



基于组合时间积分算法的碰撞问题振荡现象修正

张立红 李庆斌 张艳红 罗丹旒 高建勇

CORRECTION OF OSCILLATION PHENOMENON IN IMPACT PROBLEM BASED ON COMBINED TIME INTEGRATION ALGORITHM

ZHANG Li-hong, LI Qing-bin, ZHANG Yan-hong, LUO Dan-ni, GAO Jian-yong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2022.06.S015>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于实时混合试验误差累积规律的时滞影响修正方法

A POST-CORRECTION METHOD FOR THE INFLUENCE OF TIME DELAY IN REAL-TIME HYBRID SIMULATION BASED ON THE ERROR PROPAGATION OF NUMERICAL INTEGRATION ALGORITHM

工程力学. 2021, 38(6): 121-132 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2020.07.0442>

基于桁架单元的能量一致积分方法

AN ENERGY CONSISTENT INTEGRATION METHOD FOR TRUSS ELEMENTS

工程力学. 2018, 35(10): 1-9,36 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2017.06.0434>

考虑数值积分算法的实时子结构试验稳定性研究

STUDY ON THE STABILITY OF REAL-TIME SUBSTRUCTURE TEST CONSIDERING NUMERICAL INTEGRATION ALGORITHM

工程力学. 2021, 38(11): 12-22 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2020.10.0767>

基于精细时程积分的 u - p 格式饱和两相介质动力问题的显-显式时域算法

A TEMPORAL EXPLICIT-EXPLICIT ALGORITHM BASED ON THE PRECISE TIME-INTEGRATION FOR SOLVING THE DYNAMIC PROBLEMS OF FLUID-SATURATED POROUS MEDIA IN u - p FORM

工程力学. 2017, 34(11): 9-17 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2016.04.0257>

Timoshenko梁能量守恒逐步积分算法

ENERGY-CONSERVING TIME INTEGRATION METHOD FOR TIMOSHENKO BEAMS

工程力学. 2019, 36(6): 21-28 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2018.01.0033>

基于集中浓度矩阵和精细积分法的氯离子时变扩散模型

TIME-DEPENDENT CHLORIDE DIFFUSION MODEL BASED ON LUMPED CONCENTRATION MATRIX AND PRECISE TIME-INTEGRATION METHOD

工程力学. 2021, 38(1): 174-182, 204 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2020.03.0153>



订阅号：面向读者



订阅号：面向作者

扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

文章编号: 1000-4750(2023)Suppl-0001-05

基于组合时间积分算法的碰撞问题振荡现象修正

张立红¹, 李庆斌², 张艳红¹, 罗丹旒³, 高建勇¹

(1. 中国水利水电科学研究院流域水循环模拟与调控国家重点实验室, 北京 100048;

2. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084;

3. 广西大学土木建筑工程学院, 广西, 南宁 530004)

摘 要: 该文提出了一种能够有效改善碰撞问题振荡现象的修正方法。基于有限元方法, 采用 Lagrange 乘子法施加接触约束条件, 并与一种无条件稳定的隐式组合时间积分算法相结合对无摩擦动接触问题进行求解。通过引入附加 Lagrange 乘子对组合时间积分算法得到的速度和加速度进行修正, 使其能够满足速度和加速度形式的接触约束的一致性条件。数值算例结果表明: 该文提出的修正方法能够有效地改善碰撞问题中初始接触时速度、接触力等的振荡现象, 进一步提高了碰撞问题的求解精度。

关键词: 碰撞问题; 组合时间积分算法; Lagrange 乘子法; 一致性条件; 振荡现象

中图分类号: TB115 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2022.06.S015

CORRECTION OF OSCILLATION PHENOMENON IN IMPACT PROBLEM BASED ON COMBINED TIME INTEGRATION ALGORITHM

ZHANG Li-hong¹, LI Qing-bin², ZHANG Yan-hong¹, LUO Dan-ni³, GAO Jian-yong¹

(1. State Key Laboratory of Simulation and Regulation of Water Cycle in River Basin,

