数自身的大小差异不明显。为进一步考察初值条件及其可导性对 TVD 差分的影响, 构造一阶时间导数值较大且空间方向可导性较差的目标概率密度函数 $Y(A, t)$ 作为精确解:

$$Y(A, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{[A-\mu(t)]^2}{2\sigma^2(t)}}, -5 \leq A \leq 7 \quad (27)$$

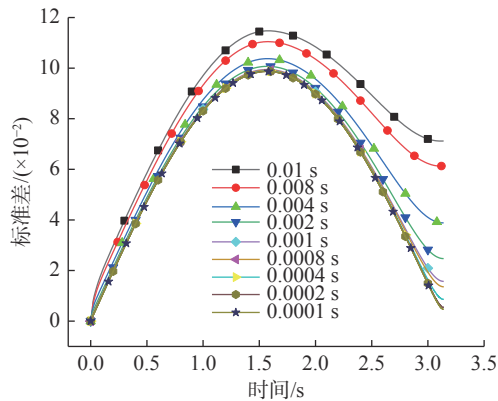
$$\mu(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 1.1, \sigma(t) = 0.005t^2 + 0.05 \quad (28)$$

式中: A 为在任一时刻 t 服从随机特定正态分布的变量, t 取 0 s~5 s; μ 和 σ 分别为正态分布均值和标准差。图 7 为目标概率密度函数。

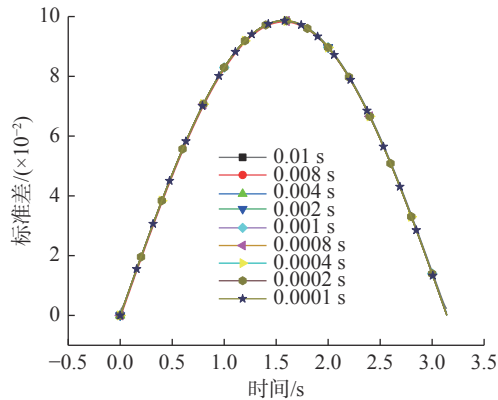
图 8 为利用 TVD 差分法在时间步长为 0.0001 s 条件下计算的概率密度数值解。图 8 的 Dirac 函数



(a) 均值



(b) TVD差分标准差



(c) 双边差分标准差

图6 不同差分时间步长的多样本统计特征值

Fig. 6 Multiple statistical eigenvalues of different difference time steps

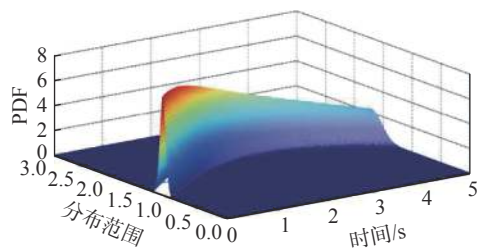


图7 目标概率密度(精确解)

Fig. 7 Target probability density (exact solution)

型初值条件零时刻的概率分布较为尖锐, 概率密度函数 (Probability density function, PDF) 峰值为 12.85, 而图 7 的精确解初始时刻 PDF 峰值为 7.97。

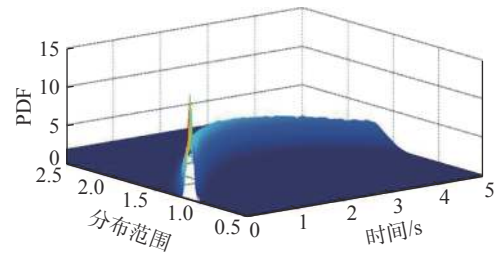
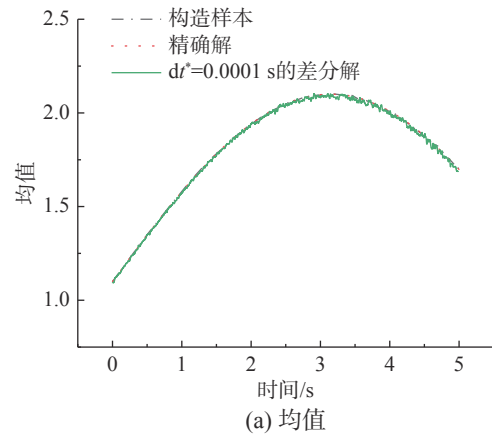


图8 时间步长 0.0001 s 的概率密度 (TVD 差分数值解)

