



基础竖向多频参数激励下圆弧拱平面内动力失稳研究

钟子林 刘爱荣

STUDIES ON IN-PLANE DYNAMIC INSTABILITY OF VERTICALLY AND PARAMETRICALLY BASE MULTI-FREQUENCY EXCITED CIRCULAR ARCHES

ZHONG Zi-lin, LIU Ai-rong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2021.07.ST06>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

T型截面拱在拱顶集中力作用下的平面外弯扭失稳

FLEXURAL-TORSIONAL BUCKLING OF PIN-ENDED ARCHES WITH T-SECTION UNDER A CENTRAL RADIAL CONCENTRATED LOAD

工程力学. 2020, 37(S): 151-156 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2019.04.S026>

携带集中质量的矩形薄板面外非线性动力失稳研究

ANALYTICAL STUDY ON THE OUT-OF-PLANE NONLINEAR DYNAMIC INSTABILITY OF A THIN RECTANGULAR PLATE WITH A CONCENTRATED MASS

工程力学. 2020, 37(S): 6-12 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2019.04.S018>

解析型几何非线性圆拱单元

ANALYTICAL GEOMETRICALLY NONLINEAR ELEMENTS FOR CIRCULAR ARCHES

工程力学. 2021, 38(7): 1-8, 29 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2020.07.0504>

有界窄带激励下微梁系统主共振

PRIMARY RESPONSE OF MICRO-BEAM SYSTEM SUBJECTED TO NARROW-BAND RANDOM EXCITATION

工程力学. 2017, 34(增刊): 19-25 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2016.04.S021>

集中荷载作用下弹性扭转约束层合浅拱的非线性面内稳定

NONLINEAR IN-PLANE BUCKLING OF ROTATIONALLY RESTRAINED SHALLOW LAMINATED ARCHES UNDER A CENTRAL CONCENTRATED LOAD

工程力学. 2020, 37(S): 13-19, 31 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2019.04.S048>

复合材料层合板多尺度交互渐进损伤分析

MULTI-SCALE INTERACTIVE PROGRESSIVE DAMAGE ANALYSIS OF COMPOSITE LAMINATES

工程力学. 2019, 36(12): 247-256 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2019.01.0006>



订阅号：面向读者



订阅号：面向作者

扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

文章编号: 1000-4750(2022)04-0053-12

基础竖向多频参数激励下圆弧拱 平面内动力失稳研究

钟子林^{1,2}, 刘爱荣¹

(1. 广州大学风工程与工程振动研究中心, 广东, 广州 510006; 2. 广州铁路职业技术学院, 广东, 广州 510430)

摘 要: 地震波、冲击波、环境振动激励会通过地基基础传递到拱上, 致使拱发生动力失稳失去承载能力。为深入研究拱在基础竖向激励下的动力稳定性, 该文基于能量法, 建立了基础竖向激励下圆弧拱平面内动力稳定能量方程, 利用哈密顿原理得到了拱面内径向和切向振动的耦合控制方程, 求解了圆弧拱平面内失稳前的动轴力与动弯矩解析解。引入拱轴线不可压缩假设, 解决了圆弧拱平面内动力控制方程的解耦问题。利用伽辽金法建立了基础竖向多频激励下圆弧拱平面内二阶常微分动力稳定方程, 运用多尺度法推导了基础竖向多频激励下圆弧拱平面内动力失稳的临界激励频率解析公式, 得到了圆弧拱同时发生一阶反对称参数共振和二阶正对称共振失稳的动力不稳定域, 并利用有限元数值分析验证了理论解析解的正确性。进一步分析了拱矢跨比、长细比和圆心角对动力不稳定域的影响。

关键词: 圆弧拱; 基础竖向多频激励; 平面内失稳; 多尺度法; 动力不稳定域

中图分类号: TU311.2 文献标志码: A doi: [10.6052/j.issn.1000-4750.2021.07.ST06](https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2021.07.ST06)

STUDIES ON IN-PLANE DYNAMIC INSTABILITY OF VERTICALLY AND PARAMETRICALLY BASE MULTI-FREQUENCY EXCITED CIRCULAR ARCHES

ZHONG Zi-lin^{1,2}, LIU Ai-rong¹

(1. Research Centre for Wind Engineering and Engineering Vibration, Guangzhou University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

2. Guangzhou Railway Polytechnic, Guangzhou, Guangdong 510430, China)

Abstract: Seismic wave, shock wave and the ambient vibration excitation may be transmitted to an arch through the base, resulting in the dynamic instability and the loss of bearing capacity of the arch. In order to deeply study the dynamic stability of the arch under a vertical base excitation, the energy equations of the in-plane dynamic stability of the circular arch under a vertical base excitation are established based on the energy method. The coupled governing equations of the in-plane radial and tangential vibration of the investigated arch are obtained by using Hamilton principle. The analytical solutions of the dynamic axial forces and the dynamic bending moments prior to the in-plane dynamic instability are solved. For decoupling the in-plane dynamic governing equation, it is assumed that the arch is incompressible. Using the Galerkin method, the in-plane second-order ordinary differential dynamic stability equations of the circular arch under a vertical base multi-frequency excitation are established. The analytical equations of critical excitation frequencies of the circular arch under a vertical base multi-frequency excitation are derived via the multi-scale method, and the dynamic instability regions for the simultaneous first-order antisymmetric parametric resonance and second-order symmetric resonance instability of the circular arch verified by FEA are determined accordingly. Furthermore, the influences of span ratio, slenderness ratio and central angle on the dynamic instability region are analyzed.

收稿日期: 2021-07-21; 修改日期: 2021-08-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(51878188); 111 计划项目(21021); 广州市科技计划项目(20212200004)

通讯作者: 刘爱荣(1972—), 女, 山西吕梁人, 教授, 博士, 主要从事新型拱桥的静动力稳定性研究 (E-mail: liuar@gzhu.edu.cn).

作者简介: 钟子林(1990—), 男, 广东人, 博士, 主要从事新型拱桥的动力稳定性研究 (E-mail: zl.zhong@e.gzhu.edu.cn).

Key words: circular arches; base vertical multi-frequency excitation; in-plane instability; multi-scale method; dynamic instability region

拱结构具有造型美观、跨越能力强和承载力大等优点,被广泛应用于建筑工程,如巴黎圣日内维耶图书馆和沈阳西站候车室的屋盖等;桥梁工程,如广西平南县拱桥和卢浦大桥等;水利工程,如美国科罗拉多河葛兰大坝和日本的黑部大坝等;机械和航空工程,如拱形吊车梁、曲梁构件和拱形机舱骨架等。在外部环境激励下,拱可能会发生大幅度振动,当外部激励达到临界失稳频率,拱将发生剧烈振动而导致失稳。不同激励幅值下的临界激励频率围成拱的动力不稳定域,可预测拱在外部参数激励下的稳定性。由于外部激励持续变化,可能诱发拱发生多种类型的动力失稳。动力不稳定域的域宽和分布非常复杂,如何准确计算拱的动力不稳定域并分析其随各种参数的变化规律,优化拱的设计参数,以避免其落入动力不稳定域,是当前研究的难点。

研究发现,当动力荷载的激振参数(频率、幅值等)与拱的振动频率满足一定条件时,拱的位移将会突然增加,发生动力失稳。例如,当外荷载的激振频率是拱自振频率的2倍时,拱的位移突然呈指数增长,发生参数共振失稳。Bolotin^[1]在其著作中针对径向均布荷载作用下的两端铰接圆弧拱进行了解析推导,给出了拱平面内反对称参数共振失稳域的求解方法。在Bolotin的研究基础上,Sophianopoulos等^[2]首次推导了简谐荷载作用下两端铰接悬链线拱的Mathieu-Hill常微分运动方程,并利用Bolotin法得到了悬链线拱参数动力失稳的临界频率域。王连华等^[3]考虑了几何缺陷的影响,推导了周期动力荷载作用下拱的运动方程,并从李雅普诺夫稳定性原理出发,得到了李雅普诺夫指数,研究了激励频率与缺陷大小对拱平面内动力稳定性的影响,但未分析拱动力失稳域的分布规律。为此,赵洪金和董宁娟针对不同设计参数拱的参数动力失稳开展了系列的研究。首先,赵洪金等^[4]利用哈密顿原理和伽辽金法推导了两端铰接圆弧格构拱的运动方程,通过Bolotin法求解了拱的面内一阶反对称动力失稳域,并分析了不同缀条面积、半径和夹角等对不稳定域大小的影响;然后,赵洪金等^[5]采用类似的方法分析了剪切变形对圆弧深拱动力不稳定域