China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100048, China;

2. State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

3. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China)

Abstract: A correction method is presented which can effectively improve the spurious oscillation phenomenon in impact problems. Based on the finite element method, the Lagrange multiplier method is introduced to impose contact constraints, and an unconditionally stable implicit combined time integration algorithm is combined to solve the frictionless dynamic contact problem. By introducing additional Lagrange multipliers, the velocity and acceleration obtained by the combined time integration algorithm are modified to meet the persistency conditions of the contact constraints in the form of velocity and acceleration. Numerical example results show that the correction method can effectively improve the spurious oscillation of velocity, contact force, etc. at the time of initial contact, and improve the solution accuracy of impact problems.

Key words: impact problem; combined time integration algorithm; Lagrange multiplier method; persistency condition; oscillation phenomenon

动接触问题即碰撞问题广泛存在于各个工程学科领域, 诸如力学、土木工程、机械工程、生物力学等^[1-3]。碰撞问题的数值解法备受学者关注, 是目前最难解决的计算力学课题之一^[4-5]。利

用有限元方法求解接触问题, 接触约束条件的施加主要包括罚函数法和 Lagrange 乘子法两种。罚函数法通过引入罚因子来满足接触边界上的约束条件, 其优点是不增加原问题的求解规模, 实现

收稿日期: 2022-06-16; 修改日期: 2022-11-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(52179125); 中国水利水电科学研究院基本科研业务费专项项目(HTEB0145B01202100000)

通讯作者: 张立红(1984—), 女, 河北人, 高工, 博士, 主要从事结构工程抗震研究(E-mail: zhanglihong08@tsinghua.org.cn).

作者简介: 李庆斌(1964—), 男, 河南人, 教授, 博士, 主要从事高坝结构分析与智能建造研究(E-mail: qingbinli@tsinghua.edu.cn);

张艳红(1970—), 女, 湖北人, 教授级高工, 博士, 主要从事结构工程抗震研究(E-mail: zhangyh@iwhr.com);

罗丹旒(1988—), 女, 广西人, 副教授, 博士, 从事深部岩石力学与工程、岩石/混凝土界面断裂力学研究(E-mail: luodanni-716@163.com);

高建勇(1981—), 男, 四川人, 高工, 博士, 主要从事水工结构及核电关键设备抗震研究(E-mail: gaojy@iwhr.com).

简便；但是人为选择的各种罚因子形式，只能近似满足接触面上的约束条件，罚因子的选择因人而异，直接影响结果的精度，并且难以同时兼顾求解精度和效率^[6]。对于碰撞问题的求解尤其如此，不同积分算法与罚函数法相结合使得罚因子的选择难度被进一步放大。Lagrange 乘子法通过引入 Lagrange 乘子对接触面的约束条件进行准确模拟，计算精度高，该方法虽然引入了多余未知量，但是在求解碰撞问题时，通常与无条件稳定的隐式算法相结合，与罚函数法相比可以通过选用较大时间步长和较粗网格以提高计算效率^[7]。

相对静态接触问题，碰撞问题的求解不仅需要考虑到接触约束条件的施加与求解，还需要考虑选用合适时间积分算法与接触约束条件施加方法相联合，才能使得碰撞问题得以稳定、精确、高效的求解。求解接触非线性问题的时间积分算法主要包括显式算法和隐式算法两类，其中显式积分算法通常与罚函数方法相结合，求解过程较为简便，但显式算法通常是条件性稳定的，需要选用较小的时间步长，对罚因子的选择提出了更高的要求，增加了问题的求解难度和计算工作量^[6]。隐式算法一般具有无条件稳定性，通常与 Lagrange 乘子法相结合求解碰撞问题^[7-8]。有学者以无阻尼弹性杆正向碰撞算例为分析对象，对比了两类方法的求解精度与效率，结论是隐式算法与 Lagrange 乘子法联合求解比显式算法与罚函数相结合的解法更为适合求解碰撞问题，因为 Lagrange 乘子法无须人为定义参数，对空间离散化不太敏感，接触区域使用较粗的网格就能达到所需的求解精度，因此计算效率高于罚函数法^[9]。