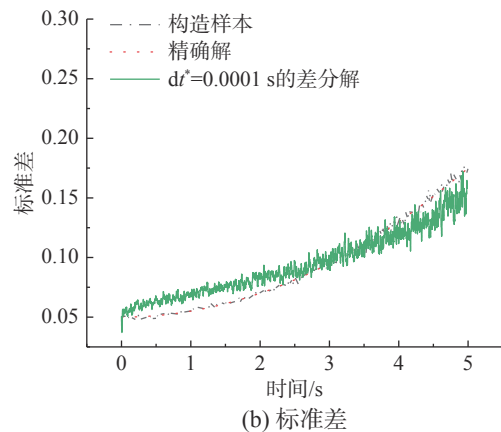
Fig. 8 Probability density with time step of 0.0001 s (TVD difference numerical solution)

选取原始的时间步长为 $dt = 0.01$ s, 根据式 (27) 和式 (28) 即可得到 100 条目标样本曲线。这 100 条随机样本的均值和标准差分别按传统数理统计方法和数值差分法计算, 结果见图 9。

图 9(a) 中, $dt = 0.01$ s 的时间步长能够满足构造样本精度要求, 而对于 $dZ \geq 1.0075$ 的 CFL 条件, 过大的空间步长将导致无法进行差分计算。这进一步表明当结构响应一阶时间导数过大时, 仅满



(a) 均值



(b) 标准差

图9 与精确解的结果对比

Fig. 9 The results are compared with the exact solution

足结构响应精度要求的时间步长并不能满足概率密度演化方程的差分求解精度。图 9(b) 中, 初值条件在分布范围方向上的平滑性很差, 这也导致图 9(b) 的标准差结果在初始时刻大幅震荡, 进而导致之后 0 s~2 s 内的标准差都严重偏离精确解; 数值差分标准差曲线后半段的离散性逐渐增大是因为通量限制器的存在导致概率密度分布范围只能增大不能减小引起的。

图 10 正态分布型初值条件标准差 $\sigma = dZ$ 时的概率密度分布结果。由于采用了正态分布型初值条件, 其初始时刻 PDF 峰值为 11.78, 与图 8 的 Dirac 函数型初值条件相比, PDF 峰值降低, 分布范围方向上的可导性提高, 使概率密度分布结果更接近图 7 的精确解。

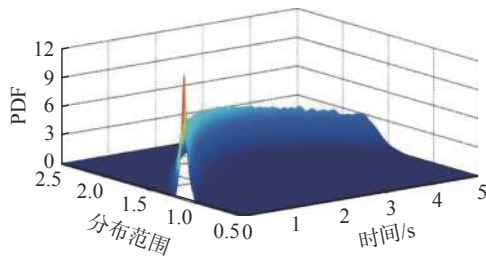


图 10 $\sigma = dZ$ 时的概率密度

Fig. 10 The probability density at $\sigma = dZ$

以差分解计算误差的时间平均值 E_{rro} 作为计算精度指标:

$$E_{\text{rro}} = \frac{\sum_{i=1}^{nt} |E_i|}{T} \quad (29)$$

式中, E_i 为第 i 时间点均值或标准差的误差。

使用不同 σ 值 (σ 以 $0.2dZ$ 为间隔) 的正态分布型初值条件开展数值计算, 结果见图 11。图 11 结果表明: 改进的正态分布型初值条件可通过调节标准差 σ 达到减小均值和标准差计算误差的目的。随着 σ 的增大, 均值累计误差一直减小; 而标准差累计误差先减小后增大, $\sigma = dZ$ 时达到最小值。与式 (27) 精确解的初始概率相比, 按式 (3) Dirac 函数型初值条件累加求和得到的初始概率分布更集中 (即峰值更大, 分布范围更窄), 因此, 正态分布型初值条件在 $\sigma = dZ$ 之前, σ 的增大导致初始概率分布的峰值逐渐降低, 分布范围逐渐变宽, 初始概率分布向精确解逼近; 随着 σ 的进一步增大, 虽然初始概率分布的峰值依旧向精确解靠近, 但分布范围却比精确解更大, 导致标准差累计误差不再减小。