的影响;董宁娟和赵洪金^[6-7]利用Bolotin法和半解析法求解得到了径向均布荷载作用下开口薄壁与闭口薄壁圆弧拱的平面内一阶反对称动力失稳域。以上研究未考虑非线性振动、阻尼、附加配重等参数对圆弧拱动力稳定性的影响,且未开展实验研究验证理论解析解的正确性^[8]。为进一步揭示圆弧拱动力失稳机理,Liu和Yang等^[9]基于能量法推导了拱顶集中简谐荷载作用下固接圆弧拱平面内的动力方程,求解了圆弧拱平面内反对称参数共振失稳的动力不稳定域,进一步利用激振器生成简谐波,开展了扫频实验获得了拱的动力不稳定域,分析了矢跨比、附加质量对动力不稳定域的影响规律。此外,Liu和Lu等^[10]发现,拱在集中简谐荷载作用下,当激振频率大约为拱面外自振频率的2倍左右时,拱从原来的面内平衡位置突然过渡为面外平衡状态并发生大幅度的弯扭振动。为从理论的角度解释这一现象,他们基于能量法,同时考虑了阻尼和非线性振动的影响,推导了拱顶集中简谐荷载作用下固接圆弧拱平面外的动力平衡微分方程,求解了圆弧拱平面外弯扭参数共振失稳的动力不稳定域,分析了动力不稳定域的域宽与分布随矢跨比、附加配重和阻尼比的变化规律以及非线性振动规律。此外,他们还设计了圆弧拱实验模型进行激振实验,验证了理论解的正确性,并揭示了拱顶集中简谐荷载作用下圆弧拱平面外动力失稳机理。Zhong和Liu等^[11]利用哈密顿原理与伽辽金法建立了沿拱轴线竖向均匀分布简谐荷载作用下圆弧拱的动力数学模型,推导了周期为 T 和 $2T$ 的圆弧拱参数共振失稳域的解析表达式,分析了静载、阻尼比和矢跨比对动力不稳定域域宽与分布的影响,通过建立有限元瞬态动力分析模型验证了理论解析的正确性。为探索冲击荷载下圆弧拱的动力失稳问题,Liu和Yang等^[12]建立了径向任意阶跃动荷载作用下圆弧拱的非线性运动方程,得到了圆弧拱的动力失稳荷载解析解,分析了荷载位置对拱动力屈曲行为的影响。Yang和Liu等^[13]研究了集中阶跃荷载作用下FG-GPLRC拱的非线性动力屈曲,探究了GPLs分布模式、质量分数和几何尺寸对FG-GPLRC拱动力屈曲的影响,结果表明GPLs能够

显著提高 FG-GPLRC 拱的动力屈曲临界荷载。跌落冲击荷载往往携带巨大的能量,但其对拱的动力屈曲行为还需要进一步研究。Yang 和 Liu 等^[14]基于能量守恒原理建立了高空跌落重物冲击下圆弧拱动力平衡方程,将重物势能转化为动能,分析了拱长细比、冲击重量与速度对圆弧拱动力失稳的影响。

以上研究成果均未涉及基础激励下拱动力失稳问题。而基础激励在工程中随处可见,例如水下钻孔、地震、航道、隧道等爆破产生的冲击波、大型轮船运行时产生的水击波、地铁运行产生的振动等,是导致拱发生动力失稳的主要元凶之一。然而基础激励下拱的失稳机理尚不明晰,相关研究很少公开报道。只有,Chen 等^[15]将水平简谐荷载施加在正弦浅拱的一端可动支座上,通过实验观察拱的平面内非线性振动行为,但未测得拱动力失稳的临界激励频率。此外,Zhong 和 Liu^[16]针对基础竖向激励下圆弧拱平面外参数共振失稳进行了理论推导,分析了不同矢跨比、圆心角、长细比、阻尼比对圆弧拱平面外参数共振失稳临界激励频率的影响,并提出了一种临界激励频率的实验测试方法,发现了圆弧拱发生参数共振失稳时振动频率的跳跃行为,实验结果验证了理论解的正确性。

然而,在实际工程中,基础激励多为多频激励,即结构基础同时受到 2 个或以上激励源的作用,比如邻近桥梁的基础同时受到隧道开挖过程中机械本身产生的振动激励与机械运动导致地面振动的激励,多艘轮船同时产生多个水击波对桥梁基础的激励等。基础多频激励会导致拱复杂的动力失稳行为。与基础单频激励作用下圆弧拱的动力失稳相比,多频激励下运动方程求解过程更为复杂,需考虑多个谐波分量之间的相互作用关系。此外,不同激励幅值和激励频率的组合将会影响动力不稳定域的域宽与分布规律,可能出现共振与参数共振交替出现或模态混叠的现象。因此本文针对基础竖向多频激励下圆弧拱的平面内动力稳定性展开深入的研究。

1 运动方程

1.1 平面内能量方程

图 1(a) 为基础竖向激励下圆弧拱的计算简图,其中 $\ddot{V}_t$ 为基础竖向加速度激励,弧长和矢高

分别表示为 S 和 f , 圆弧拱的圆心半角、半径和跨径分别表示为 Θ 、 R 和 L 。以截面形心为主轴,采用形心的径向位移 $v(\varphi, t)$ 和切向位移 $w(\varphi, t)$ 表征圆弧拱在给定基础激励下的面内变形。图 1(b) 为圆弧拱的截面以及相应的主轴坐标系 xoy , 其中截面的高度和宽度分别表示为 h 和 b , P 为截面上任意一点。图 1(c) 为圆弧拱的一阶反对称和二阶正对称失稳模态。

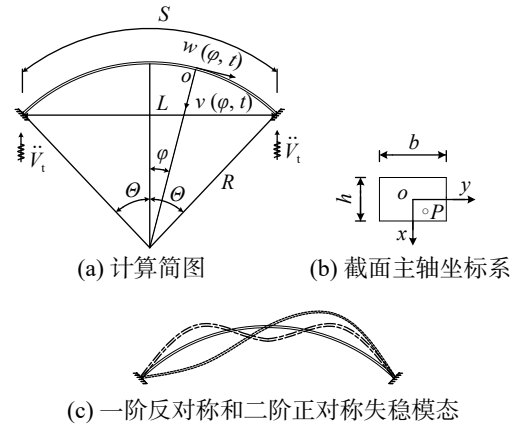


图 1 基础竖向激励下圆弧拱动力系统

Fig. 1 Dynamic system of the circular arch under a vertical base excitation

基础竖向激励下圆弧拱截面上任意一点 P 的应变函数可表示为^[17-18]:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,m} + \varepsilon_{p,b} \quad (1)$$

式中:

$$\varepsilon_{p,m} = \tilde{w}'(\varphi, t) - \tilde{v}(\varphi, t) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{p,b} = -y_p \frac{\tilde{v}''(\varphi, t) + \tilde{w}'(\varphi, t)}{R} \quad (3)$$

式(2)~式(3): $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\varphi$, 拱的径向和切向位移分别表示为无量纲形式 $\tilde{w}(\varphi, t) = w(\varphi, t)/R$, $\tilde{v}(\varphi, t) = v(\varphi, t)/R$; y_p 为拱截面点 P 的 y 方向坐标, 在以下推导过程中 $\tilde{w}(\varphi, t)$ 、 $\tilde{v}(\varphi, t)$ 缩写为 $\tilde{w}$ 、 $\tilde{v}$ 。

忽略剪切变形与截面转动惯量的影响, 基础竖向激励下圆弧拱的平面内 Lagrangian 方程 ℓ_i 可表示为:

$$\ell_i = T - (U + W_d + W_N) \quad (4)$$

式中, 拱的动能 T 可表示为:

$$T = \frac{1}{2} \rho A R^3 \int_{-\Theta}^{\Theta} (\dot{\tilde{V}}^2 + \dot{\tilde{W}}^2) d\varphi \quad (5)$$

式中, $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$ 分别为动力系统的总径向和轴向位移, 表示为:

$$\tilde{V} = \tilde{v} + \tilde{V}_t \cos(\varphi), \quad \tilde{W} = \tilde{w} + \tilde{V}_t \sin(\varphi) \quad (6)$$

式中, $\tilde{V}_t = V_t/R$ 为无量纲基础位移。应变势能 U 可以表示为:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} \left[EAR(\tilde{w}' - \tilde{v})^2 + \frac{EI_x}{R}(\tilde{v}'' + \tilde{w}')^2 \right] d\varphi \quad (7)$$

式中, E 、 A 、 I_x 分别为圆弧拱的弹性模量、截面面积、截面惯性矩, 由动轴力引起的内力做功 W_N 可表示为:

$$W_N = \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} [N(\varphi, t)(\tilde{v}' + \tilde{w})] d\varphi \quad (8)$$

此外, 非保守力阻尼做功可表示为:

$$W_d = \int_{-\theta}^{\theta} (F_{d\tilde{v}}\tilde{v} + F_{d\tilde{w}}\tilde{w})R^2 d\varphi \quad (9)$$

式中, 圆弧拱的径向和切向粘性阻尼力分别等于阻尼系数与圆弧拱径向和切向振动速度的乘积, 即 $F_{d\tilde{v}} = R\xi_n\dot{\tilde{v}}$ 、 $F_{d\tilde{w}} = R\xi_n\dot{\tilde{w}}$, 其中 ξ_n 为第 n 阶模态的阻尼系数, $\xi_n = 2\rho A\omega_n\zeta_n$, ρ 、 ω_n 、 ζ_n 分别为圆弧拱质量密度、第 n 阶固有频率、第 n 阶阻尼比, 其中 ζ_n 可通过下式计算得到:

$$\zeta_n = \frac{1}{2\pi j} [\ln(A_{ti,n} + A'_{t(i+1),n}) - \ln(A_{t(i+j),n} + A'_{t(i+j+1),n})] \quad (10)$$