影响碰撞问题数值解法鲁棒性的一个重要因素是接触力等结果会出现虚假振荡，这些振荡可以传播到弹性体内部，导致较大的误差甚至引起整个结构系统动力响应结果的失真^[5, 10]。关于振荡现象产生的原因，主要有两种观点：一种是 TAYLOR 和 PAPADOPOULOS^[8]、LAURSEN 和 LOVE^[11]、JAHROMI 和 IZZUDDIN^[12]为代表的学者，他们认为这是积分算法的时间离散和接触约束条件的不一致引起的，于是他们在接触状态发生转变的时刻，在保留原位移的一致性条件的基础上，引入速度和加速度的一致性条件；另一种观点以 KHENOUS 等^[13]、TKACHUK 等^[14]学者为代表，认为振荡现象是空间离散和时间离散的相

互作用引起的，即连续体的接触边界由于零体积是没有质量的，但是经有限元方法对接触体进行空间离散后，接触边界上的节点却是有质量的，这个边界节点上的质量在动力学问题中会产生相应的惯性力，而这部分力是不具有真实的物理意义的，因此需要想办法来消除接触边界上的虚假力。总之，利用时间积分算法与罚函数或者 Lagrange 乘子法相结合求解碰撞问题，均需要采取额外的修正方法来消除初始接触时的振荡现象。

本文选用一种无条件稳定的隐式组合时间积分算法^[15]与 Lagrange 乘子法相结合进行碰撞问题的求解。通过引入附加 Lagrange 乘子对速度和加速度进行修正，使其能够精确满足位移、速度和加速度形式的接触约束一致性条件。最后通过经典的弹性杆对心碰撞算例证明了本文提出的修正方法能够有效地改善碰撞问题中初始接触时的振荡现象，进一步提高了碰撞问题中速度和接触力等物理量的求解精度。

1 振荡问题修正方法

1.1 组合时间积分算法

本文采用的组合时间积分算法，其速度和加速度差分格式分别如式 (1) 和式 (2) 所示：

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} (3u_{t+\Delta t} - 4u_t + u_{t-\Delta t}) \quad (1)$$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t} - 2u_t + u_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} + \frac{\dot{u}_{t+\Delta t} - 2\dot{u}_t + \dot{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (2)$$

式中： Δt 为时间步长； u 、 $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$ 分别为位移、速度和加速度，其右下标为对应时刻。该算法是一种具有两阶精度、两阶收敛速度且无条件稳定的高效隐式算法，并且无须人为选择算法参数即可有效求解各类非线性结构动力问题^[15]。将式 (1) 代入式 (2)，消去 $\dot{u}_{t+\Delta t}$ 后，式 (2) 可简化为：

$$u_{t+\Delta t} = \frac{8}{5}u_t - \frac{3}{5}u_{t-\Delta t} + \frac{4\Delta t}{5}\dot{u}_t - \frac{2\Delta t}{5}\dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{2\Delta t^2}{5}\ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (3)$$

1.2 碰撞问题的接触面一致性条件

为简便起见，本文以无摩擦的两个弹性体正向碰撞问题为例，设 1、2 为两个接触体 Ω_1 、 Ω_2 上发生接触的两点， n_1 为 Ω_1 接触面的外法向，则发生接触时，接触面上法向位移的一致性条件为：

$$g = [(X^{(2)} + u^{(2)}) - (X^{(1)} + u^{(1)})] \cdot n_1 = 0 \quad (4)$$

式中： g 为接触体之间的间隙值； X 和 u 分别为节点的初始位置和位移，其上标 1、2 分别对应不

同的接触体。此即为传统 Lagrange 乘子法对于接触面法向不嵌入条件的数值描述。对于碰撞问题, 除位移一致性条件外, 还需满足接触面上速度和加速度形式的不嵌入条件。式 (4) 对时间进行一阶和二阶求导, 并考虑到 n_1 的定义有 $\dot{n}_1 = 0$, 可得接触面上法向速度和加速度的一致性条件如式 (5) 所示。