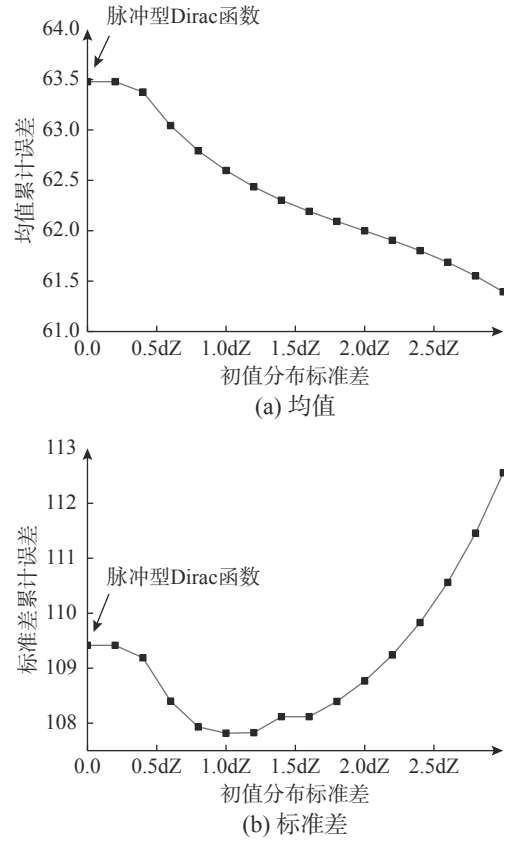


图 11 初值条件对累计误差的影响

Fig. 11 Influence of initial condition on cumulative error

4 结论

本文分析了单边差分、L-W 双边差分和 TVD 差分三种差分方法在不同差分时间步长条件下的样本离散性, 指出了差分精度的影响因素, 提出了 TVD 差分法的时间步长合理选取方法和正态分布型初值条件, 通过数值算例验证了时间步长选取方法和正态分布型初值条件的准确性及普适性, 并得到如下结论:

(1) L-W 双边差分法的单样本概率演化离散性最小, 误差允许范围内可采用的时间步长最大, 当计算结果仅关注均值和标准差等统计指标, 而不考虑概率密度分布情况时, 建议使用 L-W 双边差分法开展高效的数值求解。

(2) 通过对比三种差分方法的数值耗散情况, 得到数值差分计算精度的影响因素包括: 结构响应方向上各时刻概率密度函数的可导性、结构响应一阶时间导数、差分求解次数 (或时间长度) 和概率初值条件。

(3) 基于 TVD 差开展 PDEE 数值求解时, 空间离散步长不仅要满足 CFL 条件要求, 还应满足各样本差异性的最大值限制, 本文提出的差分

时间步长选取方法有效降低了 TVD 差分的单样本离散性和多样本概率密度求和导致的累加误差,并且差分时间步长可根据样本差异程度灵活调整。

(4) 在传统的脉冲函数型初值条件基础上提出了一种更平滑且可以通过标准差 σ 控制的正态分布型初值条件形式。当 σ 取值较小时,该分布条件近似于脉冲型 Dirac 函数初值分布。合适的标准差 σ 可以提高正态分布型初值条件的数值差分精度。

参考文献:

- [1] 陈龙, 黄天立. 基于贝叶斯更新和逆高斯过程的在役钢筋混凝土桥梁构件可靠度动态预测方法[J]. *工程力学*, 2020, 37(4): 195 — 204.
CHEN Long, HUANG Tianli. Dynamic prediction of reliability of in-service RC bridges using the Bayesian updating and inverse Gaussian process [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(4): 195 — 204. (in Chinese)
- [2] 李杰, 陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化分析[J]. *力学学报*, 2003, 35(6): 716 — 722.
LI Jie, CHEN Jianbing. The probability density evolution method for analysis of dynamic nonlinear response of stochastic structures [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(6): 716 — 722. (in Chinese)
- [3] 李杰, 陈建兵. 随机结构动力反应分析的概率密度演化方法[J]. *力学学报*, 2003, 35(4): 437 — 442.
LI Jie, CHEN Jianbing. Probability density evolution method for analysis of stochastic structural dynamic response [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(4): 437 — 442. (in Chinese)
- [4] WANG W J, FENG J H, XU W. The numerical solution of the TVD runge-kutta and WENO scheme to the FPK equations to nonlinear system of one-dimension [J]. *Applied and Computational Mathematics*, 2016, 5(3): 160 — 164.
- [5] BERTRAND F, BOFFFI D, DIDGO G. Convergence analysis of the scaled boundary finite element method for the Laplace equation [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2021, 47(3): 34 — 50.
- [6] ZHU H T, DUAN L L. Probabilistic solution of nonlinear random ship roll motion by path integration [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, 83: 1 — 8.
- [7] LEONENKO G M, PHILLIPS T N. Numerical approximation of high-dimensional Fokker-Planck equations with polynomial coefficients [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 273: 296 — 312.
- [8] MIRZAEI F, REZAEI S, SAMADYAR N. Numerical solution of two-dimensional stochastic time-fractional Sine-Gordon equation on non-rectangular domains using finite difference and meshfree methods [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, 127: 53 — 63.
- [9] LI J, CHEN J B. Stochastic dynamics of structures [M]. United States of America: John Wiley and Sons (Asia) Pte Ltd, 2010.
- [10] 李杰, 陈建兵. 随机结构动力可靠度分析的概率密度演化方法[J]. *振动工程学报*, 2004, 17(2): 121 — 125.
LI Jie, CHEN Jianbing. Probability density evolution method for dynamic reliability analysis of stochastic structures [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(2): 121 — 125. (in Chinese)
- [11] LI J, CHEN J B. The number theoretical method in response analysis of nonlinear stochastic structures [J]. *Computational Mechanics*, 2006, 39(6): 693 — 708.
- [12] CHEN J B, LI J. Strategy for selecting representative points via tangent spheres in the probability density evolution method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 74(13): 1988 — 2014.
- [13] YU Z W, MAO J F. A stochastic dynamic model of train-track-bridge coupled system based on probability density evolution method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 59: 205 — 232.
- [14] XU L, ZHAI W M, GAO J M. A probabilistic model for track random irregularities in vehicle/track coupled dynamics [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 51: 145 — 158.
- [15] 刘颖. 一维双曲守恒律方程的高精度GDQ方法[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2006.
LIU Ying. High accuracy GDQ method for one dimension hyperbolic conservation equation [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2006. (in Chinese)
- [16] 余志武, 毛建锋, 谈遂, 等. 车桥竖向随机振动的概率密度演化分析[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2015, 46(4): 1420 — 1427.
YU Zhiwu, MAO Jianfeng, TAN Sui, et al. Probability density evolution analysis of track-bridge vertical coupled vibration with irregularity random excitation [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2015, 46(4): 1420 — 1427. (in Chinese)
- [17] XIAO X, YAN Y, CHEN B. Stochastic dynamic analysis for vehicle-track-bridge system based on probability density evolution method [J]. *Engineering Structures*, 2019, 188: 745 — 761.
- [18] 石晟, 杜东升, 王曙光, 等. 概率密度演化方程TVD格式的自适应时间步长技术及其初值条件改进[J]. *力学学报*, 2019, 51(4): 1223 — 1234.
SHI Sheng, DU Dongsheng, WANG Shuguang, et al. Non-uniform time step TVD scheme for probability density evolution function with improvement of initial condition [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2019, 51(4): 1223 — 1234. (in Chinese)
- [19] LI H Y, YU Z W, MAO J F, et al. Nonlinear random seismic analysis of 3D high-speed railway track-bridge system based on OpenSEES [J]. *Structures*, 2020, 24: 87 — 98.
- [20] 申家旭, 陈隽, 丁国. 基于Copula理论的序列型地震动随机模型[J]. *工程力学*, 2021, 38(1): 27 — 39.
SHEN Jiaxu, CHEN Jun, DING Guo. A stochastic model for sequential ground motions based on the copula theory [J]. *Engineering Mechanics*, 2021, 38(1): 27 — 39. (in Chinese)
- [21] 马蒙, 李明航, 谭新宇, 等. 地铁轮轨耦合不平顺激励对轨道振动影响分析[J]. *工程力学*, 2021, 38(5): 191 — 198.
MA Meng, LI Minghang, TAN Xinyu, et al. Influence analysis on track vibration due to coupled irregularity excitation of metro wheel-track [J]. *Engineering Mechanics*, 2021, 38(5): 191 — 198. (in Chinese)
- [22] LIU Z, LIU Z J, HE C G, et al. Dimension-reduced probabilistic approach of 3-D wind field for wind-induced response analysis of transmission tower [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2019, 190: 309 — 321.
- [23] LI J, CHEN J B, FAN W L. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability [J]. *Structural Safety*, 2007, 29(2): 112 — 131.