式中: $A_{ti,n}$ 、 $A_{t(i+j),n}$ 分别为圆弧拱平面内自由衰减振动时 ti 时刻和 $t(i+j)$ 时刻的幅值, $A'_{t(i+1),n}$ 、 $A'_{t(i+j+1),n}$ 分别为圆弧拱平面内自由衰减振动 $t(i+1)$ 时刻和 $t(i+j+1)$ 时刻的幅值。

1.2 平面内动力平衡方程

基础竖向激励下圆弧拱平面内的动力平衡方程可由哈密顿原理以及变分运算得到, 由哈密顿原理可得:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \ell dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U - W_N - W_d) dt = 0 \quad (11)$$

式 (11) 满足以下条件:

$$\delta \tilde{v} = \delta \tilde{w} = 0, \quad \text{当 } t = t_1, t_2; -\theta \leq \varphi \leq \theta \quad (12)$$

式中, t_1 、 t_2 为任意时间。

将式 (5)、式 (7)~式 (9) 代入式 (11), 运用式 (12) 的条件以及变分运算法则, 可得由无量纲径向和切向位移控制的平面内动力方程:

$$\rho AR^3 \ddot{\tilde{v}} + F_{d\tilde{v}}R^2 - EAR(\tilde{w}' - \tilde{v}) + \frac{EI_x}{R}(\tilde{v}'''' + \tilde{w}''') + \rho AR^3 \ddot{V}_t \cos(\varphi) - [N(\varphi, t)(\tilde{v}' + \tilde{w})]' = 0 \quad (13)$$

$$\rho AR^3 \ddot{\tilde{w}} - EAR(\tilde{w}'' - \tilde{v}') + \rho AR^3 \ddot{V}_t \sin(\varphi) + \frac{EI_x}{R}(\tilde{v}''' + \tilde{w}'') + N(\varphi, t)(\tilde{v}' + \tilde{w}) + F_{d\tilde{w}}R^2 = 0 \quad (14)$$

式 (13) 和式 (14) 中: $\ddot{V}_t$ 为无量纲加速度激励;

$(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\varphi$, $(\cdot)\dot{} = \partial(\cdot)/\partial t$ 。

式 (13)~式 (14) 表示的动力系统的边界条件和运动初始条件为:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\varphi, t) = 0, \quad \tilde{w}(\varphi, t) = 0, \quad \tilde{v}'(\varphi, t) = 0, \\ \tilde{w}'(\varphi, t) = 0 \quad \varphi = \pm \theta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\varphi, t) = 0, \quad \tilde{w}(\varphi, t) = 0, \quad \dot{\tilde{v}}(\varphi, t) = 0, \\ \dot{\tilde{w}}(\varphi, t) = 0 \quad t = t_0 \end{aligned} \quad (16)$$

对耦合方程式 (13)~式 (14) 进行解耦计算, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi} (L_{\tilde{v}}\tilde{v} + L_{\tilde{w}}\tilde{w}) + R^2 \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} F_{d\tilde{v}} - F_{d\tilde{w}} \right) - \\ H_{\tilde{v}}\tilde{v} - H_{\tilde{w}}\tilde{w} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} [N(\varphi, t)(\tilde{v}' + \tilde{w})] + \right. \\ \left. N(\varphi, t)(\tilde{v}' + \tilde{w}) \right\} + \\ \rho AR^2 \ddot{V}_t \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} L_{\tilde{v}} &= \rho AR^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + EAR + \frac{EI_x}{R} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}, \\ L_{\tilde{w}} &= -EAR \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{EI_x}{R} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3}, \\ H_{\tilde{v}} &= EAR \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{EI_x}{R} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3}, \\ H_{\tilde{w}} &= \rho AR^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - EAR \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{EI_x}{R} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (18)$$

同时, 引入拱轴线不可压缩的条件^[19]: $\tilde{w}' - \tilde{v} = 0$, 则基础竖向激励下圆弧拱的平面内动力平衡方程可表示为:

$$\begin{aligned} \rho AR^3 (\ddot{\tilde{w}}'' - \ddot{\tilde{w}}) + \frac{\rho A\omega_n \Delta_n R^3}{\pi} (\dot{\tilde{w}}'' - \dot{\tilde{w}}) + \\ \frac{EI_x}{R} (\tilde{w}^{(6)} + 2\tilde{w}'''' + \tilde{w}'') - 2\rho AR^3 \ddot{V}_t \sin(\varphi) - \\ [N''(\varphi, t)(\tilde{w}'' + \tilde{w}) + 2N'(\varphi, t)(\tilde{w}''' + \tilde{w}') + \\ N(\varphi, t)(\tilde{w}'''' + 2\tilde{w}'' + \tilde{w})] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中, Δ_n 为拱第 n 阶模态自由衰减振动的衰减率。

2 基础竖向激励下圆弧拱平面内的动内力

基础竖向激励产生的圆弧拱动轴力与动弯矩可表示为:

$$N(\varphi, t) = - \int_A E \varepsilon_p dA = -EA [\tilde{w}'(\varphi, t) - \tilde{v}(\varphi, t)] \quad (20)$$

$$M(\varphi, t) = - \int_A E \varepsilon_p y dA = \frac{EI_x}{R} [\tilde{v}''(\varphi, t) + \tilde{w}'(\varphi, t)] \quad (21)$$

将式 (20)~式 (21) 代入式 (13)~式 (14) 中, 忽略内力做功, 得:

$$\rho AR^2 \ddot{V}_t \cos(\varphi) + N(\varphi, t) R - M''(\varphi, t) = 0 \quad (22)$$

$$\rho AR^2 \ddot{V}_t \cos(\varphi) + N'(\varphi, t) R - M'(\varphi, t) = 0 \quad (23)$$

求解式 (22)~式 (23) 表示的动力方程组, 并根

据边界条件求得相应的积分系数, 可得:

$$N(\varphi, t) = \rho AR \ddot{V}_t [(D_1 - 1) \cos(\varphi) - \varphi \sin(\varphi)] \quad (24)$$

$$M(\varphi, t) = \rho AR^2 \ddot{V}_t [(2 - D_1) \cos(\varphi) + \varphi \sin(\varphi) + D_2] \quad (25)$$

式 (24)~式 (25) 中, D_1 、 D_2 分别为:

$$D_1 = - \frac{[(\theta^2 AR^2 + \theta^2 I_x) - 6AR^2] \cos(2\theta) - \frac{9}{2} \left(AR^2 + \frac{1}{3} I_x \right) \theta \sin(2\theta) + (-4AR^2 - 2I_x) \theta^2 + 6AR^2}{4AR^2 \cos(2\theta) + 2\theta(AR^2 + I_x) \sin(2\theta) + (4AR^2 + 4I_x) \theta^2 - 4AR^2} \quad (26)$$

$$D_2 = \frac{[AR^2(8\theta^2 - 1) + 8I_x \theta^2 - 3I_x] \cos(\theta) - (AR^2 + 3I_x)[4\theta \sin(\theta) - \cos(3\theta)]}{4\theta(AR^2 + I_x) \sin(2\theta) + 8AR^2 \cos(2\theta) + (8\theta^2 - 8)AR^2 + 8I_x \theta^2} \quad (27)$$

3 求解动力不稳定域

圆弧拱的切向位移函数可表示为^[20-21]:

$$\tilde{w}(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \psi_n(\varphi) \quad (28)$$

式中, $f_n(t)$ 、 $\psi_n(\varphi)$ 分别为圆弧拱的空间坐标和模态函数。选取面内前两阶模态 (一阶反对称、二阶正对称) 作为圆弧拱动力失稳分析对象, 将式 (28) 代入基础竖向激励下圆弧拱的平面内动力平衡方程式 (19), 运用伽辽金法对动力平衡方程进行离散分析, 并采用多尺度法^[22] 进行求解, 可得前两阶模态的常微分干扰方程为:

$$\ddot{f}_1(t) + \varepsilon \Gamma_{11} \dot{f}_1(t) + \Gamma_{12} f_1(t) - \varepsilon \hat{\Gamma}_{13} \ddot{V}_t f_1(t) = 0 \quad (29)$$

$$\ddot{f}_2(t) + \varepsilon \Gamma_{21} \dot{f}_2(t) + \Gamma_{22} f_2(t) - \varepsilon \hat{\Gamma}_{23} \ddot{V}_t f_2(t) = \varepsilon \hat{F} \ddot{V}_t \quad (30)$$