$$\dot{g} = [(\dot{u}^{(2)} - \dot{u}^{(1)}) \cdot n_1] = 0, \quad \ddot{g} = [(\ddot{u}^{(2)} - \ddot{u}^{(1)}) \cdot n_1] = 0 \quad (5)$$

1.3 组合时间积分算法的一致性条件修正

采用与传统 Lagrange 乘子法同样的思路, 利用接触体碰撞时法向的速度和加速度的一致性条件对组合时间积分算法进行修正。基于式 (1) 和式 (3) 分别引入与速度和加速度相对应的广义 Lagrange 乘子 λ_v 和 λ_a , 则增广后的变分式需分别满足式 (6) 和式 (7):

$$\int_{C_h} \sum_{i=1}^2 \left\{ w_v^{(i)} \left[u_{t+\Delta t}^{(i)} - \frac{8}{5} u_t^{(i)} + \frac{3}{5} u_{t-\Delta t}^{(i)} - \frac{4\Delta t}{5} \dot{u}_t^{(i)} + \frac{2\Delta t}{5} \dot{u}_{t-\Delta t}^{(i)} - \frac{2\Delta t^2}{5} \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \right] \cdot n_1 \cdot (\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \cdot n_1) + \lambda_v (-1)^i \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \cdot n_1 + \tilde{\lambda}_v (-1)^i \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \cdot n_1 \right\} d\Gamma = 0 \quad (6)$$

$$\int_{C_h} \sum_{i=1}^2 \left\{ w_a^{(i)} \left[\dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} - \frac{3}{2\Delta t} u_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{2}{\Delta t} u_t^{(i)} - \frac{1}{2\Delta t} u_{t-\Delta t}^{(i)} \right] \cdot n_1 \cdot (\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \cdot n_1) + \lambda_a (-1)^i \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \cdot n_1 + \tilde{\lambda}_a (-1)^i \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \cdot n_1 \right\} d\Gamma = 0 \quad (7)$$

式中: w_v 和 w_a 为正的权函数; $\tilde{u}$ 和 $\tilde{\ddot{u}}$ 分别为与位移场无关的虚速度和虚加速度, $i=1, 2$ 对应不同的接触体, 其余意义同前。广义 Lagrange 乘子 λ_v 和 λ_a 可分别看作与碰撞问题中速度和加速度相共轭的广义动量和广义能量。借鉴文献 [8] 的做法, 权函数的具体形式为 $w_v^{(i)} = m^{(i)} / \Delta t$, $w_a^{(i)} = m^{(i)} \Delta t$, 其中, $m^{(i)}$ 为节点 i 的质量。为后文表述简洁, 引入记号: $\llbracket \cdot \rrbracket_c = [(\cdot)^{(2)} - (\cdot)^{(1)}] \cdot n_1$ 。

故可将广义 Lagrange 乘子 λ_v 和 λ_a 引入后的接触面一致性条件简写为:

$$\llbracket u_{t+\Delta t} + X \rrbracket_c = 0, \quad \llbracket \dot{u}_{t+\Delta t} \rrbracket_c = 0, \quad \llbracket \ddot{u}_{t+\Delta t} \rrbracket_c = 0 \quad (8)$$

由式 (6) 可得式 (9) 和式 (10), 由式 (10) 减去式 (9), 并利用持续接触时的一致性条件可得式 (11):

$$w_v^{(1)} \left[u_{t+\Delta t}^{(1)} - \frac{8}{5} u_t^{(1)} + \frac{3}{5} u_{t-\Delta t}^{(1)} - \frac{4\Delta t}{5} \dot{u}_t^{(1)} + \frac{2\Delta t}{5} \dot{u}_{t-\Delta t}^{(1)} - \frac{2\Delta t^2}{5} \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(1)} \right] \cdot n_1 - \lambda_v = 0 \quad (9)$$

$$w_v^{(2)} \left[u_{t+\Delta t}^{(2)} - \frac{8}{5} u_t^{(2)} + \frac{3}{5} u_{t-\Delta t}^{(2)} - \frac{4\Delta t}{5} \dot{u}_t^{(2)} + \frac{2\Delta t}{5} \dot{u}_{t-\Delta t}^{(2)} - \frac{2\Delta t^2}{5} \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(2)} \right] \cdot n_1 + \lambda_v = 0 \quad (10)$$

$$\lambda_v = \frac{\frac{8}{5} \llbracket u_t + X \rrbracket_c - \frac{3}{5} \llbracket u_{t-\Delta t} + X \rrbracket_c + \frac{4\Delta t}{5} \llbracket \dot{u}_t \rrbracket_c - \frac{2\Delta t}{5} \llbracket \dot{u}_{t-\Delta t} \rrbracket_c}{\left(\frac{1}{w_v^{(1)}} + \frac{1}{w_v^{(2)}} \right)} \quad (11)$$

将式 (11) 回代入式 (9) 和式 (10), 可求得满足一致性条件的接触节点加速度值修正公式如式 (12):

$$\begin{cases} \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(1)} \cdot n_1 = \frac{5}{2\Delta t^2} \left((\hat{u}_{t+\Delta t}^{(1)}) \cdot n_1 - \frac{\lambda_v}{w_v^{(1)}} \right) \\ \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(2)} \cdot n_1 = \frac{5}{2\Delta t^2} \left((\hat{u}_{t+\Delta t}^{(2)}) \cdot n_1 + \frac{\lambda_v}{w_v^{(2)}} \right) \end{cases} \quad (12)$$

同理由式 (7) 可求得满足一致性条件的接触节点速度值修正公式如式 (13):

$$\begin{cases} \dot{u}_{t+\Delta t}^{(1)} \cdot n_1 = [\hat{u}_{t+\Delta t}^{(1)}] \cdot n_1 + \frac{\lambda_a}{w_a^{(1)}} \\ \dot{u}_{t+\Delta t}^{(2)} \cdot n_1 = [\hat{u}_{t+\Delta t}^{(2)}] \cdot n_1 - \frac{\lambda_a}{w_a^{(2)}} \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{其中: } \lambda_a = \frac{-\frac{2}{\Delta t} \llbracket u_t + X \rrbracket_c + \frac{1}{2\Delta t} \llbracket u_{t-\Delta t} + X \rrbracket_c}{\left(\frac{1}{w_a^{(1)}} + \frac{1}{w_a^{(2)}} \right)}.$$

式 (12) 和式 (13) 中的 $\hat{u}_{t+\Delta t}^{(i)}$ 和 $\hat{u}_{t+\Delta t}^{(i)}$ 是由时间积分算法的式 (3) 和式 (1) 直接求得的物理量。

2 算例验证

为了验证本文提出的修正方法的正确性和有效性, 以无摩擦无阻尼弹性杆的对心碰撞问题为算例进行说明。

计算参数及初始条件如图 1 所示, 计算步长取 0.001 s。易知该算例的理论解为: 0.0 s~0.1 s, 两杆尚未发生接触, 各自以初速度相向运动; 0.1 s~0.3 s, 两杆持续接触, 碰撞产生的应力波从接触面传播到杆的另一端再回到接触面, 接触力大小为 0.0125 N; 0.3 s 之后, 各自反向匀速运动, 再次发生分离。

组合时间积分算法联合 Lagrange 乘子法直接求解得到的接触点上的位移、速度、接触力和系统能量等时程结果如图 2 所示。可以看出, 即使不对速度和加速度进行修正, 组合时间积分算法