式 (29)~式 (30) 中, ε 为远小于 1 的小参数, 其余系数的表达式为:

$$\Gamma_{11} = \frac{4I_1 \omega_1}{\varepsilon \pi} \quad (31)$$

$$\Gamma_{12} = \frac{EI_x}{\varepsilon \rho AR^4} \cdot \frac{\int_{-\theta}^{\theta} [\psi_1^{(6)}(\varphi) + 2\psi_1^{(4)}(\varphi) + \psi_1''(\varphi)] \psi_1(\varphi) d\varphi}{\int_{-\theta}^{\theta} [\psi_1''(\varphi) - \psi_1(\varphi)] \psi_1(\varphi) d\varphi} \quad (32)$$

$$\hat{\Gamma}_{13} = \left\{ \int_{-\theta}^{\theta} N''(\varphi) [\psi_1''(\varphi) + \psi_1(\varphi)] \psi_1(\varphi) d\varphi + 2 \int_{-\theta}^{\theta} N'(\varphi) [\psi_1'''(\varphi) + \psi_1'(\varphi)] \psi_1(\varphi) d\varphi + \int_{-\theta}^{\theta} N(\varphi) [\psi_1^{(4)}(\varphi) + 2\psi_1''(\varphi) + \psi_1(\varphi)] \psi_1(\varphi) d\varphi \right\} / \left\{ \varepsilon \rho AR^4 \int_{-\theta}^{\theta} [\psi_1''(\varphi) - \psi_1(\varphi)] \psi_1(\varphi) d\varphi \right\} \quad (33)$$

$$\Gamma_{21} = \frac{4I_2 \omega_2}{\varepsilon \pi} \quad (34)$$

$$\Gamma_{22} = \frac{EI_x \int_{-\theta}^{\theta} [\psi_2^{(6)}(\varphi) + 2\psi_2^{(4)}(\varphi) + \psi_2''(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi}{\varepsilon \rho AR^4 \int_{-\theta}^{\theta} [\psi_2''(\varphi) - \psi_2(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi} \quad (35)$$

$$\hat{\Gamma}_{23} = \left\{ \int_{-\theta}^{\theta} N''(\varphi) [\psi_2''(\varphi) + \psi_2(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi + 2 \int_{-\theta}^{\theta} N'(\varphi) [\psi_2'''(\varphi) + \psi_2'(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi + 2 \int_{-\theta}^{\theta} N(\varphi) [\psi_2^{(4)}(\varphi) + 2\psi_2''(\varphi) + \psi_2(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi \right\} / \left\{ \varepsilon \rho AR^4 \int_{-\theta}^{\theta} [\psi_2''(\varphi) - \psi_2(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi \right\} \quad (36)$$

$$\hat{F} = \frac{2}{R^2 \varepsilon} \frac{\int_{-\theta}^{\theta} \sin(\varphi) \psi_2(\varphi) d\varphi}{\int_{-\theta}^{\theta} [\psi_2''(\varphi) - \psi_2(\varphi)] \psi_2(\varphi) d\varphi} \quad (37)$$

$$N(\varphi) = \rho AR [(D_1 - 1) \cos(\varphi) - \sin(\varphi)] \quad (38)$$

运用多尺度法对式 (29)~式 (30) 进行二阶近似计算, 引入时间尺度, $T_n = \varepsilon^n t$, 时间尺度微分计算公式为^[22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + o(\varepsilon^3), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + o(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (39)$$

式 (39) 中, $D_n = \partial / \partial T_n$ 。

将 $f_n(t)$ ($n=1, 2$) 扩展为 ε 的幂级数形式, 其二阶近似可表示为:

$$f_1(t; \varepsilon) = f_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon f_{11}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 f_{12}(T_0, T_1, T_2) + o(\varepsilon^3) \quad (40)$$

$$f_2(t; \varepsilon) = f_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon f_{21}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 f_{22}(T_0, T_1, T_2) + o(\varepsilon^3) \quad (41)$$

将式 (40)~式 (41) 代入式 (29)~式 (30), 使 ε 的同次幂项系数等于 0, 有:

ε^0 :

$$D_0^2 f_{10} + \Gamma_{12} f_{10} = 0, D_0^2 f_{20} + \Gamma_{22} f_{20} = 0 \quad (42)$$

ε^1 :

$$\begin{aligned} D_0^2 f_{11} + \Gamma_{12} f_{11} = & -2D_0 D_1 f_{10} - \Gamma_{11} D_0 f_{10} + \hat{F}_{13} f_{10} \ddot{V}_t, \\ D_0^2 f_{21} + \Gamma_{22} f_{21} = & -2D_0 D_1 f_{20} - \Gamma_{21} D_0 f_{20} + (\hat{F}_{23} f_{20} + \hat{F}) \ddot{V}_t \end{aligned} \quad (43)$$

ε^2 :

$$\begin{aligned} D_0^2 f_{12} + \Gamma_{12} f_{12} = & -2D_0 D_1 f_{11} - D_1^2 f_{10} - \\ & 2D_0 D_2 f_{10} - \Gamma_{11} D_0 f_{11} - \Gamma_{11} D_1 f_{10} + \hat{F}_{13} f_{11} \ddot{V}_t, \\ D_0^2 f_{22} + \Gamma_{22} f_{22} = & -2D_0 D_1 f_{21} - D_1^2 f_{20} - \\ & 2D_0 D_2 f_{20} - \Gamma_{21} D_0 f_{21} - \Gamma_{21} D_1 f_{20} + \hat{F}_{23} f_{21} \ddot{V}_t \end{aligned} \quad (44)$$

式 (42) 的解可以表示为以下形式:

$$\begin{aligned} f_{10}(T_0, T_1, T_2) &= A_1(T_1, T_2) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{-i\omega_1 T_0}, \\ f_{20}(T_0, T_1, T_2) &= A_2(T_1, T_2) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2(T_1, T_2) e^{-i\omega_2 T_0} \end{aligned} \quad (45)$$

不失一般性地假设圆弧拱基础受到的竖向多频激励为双余弦简谐激励, 即:

$$\ddot{V}_t = P_{t1} \cos(\Omega_1 t) + P_{t2} \cos(\Omega_2 t) \quad (46)$$

将式 (45)~式 (46) 分别代入式 (43), 可得:

$$\begin{aligned} D_0^2 f_{11} + \Gamma_{12} f_{11} = & \left[-2i \frac{\partial}{\partial T_1} A_1(T_1, T_2) \omega_1 - i \Gamma_{11} A_1(T_1, T_2) \omega_1 \right] e^{i\omega_1 T_0} \\ & \frac{1}{2} [\Gamma_{13} P_{t1} A_1(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 + \omega_1) T_0} + \\ & \Gamma_{13} P_{t1} \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 - \omega_1) T_0}] + \\ & \frac{1}{2} [\Gamma_{13} P_{t2} A_1(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 + \omega_1) T_0} + \\ & \Gamma_{13} P_{t2} \bar{A}_1(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 - \omega_1) T_0}] + C.C. \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 f_{21} + \Gamma_{12} f_{21} = & -2i \frac{\partial}{\partial T_1} A_2(T_1, T_2) \omega_2 e^{i\omega_2 T_0} - i \Gamma_{21} A_2(T_1, T_2) \omega_2 e^{i\omega_2 T_0} + \\ & \frac{1}{2} \Gamma_{23} P_{t1} [A_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 + \omega_2) T_0} + \bar{A}_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 - \omega_2) T_0}] + \\ & \frac{1}{2} \Gamma_{23} P_{t2} [A_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 + \omega_2) T_0} + \\ & \bar{A}_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 - \omega_2) T_0}] + \\ & \frac{1}{2} F [P_{t1} e^{i\Omega_1 T_0} + P_{t2} e^{i\Omega_2 T_0}] + C.C. \end{aligned} \quad (48)$$

式 (47)~式 (48) 中: $\hat{F}_{13} = \hat{F}_{13}, \Gamma_{23} = \hat{F}_{23}, F = \hat{F}; C.C.$ 表示给出项对应的复共轭项。

当圆弧拱基础受到竖向多频激励时, 圆弧拱会发生多种形式的联合共振失稳。其中, 当基础双余弦激励同时激发圆弧拱发生一阶反对称参数共振失稳、二阶正对称共振失稳时, 根据多尺度分析法^[22], 可引入 3 个调谐参数 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 , 分别表示圆弧拱动力系统的干扰条件, 即:

$$\Omega_1 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \Omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2, \omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_3 \quad (49)$$

将式 (49) 代入式 (47)~式 (48), 消除相应的久期项, 可得:

$$\begin{aligned} -2i \frac{\partial}{\partial T_1} A_1(T_1, T_2) \omega_1 - i \Gamma_{11} A_1(T_1, T_2) \omega_1 + \\ \frac{1}{2} \Gamma_{13} \bar{A}_1(T_1, T_2) (P_{t1} e^{i\sigma_1 T_1} + P_{t2} e^{i\sigma_2 T_1}) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} -2i \frac{\partial}{\partial T_1} A_2(T_1, T_2) \omega_2 - i \Gamma_{21} A_2(T_1, T_2) \omega_2 + \\ \frac{1}{2} F P_{t1} e^{i(\sigma_1 - \sigma_3) T_1} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

因此, 可得式 (47)~式 (48) 的特解为:

$$\begin{aligned} f_{11} = & -\frac{\Gamma_{13} P_{t1} A_1(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 + \omega_1) T_0}}{2\Omega_1(\Omega_1 + 2\omega_1)} - \\ & \frac{\Gamma_{13} P_{t2} A_1(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 + \omega_1) T_0}}{2\Omega_2(\Omega_2 + 2\omega_1)} + C.C. \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} f_{21} = & -\frac{1}{2} \frac{\Gamma_{23} P_{t1} A_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 + \omega_2) T_0}}{\Omega_1(\Omega_1 + 2\omega_2)} - \frac{1}{2} \frac{F P_{t2} e^{i\Omega_2 T_0}}{\Omega_2^2 - \omega_2^2} - \\ & \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{23} P_{t1} \bar{A}_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_1 - \omega_2) T_0}}{\Omega_1(\Omega_1 - 2\omega_2)} - \frac{1}{2} \frac{F P_{t2} e^{-i\Omega_2 T_0}}{\Omega_2^2 - \omega_2^2} - \\ & \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{23} P_{t2} A_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 + \omega_2) T_0}}{\Omega_2(\Omega_2 + 2\omega_2)} + C.C. - \\ & \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{23} P_{t2} \bar{A}_2(T_1, T_2) e^{i(\Omega_2 - \omega_2) T_0}}{\Omega_2(\Omega_2 - 2\omega_2)} \end{aligned} \quad (53)$$

将式 (45)、式 (49)~式 (50) 代入式 (44), 并根据式 (49) 给出的圆弧拱平面内动力失稳的干扰条件, 消除相应的久期项, 可得:

$$\begin{aligned} -2i \frac{\partial}{\partial T_2} A_1(T_1, T_2) \omega_1 - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} A_1(T_1, T_2) - \\ \Gamma_{11} \frac{\partial}{\partial T_1} A_1(T_1, T_2) - \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{13}^2 P_{t1}^2 A_1(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 + 2\omega_1)} - \\ \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{13}^2 P_{t2}^2 A_1(T_1, T_2)}{\Omega_2(\Omega_2 + 2\omega_1)} - \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{13}^2 P_{t1} A_1(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 + 2\omega_1)} e^{i(\sigma_1 - \sigma_2) T_1} - \\ \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{13}^2 P_{t2} A_1(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 + 2\omega_1)} e^{i(\sigma_2 - \sigma_1) T_1} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
& -2i\left(\frac{\partial}{\partial T_2}A_2(T_1, T_2)\right)\omega_2 - \Gamma_{21}\left(\frac{\partial}{\partial T_1}A_2(T_1, T_2)\right) - \\
& \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}A_2(T_1, T_2) - \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t1}^2 A_2(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 + 2\omega_2)} - \\
& \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t1}^2 A_2(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 - 2\omega_2)} - \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t2}^2 A_2(T_1, T_2)}{\Omega_2(\Omega_2 + 2\omega_2)} - \\
& \frac{1}{2}\frac{\Gamma_{21} F P_{t2} \Omega_2}{2\Omega_2^2 - 2\omega_2^2} e^{i(\sigma_2 - \sigma_3)T_1} - \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t2}^2 A_2(T_1, T_2)}{\Omega_2(\Omega_2 - 2\omega_2)} - \\
& \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t2} P_{t1} \bar{A}_2(T_1, T_2)}{\Omega_2(\Omega_2 - 2\omega_2)} e^{i(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3)T_1} - \\
& \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t2} P_{t1} \bar{A}_2(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 - 2\omega_2)} e^{i(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3)T_1} - \\
& \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t2}^2 \bar{A}_2(T_1, T_2)}{\Omega_2(\Omega_2 - 2\omega_2)} e^{i(2\sigma_2 - 2\sigma_3)T_1} - \\
& \frac{1}{4}\frac{\Gamma_{23}^2 P_{t1}^2 \bar{A}_2(T_1, T_2)}{\Omega_1(\Omega_1 - 2\omega_2)} e^{i(2\sigma_1 - 2\sigma_3)T_1} = 0
\end{aligned} \quad (55)$$

根据多尺度法的求解方法, 通过构建 ε 的幂级数描述振幅 $A_n(T_1, T_2)$ ($n=1, 2$) 变化, 即满足下式:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}A_1(T_1, T_2) = \\
& \varepsilon D_1 A_1(T_1, T_2) + \varepsilon^2 D_2 A_1(T_1, T_2) + o(\varepsilon^3), \\
& \frac{\partial}{\partial t}A_2(T_1, T_2) = \\
& \varepsilon D_1 A_2(T_1, T_2) + \varepsilon^2 D_2 A_2(T_1, T_2) + o(\varepsilon^3)
\end{aligned} \quad (56)$$

通过考察动力方程不动点的稳定性, 可以判断定态周期解的稳定性。根据现有的研究可知, 振幅 $A_n(T_1, T_2)$ ($n=1, 2$) 可表示为极坐标的形式, 然而却不利于求解不动点的周期解, 因此可将振幅 $A_n(T_1, T_2)$ ($n=1, 2$) 写成直角坐标的形式, 即:

$$\begin{aligned}
A_1(T_1, T_2) &= [p_1(T_1, T_2) + iq_1(T_1, T_2)]e^{i\lambda_1 T_2}, \\
A_2(T_1, T_2) &= [p_2(T_1, T_2) + iq_2(T_1, T_2)]e^{i\lambda_2 T_2}
\end{aligned} \quad (57)$$

根据式 (47)~式 (48)、式 (51)~式 (52) 分别求出 $D_1 A_1(T_1, T_2)$ 、 $D_1 A_1(T_1, T_2)$ 、 $D_2 A_1(T_1, T_2)$ 和 $D_2 A_1(T_1, T_2)$, 将其代入式 (53), 并分离实部与虚部, 可得:

$$\begin{aligned}
& -2\lambda_1 \varepsilon^2 \omega_1 q_1 + \varepsilon \Gamma_{11} \omega_1 p_1 - \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{11}^2}{4} q_1 - \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{13} P_{t1} \sigma_1}{4\omega_1} q_1 - \\
& \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{13} P_{t2} \sigma_2}{4\omega_1} q_1 + \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_{13} P_{t1} q_1 + \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_{13} P_{t2} q_1 + \\
& \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{13}^2 P_{t2}^2}{32\omega_1^2} q_1 + \frac{3\varepsilon^2 \Gamma_{13}^2 P_{t1} P_{t2}}{32\omega_1^2} q_1 + \frac{3\varepsilon^2 \Gamma_{13}^2 P_{t1} P_{t2}}{16\omega_1^2} q_1 = 0
\end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
& -2\lambda_1 \varepsilon^2 \omega_1 p_1 - \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{11}^2}{4} p_1 + \frac{3\varepsilon^2 \Gamma_{13}^2 P_{t1}^2}{32\omega_1^2} p_1 + \frac{3\varepsilon^2 \Gamma_{13}^2 P_{t2}^2}{32\omega_1^2} p_1 - \\
& \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_{13} P_{t1} p_1 - \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_{13} P_{t2} p_1 - \varepsilon \Gamma_{11} \omega_1 q_1 + \\
& \frac{3\varepsilon^2 \Gamma_{13}^2 P_{t1} P_{t2}}{16\omega_1^2} p_1 + \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{13} P_{t1} \sigma_1}{4\omega_1} p_1 + \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{13} P_{t2} \sigma_1}{4\omega_1} p_1 = 0
\end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon^2 F P_{t1}(\sigma_1 - \sigma_3)}{8\omega_2^2} - \frac{\varepsilon F P_{t1}}{4\omega_2} - \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{21}^2}{8\omega_2^2} p_1 + \\
& \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{23}^2 P_{t1} P_{t2}}{8\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 - 2\omega_2)} p_1 - \lambda_2 \varepsilon^2 p_1 - \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_{21} q_1 + \\
& \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{23}^2 (P_{t1}^2 + P_{t2}^2)}{8\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 - 2\omega_2)} p_1 + \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{23}^2 (P_{t1}^2 + P_{t2}^2)}{16\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 + 2\omega_2)} p_1 = 0
\end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_2 \varepsilon^2 q_1 - \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_{21} p_1 - \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{23}^2 (P_{t1}^2 + P_{t2}^2)}{16\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 + 2\omega_2)} q_1 + \\
& \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{21}^2 F P_{t1}}{16\omega_2^2} + \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{23}^2 P_{t1} P_{t2}}{8\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 - 2\omega_2)} q_1 + \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{21}^2}{8\omega_2^2} q_1 + \\
& \frac{\varepsilon^2 \Gamma_{21} F P_{t2} \Omega_2}{2\omega_2 (8\omega_1^2 - 2\omega_2^2)} = 0
\end{aligned} \quad (61)$$

为求解基础多频激励下圆弧拱动力系统不动点的周期解, 通过观察式 (55)~式 (58) 关于系数 p_1 、 q_1 组成的方程组, 建立相应的雅可比矩阵, 通过求解雅可比矩阵的特征值, 便可得到圆弧拱动力系统的临界激励频率值。