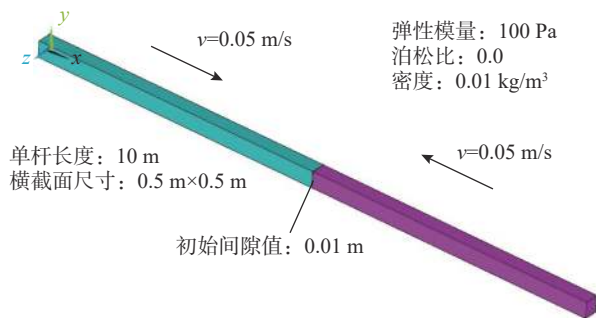
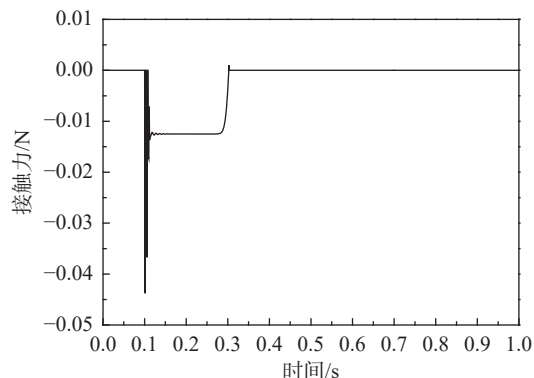


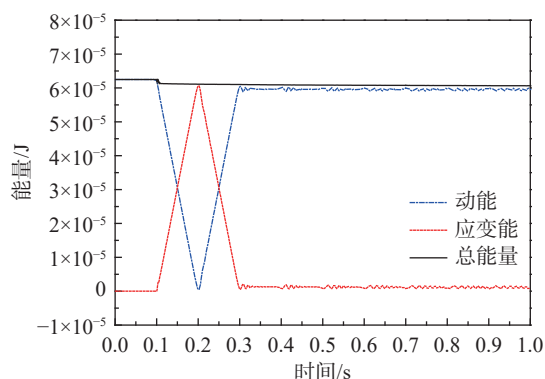
图1 两弹性杆对心碰撞示意图及计算条件

Fig. 1 Schematic diagram and calculation conditions of the impact between two elastic bars

也能得到稳定的计算结果,而常用的 Newmark 法等算法在求解该类问题时不进行修正处理是无法得到稳定结果的^[12],可以发现在接触发生的初始时刻,接触节点的速度和接触力有明显的振荡现象,计算结果的精度受到一定的影响。图3为采用本文方法进行修正后的计算结果,可以看到速度和碰撞力在接触初始时刻的振荡现象得到明显改善,各物理量的计算结果均与解析解吻合度高。这说明本文提出的基于组合时间积分算法的修正方法,能够有效改善碰撞问题中初始接触时的振荡现象,可以获得高精度的计算结果。