4 结果分析

选取弹性模量 $E=65.38$ GPa, 质量密度 $\rho=2700$ kg/m³, 泊松比为 $\mu=0.32$, 矩形截面尺寸 $b \times h=0.02$ m $\times$ 0.001 m, 跨径 $L=0.8$ m 的两端固接圆弧拱作为研究对象, 其中动力系统的一阶阻尼衰减率 $\Delta_1=0.02$, 二阶阻尼衰减率 $\Delta_2=0.002$, 基础双余弦激励的最大加速度幅值分别为 $P_{\max 1}=30$ m/s², $P_{\max 2}=40$ m/s², 并设 $P_{t1}=\beta_1 P_{\max 1}$, $P_{t2}=\beta_2 P_{\max 2}$, β_1 和 β_2 分别为两个余弦激励的无量纲激励幅值。由式 (49) 可知, $\sigma_1=\sigma_2$, 表明两个余弦激励的频率相等, 即 $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$, 而无量纲激励幅值 β_1 、 β_2 的变化范围均设为 $[0, 1]$, 因此可设 $\beta_1=\beta_2=\beta$, 即对于激励幅值 $P_{\max 1}=30$ m/s², $P_{\max 2}=40$ m/s², 当 $\beta=0.2$ 时, $P_{t1}=6$ m/s², $P_{t2}=8$ m/s²。

由图 2 可知, 两条曲线将参数平面 ($\beta-\Omega/\omega_1$) 划分为稳定区域与不稳定区域, 其中虚线围成的

区域为一阶反对称参数共振失稳域, 实线围成的区域为二阶正对称共振失稳域。从图中还可知, 在设定的激励幅值下, 仅矢跨比为 $f/L=1/4$ 圆弧拱的反对称参数共振失稳与正对称共振失稳的动力不稳定域存在重合区域。当基础激励的幅值与频率落入该重合区域时, 圆弧拱将会被激发双模态动力失稳, 即同时发生一阶反对称参数共振失稳和二阶正对称共振失稳, 而两个域的非重合部分分别表示圆弧拱将会被分别激发平面内一阶反对称参数共振失稳和正对称二阶共振失稳。

由图 2 可知, 基础多频激励下圆弧拱平面内反对称参数共振失稳的动力不稳定域主要分布在无量纲激励频率 $\Omega/\omega_1=2$ 附近, 表明当基础激励频率约为圆弧拱一阶自振频率的 2 倍时, 圆弧拱将会被激发平面内一阶反对称参数共振失稳。此外, 参数共振失稳域的域宽远大于共振失稳域的域宽, 表明相对于共振失稳, 参数共振失稳是拱结构动力稳定设计的首要防控目标。

由于圆弧拱动力系统存在一定的阻尼, 所以反对称参数共振失稳域与正对称共振失稳域均存在一个临界激励幅值 β_{cr1} 、 β_{cr2} , 即当基础激励的幅值大于临界值时才能激发圆弧拱发生动力失稳。因此, 工程中可以采用增加阻尼的方法来抑制圆弧拱的动力失稳。由图 2 可知, 随着矢跨比的减小, 参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域的域宽逐渐增加, 而无量纲临界激励幅值 β_{cr} 却逐渐减小。

为研究长细比对圆弧拱参数动力失稳的影响, 可选取弹性模量 $E=69$ GPa, 质量密度 $\rho=2700$ kg/m³, 泊松比为 $\mu=0.32$, 矩形截面尺寸 $b \times h=0.08$ m $\times$ 0.015 m, 圆心角 $2\theta=90^\circ$ 的两端固接圆弧拱作为研究对象, 其中动力系统的一阶阻尼衰减率 $\Delta_1=0.01$, 二阶阻尼衰减率 $\Delta_2=0.001$, 基础双余弦激励的最大加速度幅值分别为 $P_{\max 1}=300$ m/s², $P_{\max 2}=500$ m/s²。

由图 3 可知, 随着长细比的增加, 参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域域宽逐渐增加, 而无量纲临界激励幅值却逐渐减小。此外, 在设定的基础激励幅值下圆弧拱参数共振失稳与共振失稳的动力不稳定域相互独立, 不存在重合域, 即圆弧拱不会发生双模态动力失稳。当基础激励幅值增加时, 长细比较大的圆弧拱更容易发生双模态动力失稳。例如, 长细比为 $S/r_x=550$ ($r_x=$

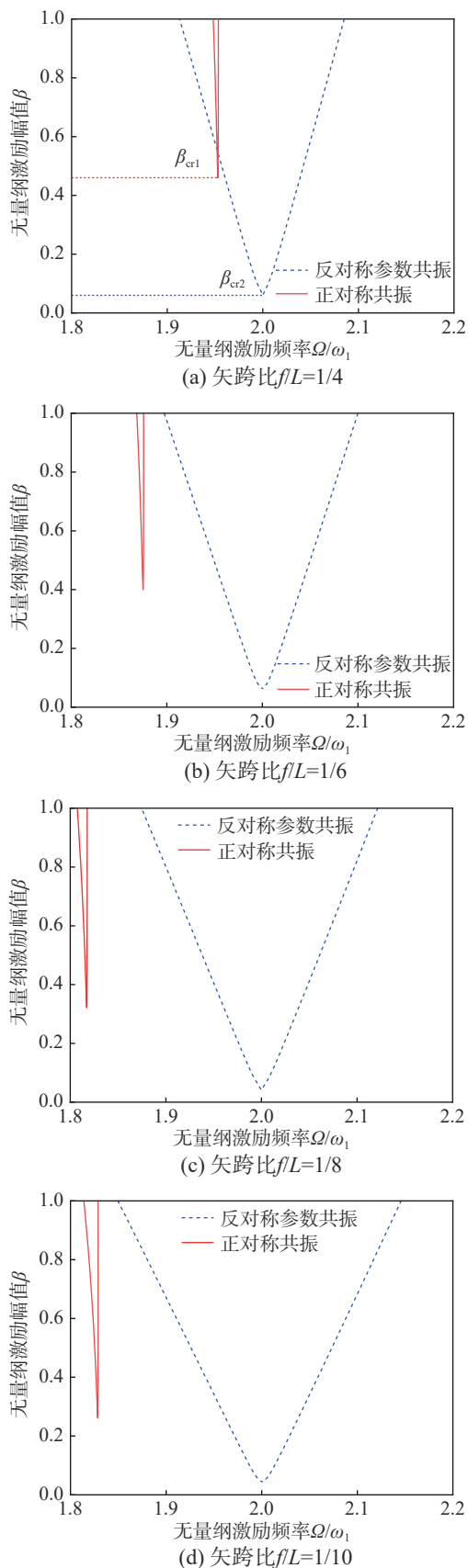


图 2 基础激励下不同矢跨比圆弧拱平面内动力失稳的动力不稳定域

Fig. 2 Dynamic instability regions of the circular arch under a base excitation for different span-rise ratio

$\sqrt{I_x/A}$ 的圆弧拱 (图 3(d)), 与其他长细比的圆弧拱相比, 两个动力失稳域的间隔最小, 表明此时只需增加较小的激励幅值便会使得两个动力不稳定域发生重合, 当基础激励的频率与幅值落入该重合区域时便会激发圆弧拱的双模态动力失稳。因此, 在拱结构设计中, 当要求圆弧拱圆心角不变时, 应减小圆弧拱的长细比, 以增强其动力稳定性, 避免落入参数共振失稳域。

以下分析不同圆心角对动力不稳定域的影响规律, 设圆弧拱的长细比 $S/r_x=400$, 动力系统参数与图 3 分析中的参数相同。由图 4 可知, 随着圆心角的增加, 动力不稳定域的域宽逐渐减小, 无量纲临界激励幅值逐渐增加。而当圆心角 $2\theta=120^\circ$ 时, 在该基础多频激励下, 圆弧拱仅发生参数共振失稳。虽然随着圆心角的增加, 圆弧拱参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域域宽逐渐减小, 但是随着圆心角的增加, 二阶正对称自振频率逐渐靠近一阶反对称自振频率, 因此在基础激励频率相同的情况下, 两个动力不稳定域逐渐靠近, 此时若增加基础激励的幅值, 大圆心角圆弧拱的两个动力不稳定域更容易发生重合, 并被激发双模态动力失稳。由于参数共振失稳域远大于共振失稳域, 因此相比之下, 当拱结构设计中要求长细比一定时, 应选择大圆心角的圆弧拱来增加其动力稳定性。

由图 5 可知, 当增加圆弧拱的阻尼时, 平面内一阶反对称参数共振和二阶正对称共振失稳域逐渐减小, 临界激励幅值逐渐增加, 表明阻尼对圆弧拱的动力失稳有明显的抑制作用。因此当圆弧拱的参数无法改变时, 可通过增加圆弧拱动力系统阻尼的方法避开动力不稳定域。

5 有限元验证

采用有限元瞬态分析方法^[11], 施加不同的加速度激励幅值, 对圆弧拱进行扫频激振, 得到圆弧拱平面内振动的动力响应, 如图 6 所示, 其中基础激励的起始频率分别为: 向上扫频 37.41 Hz, 向下扫频 43.17 Hz, 扫频速率为 0.333 Hz/min。以图 2(d) 中的圆弧拱为对象, 利用有限元瞬态分析法分别得到不同激励幅值下圆弧拱发生平面内一阶反对称参数共振失稳的临界激励频率, 其中基础双余弦激励的幅值分别为 $P_{11}=30 \text{ m/s}^2$ 、 $P_{12}=40 \text{ m/s}^2$, 阻尼衰减率为 $\Delta_1=0.02$ 。根据时域分析

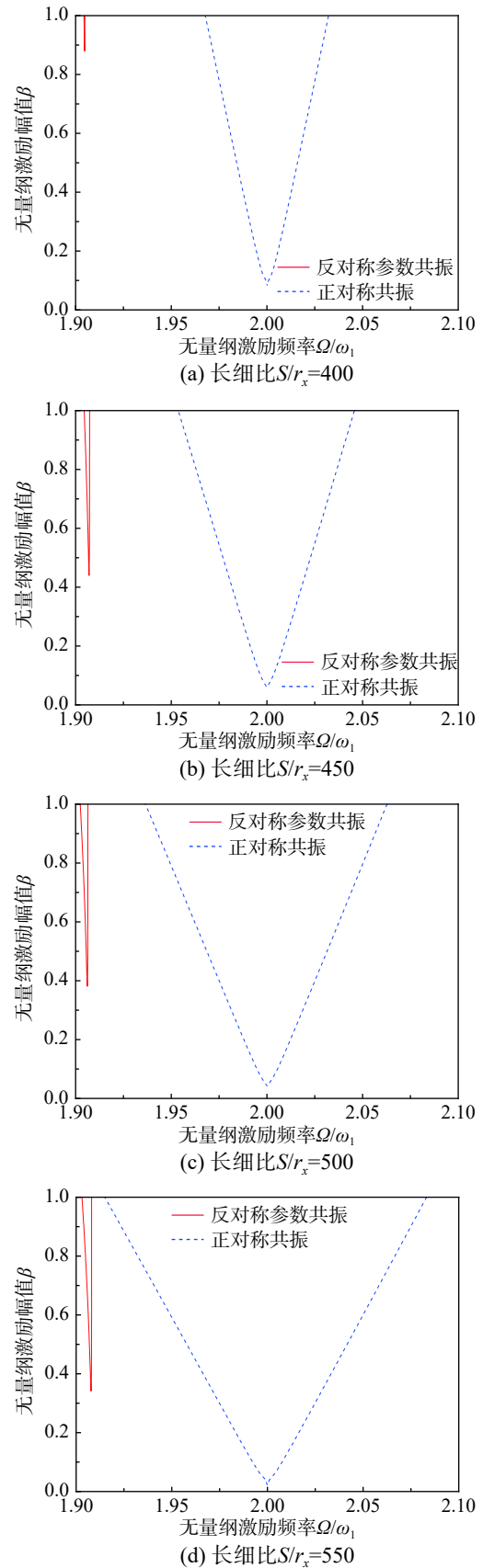


图 3 基础激励下不同长细比圆弧拱平面内动力失稳的动力不稳定域

Fig. 3 Dynamic instability regions of the circular arch under a base excitation for different slenderness ratio

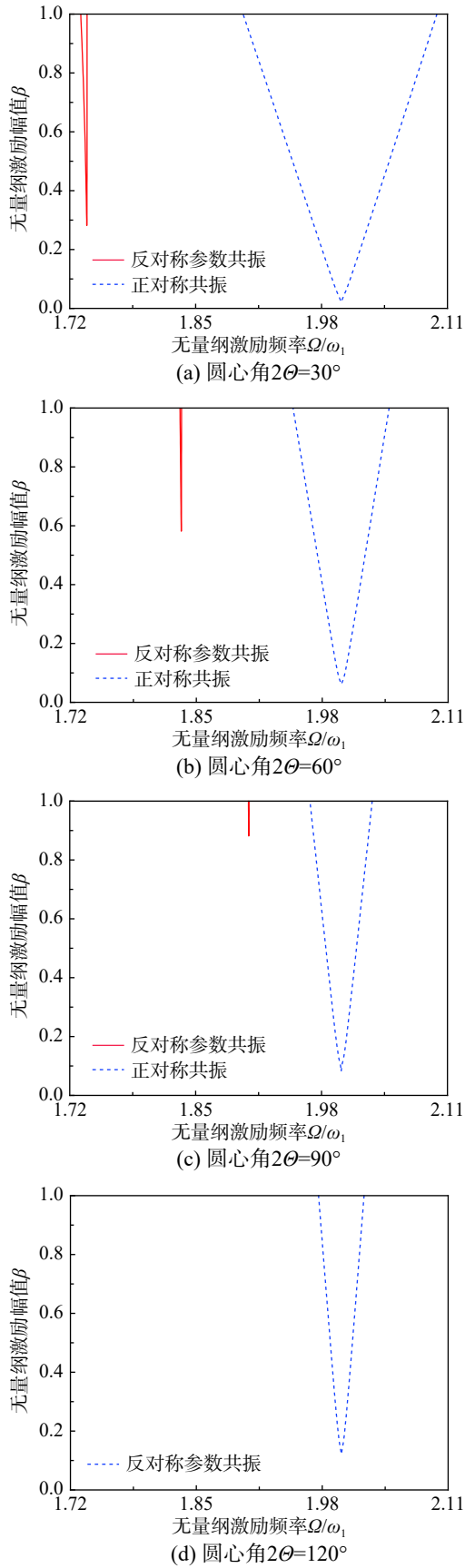


图4 基础激励下不同圆心角圆弧拱平面内参数动力失稳的动力不稳定域

Fig. 4 Dynamic instability regions of the circular arch under a base excitation for different central angle

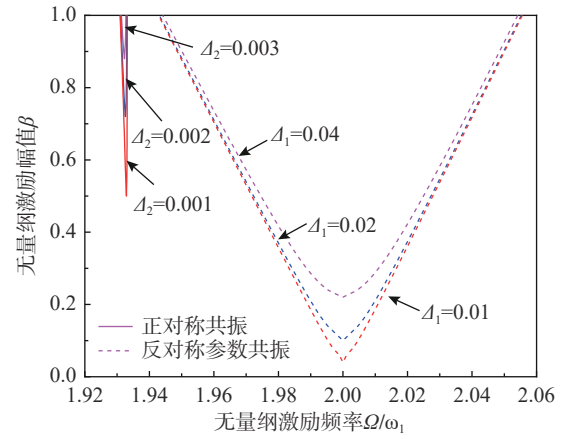


图5 不同阻尼衰减率下圆弧拱平面内参数动力失稳的动力不稳定域

Fig. 5 Dynamic instability regions of the circular arch for different damping decrement

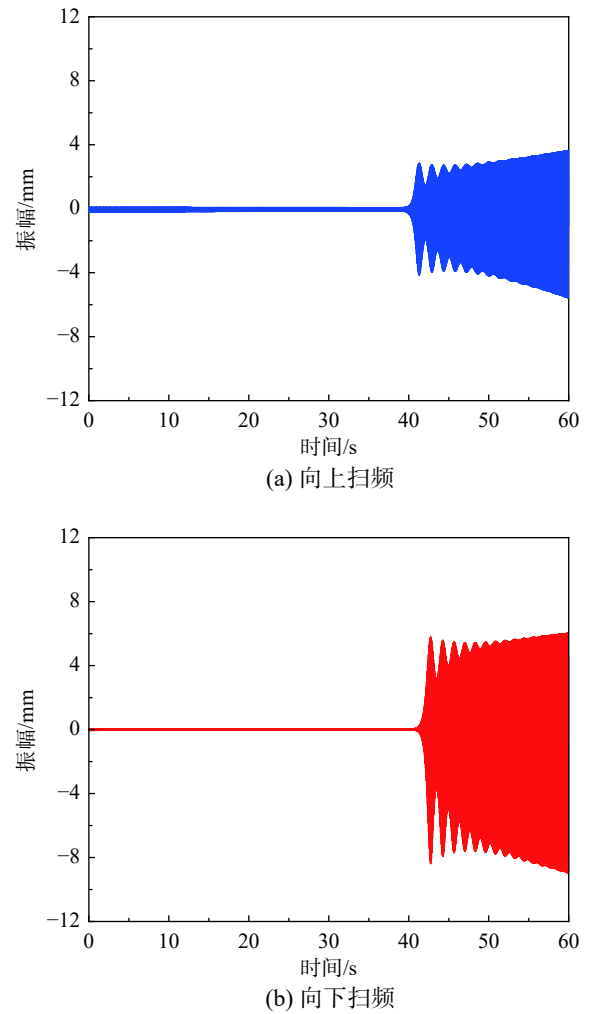


图6 基础双余弦激励下圆弧拱平面内参数动力失稳的振幅时程 ($\beta=1$)