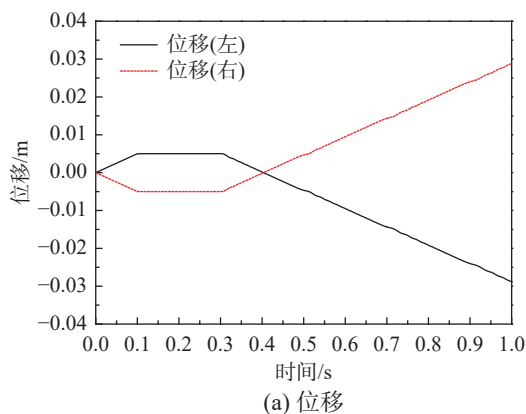
(c) 接触力



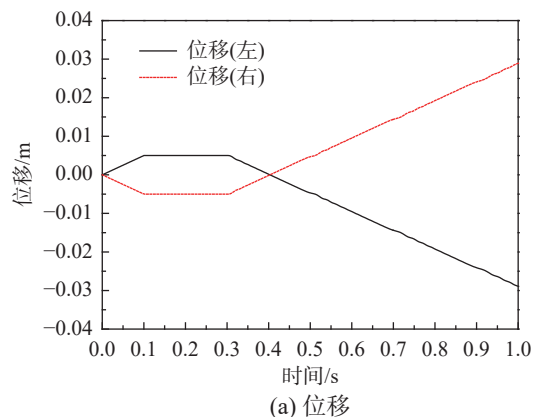
(d) 能量

图2 修正前接触节点的结果时程图

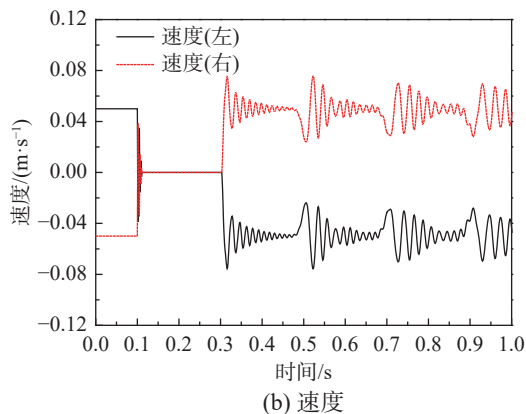
Fig. 2 Time history diagram of response results of contact nodes before correction



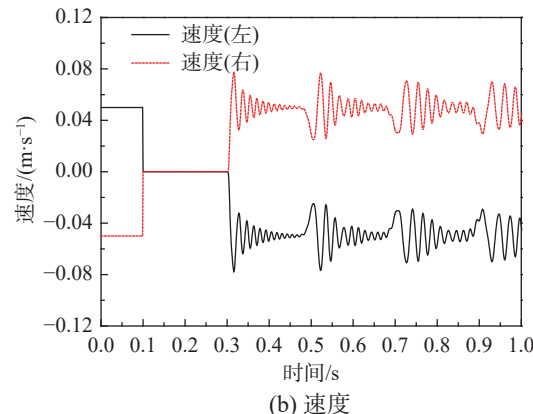
(a) 位移



(a) 位移



(b) 速度



(b) 速度

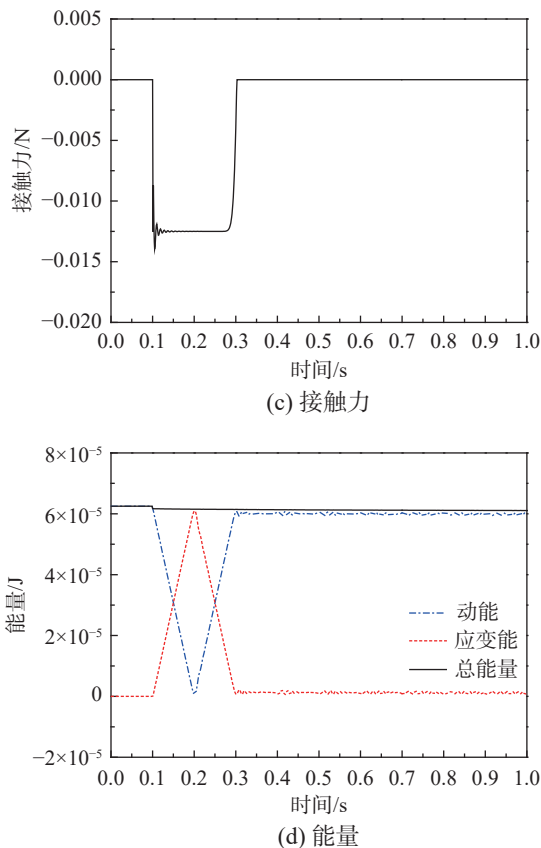


图3 修正后接触节点的结果时程图

Fig. 3 Time history diagram of response results of contact nodes after correction

3 结论

针对碰撞问题中初始接触时速度、接触力等发生的虚假振荡现象,本文提出了一种修正方法,并通过经典的对心碰撞算例验证了修正方法的有效性。所得结论如下:

(1) 通过引入附加 Lagrange 乘子可以使得两个接触体的接触面上不仅满足位移形式的一致性条件,而且满足速度和加速度形式的一致性条件。

(2) 数值算例结果表明:本文提出的修正方法与隐式组合时间积分算法相结合,明显改善了碰撞问题中初始接触时的振荡现象,进一步提高了速度和接触力等物理量的求解精度。

参考文献:

[1] 张敬科,朱涛,雷成,等.基于等效刚度法的车体结构碰撞建模与参数优化[J].*工程力学*,2022,39(2):244—256.
ZHANG Jingke, ZHU Tao, LEI Cheng, et al. Collision modeling and parameter optimization of carbody based on equivalent stiffness method [J]. *Engineering Mechanics*, 2022, 39(2): 244—256. (in Chinese)

[2] 焦驰宇,刘文勃,桂晓珊,等.近断层地震下小半径曲线桥碰撞响应的振动台试验研究[J].*工程力学*,2020,37(8):189—201.
JIAO Chiyu, LIU Wenbo, GUI Xiaoshan, et al. Shaking table tests of the seismic pounding effect on a small radius curved bridge under near-fault ground motions [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(8): 189—201. (in Chinese)

[3] 王宏博,董世民.轴向往复运动抽油杆柱在弯曲井眼内横向振动的仿真模型[J].*工程力学*,2020,37(10):228—237.
WANG Hongbo, DONG Shimin. A model for the transverse vibration simulation of sucker rod strings with axial reciprocating motion in curved wellbores [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(10): 228—237. (in Chinese)

[4] 张立红,刘天云,李庆斌,等.一种适用于求解大规模结构的分步接触算法及其工程应用[J].*工程力学*,2018,35(4):33—40.
ZHANG Lihong, LIU Tianyun, LI Qingbin, et al. A split-step contact solution method and its engineering application for large scale structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2018, 35(4): 33—40. (in Chinese)

[5] GONZÁLEZ J A, KOPAČKA J, KOLMAN R, et al. Partitioned formulation of contact-impact problems with stabilized contact constraints and reciprocal mass matrices [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2021, 122(17): 4609—4636.

[6] NSIAMPA N, PONTHOT J P, NOELS L. Comparative study of numerical explicit schemes for impact problems [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35(12): 1688—1694.

[7] KRAUSE R, WALLOTH M. Presentation and comparison of selected algorithms for dynamic contact based on the Newmark scheme [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2012, 62(10): 1393—1410.

[8] TAYLOR R L, PAPADOPOULOS P. On a finite element method for dynamic contact/impact problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, 36(12): 2123—2140.

[9] WANG J Y, LIU Z Y, HONG J Z. Influence of non-physical chosen parameters on impact dynamics of discretized elastic bodies [J]. *Journal of Mechanics*, 2019, 35(2): 167—177.

[10] KOLMAN R, KOPAČKA J, GONZÁLEZ J A, et al. Bi-penalty stabilized technique with predictor-corrector time scheme for contact-impact problems of elastic bars [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, 189: 305—324.

[11] LAURSEN T A, LOVE G R. Improved implicit integrators for transient impact problems - geometric admissibility within the conserving framework [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(2): 245—274.

[12] JAHROMI H Z, IZZUDDIN B A. Energy conserving algorithms for dynamic contact analysis using Newmark methods [J]. *Computers & Structures*, 2013, 118: 74—89.

[13] KHENOUS H B, LABORDE P, RENARD Y. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2008, 27(5): 918—932.

[14] TKACHUK A, WOHLMUTH B I, BISCHOFF M. Hybrid-mixed discretization of elasto-dynamic contact problems using consistent singular mass matrices [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 94(5): 473—493.

[15] ZHANG L H, LIU T Y, LI Q B. A robust and efficient composite time integration algorithm for nonlinear structural dynamic analysis [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015: 907023.