Fig. 6 Amplitude of the circular arch under double cosine base excitation for the in-plane parametric resonance

法^[14]可知, 向上和向下扫频基础激励下圆弧拱发生平面参数共振失稳的临界时间分别为 40 s 和

41 s, 对应的临界激励频率分别为 37.63 Hz 和 42.94 Hz。按照相同的方法可分别计算出动力不稳定域的临界激励频率下限值 Ω_L 和上限值 Ω_H 。表 1 分别给出了基础双余弦激励下圆弧拱平面内一阶反对称参数共振失稳临界激励频率的解析解与数值解的对比, 通过误差分析可知, 两者的临界激励频率值吻合, 变化规律相同, 即随着无量纲激励幅值的增加, 下限值 Ω_L 逐渐减小, 上限值 Ω_H 逐渐增加。同时也验证了理论解析解的正确性。

表 1 基础双余弦激励下圆弧拱平面内一阶反对称参数共振失稳临界激励频率的解析解与数值解 ($f/L=1/10$)
Table 1 Analytical and numerical solutions of the critical excitation frequencies of first-order antisymmetric parametric resonance instability of a circular arch plane under a base double cosine excitations

无量纲激励幅值 β	临界激励频率 下限值 Ω_L/Hz			临界激励频率 上限值 Ω_H/Hz		
	数值解	解析解	误差 / (%)	数值解	解析解	误差 / (%)
1	37.63	37.38	0.66	42.94	43.00	0.14
0.9	37.95	37.68	0.71	42.66	42.74	0.19
0.8	38.27	37.98	0.76	42.38	42.47	0.21
0.7	38.59	38.28	0.80	42.09	42.21	0.29
0.6	38.90	38.57	0.85	41.80	41.94	0.33
0.5	39.21	38.87	0.87	41.52	41.66	0.34
0.4	39.52	39.16	0.91	41.23	41.39	0.39

6 结论

由于基础竖向多频激励下圆弧拱易发生联合共振失稳, 因此本文针对圆弧拱同时发生一阶反对称参数共振和二阶正对称共振的失稳类型展开了理论推导, 得到了相应的动力不稳定域, 并分析了动力不稳定域随圆弧拱设计参数的变化规律, 得到以下结论:

(1) 在一定外部激励下, 圆弧拱有可能被激发前两阶模态联合共振失稳, 参数共振失稳模态为一阶反对称, 共振失稳模态为二阶正对称。

(2) 动力不稳定域可以用于预报基础竖向多频参数激励下圆弧拱的动力稳定性。不稳定域存在一个重合区域使得圆弧拱同时发生一阶反对称参数共振失稳与二阶正对称共振失稳。参数共振失稳域的域宽远大于共振失稳域的域宽, 因此参数共振失稳是拱结构动力稳定设计的首要防控目标。

(3) 随着矢跨比的减小, 参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域的域宽逐渐增加, 而无量纲

临界激励幅值却逐渐减小; 随着长细比的增加, 参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域宽逐渐增加, 而无量纲临界激励幅值却逐渐减小; 随着圆心角的增加, 参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域宽逐渐减小, 无量纲临界激励幅值逐渐增加; 阻尼对圆弧拱平面内的动力失稳具有明显的抑制作用, 可减小参数共振失稳和共振失稳的动力不稳定域宽, 增加无量纲临界激励幅值。

(4) 当基础激励的幅值与频率落入动力不稳定重合域时, 圆弧拱将被同时激发一阶反对称参数共振失稳和二阶正对称共振失稳, 而当基础激励的幅值与频率避开重合域时, 圆弧拱仅被激发反对称参数共振或共振失稳。

(5) 动力失稳临界激励频率的理论解析解与数值解基本一致, 验证了理论解析解的正确性。

参考文献:

- [1] Bolotin V V. The dynamic stability of elastic systems [M]. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- [2] Sophianopoulos D S, Michaltsos G T. Analytical treatment of in-plane parametrically excited undamped vibrations of simply supported parabolic arches [J]. Journal of Vibration & Acoustics, 2003, 125(1): 73 — 79.
- [3] 王连华, 易壮鹏, 张辉. 周期荷载作用下几何缺陷拱的动力稳定性[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2007, 34: 16 — 19.
Wang Lianhua, Yi Zhuangpeng, Zhang Hui. Dynamic stability of arch with the geometrical imperfection subject to the periodic load [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2007, 34: 16 — 19. (in Chinese)
- [4] 赵洪金, 刘超, 孟昭博, 吴敏哲. 周期径向荷载作用下圆弧格构拱动力稳定性分析[J]. 地震工程与工程振动, 2011, 31(6): 73 — 77.
Zhao Hongjin, Liu Chao, Meng Zhaobo, Wu Minzhe. Analysis of dynamic stability of circular lattice arch subjected to periodic radial load [J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2011, 31(6): 73 — 77. (in Chinese)
- [5] 赵洪金, 刘超, 董宁娟, 吴敏哲. 考虑剪切变形的圆弧深拱参数共振稳定性分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(2): 119 — 122.
Zhao Hongjin, Liu Chao, Dong Ningjuan, Wu Minzhe. Stability analysis for parametric resonance of a circular deep arch considering influence of shear deformation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(2): 119 — 122. (in Chinese)
- [6] 董宁娟, 赵洪金. 开口薄壁截面圆弧拱空间动力稳定性分析[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(32): 8569 — 8573.
Dong Ningjuan, Zhao Hongjin. Analysis of spatial

- dynamic stability for thin-walled circular arches with open-section [J]. *Science Technology and Engineering*, 2012, 12(32): 8569 — 8573. (in Chinese)
- [7] 董宁娟, 赵洪金. 闭口薄壁截面圆弧拱空间动力稳定性分析[J]. 噪声与振动控制, 2013(2): 23 — 26.
Dong Ningjuan, Zhao Hongjin. Analysis of spatial parametric resonance for thin-walled circular arches with closed section [J]. *Noise and Vibration Control*, 2013(2): 23 — 26. (in Chinese)
- [8] 刘爱荣, 李晶, 黄永辉. 拱的静动力稳定性研究进展[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2016, 15(5): 1 — 12.
Liu Airong, Li Jing, Huang Yonghui. Research progress on static and dynamic stability of arches [J]. *Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)*, 2016, 15(5): 1 — 12. (in Chinese)
- [9] Liu A R, Yang Z C, Lu H W, Pi Y L. Experimental and analytical investigation on the in-plane dynamic instability of arches owing to parametric resonance [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2018, 24(19): 4419 — 4432.
- [10] Liu A R, Lu H W, Fu J Y, Pi Y L, Huang Y Q, Li J, Ma Y W. Analytical and experimental studies on out-of-plane dynamic instability of shallow circular arch based on parametric resonance [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(1): 677 — 694.
- [11] Zhong Z L, Liu A, Pi Y L, Deng J, Fu J Y, Gao W. In-plane dynamic instability of a shallow circular arch under a vertical-periodic uniformly distributed load along the arch axis [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 189: 105973.
- [12] Liu A, Yang Z, Bradford M A, Pi Y L. Nonlinear dynamic buckling of fixed shallow arches under an arbitrary step radial point load [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2018, 144(4): 04018012.
- [13] Yang Z C, Liu A R, Yang J, Fu J Y, Yang B. Dynamic buckling of functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite shallow arches under a step central point load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 465: 115019.
- [14] Yang Z C, Liu A R, Pi Y L, et al. Nonlinear dynamic buckling of fixed shallow arches under impact loading: An analytical and experimental study [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 487: 115622.
- [15] Chen J S, Yang C H. Experiment and theory on the nonlinear vibration of a shallow arch under harmonic excitation at the end [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, 24(6): 1061 — 1070.
- [16] Zhong Z, Liu A, Fu J, et al. Analytical and experimental studies on out-of-plane dynamic parametric instability of a circular arch under a vertical harmonic base excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 500: 116011.
- [17] Pi Y L, Bradford M A, Uy B. In-plane stability of arches [J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2002, 39(1): 105 — 125.
- [18] Pi Y L, Bradford M A, Guo Y L. Revisiting nonlinear in-plane elastic buckling and postbuckling analysis of shallow circular arches under a central concentrated load [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, 142(8): 04016046.
- [19] Henrych J. Dynamics of arches and frames [M]. New York: Elsevier, 1981.
- [20] Chen H L, Jin F N, Fan H L. Elastic responses of underground circular arches considering dynamic soil-structure interaction: a theoretical analysis [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 29(1): 110 — 122.
- [21] Chen H L, Xia Z C, Zhou J N, Fan H L, Jin F N. Dynamic responses of underground arch structures subjected to conventional blast loads: Curvature effects [J]. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2013, 13(3): 322 — 333.
- [22] Kevorkian J K, Cole J D. Multiple scale and singular perturbation methods [M]. Springer Science & Business Media, 2012.

注: 该文在第 30 届结构工程学术会议 (2021 广州) 应邀作特邀报告