

文章编号: 1000-4750(2010)07-0021-06

裂纹扩展过程模拟的无网格MSLS方法

*蔡永昌^{1,2}, 朱合华¹

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 地下建筑与工程系, 上海 200092;

2. 重庆大学西南资源开发及环境灾害控制工程教育部重点实验室, 重庆 400044)

摘 要: 采用一种新提出的无网格 MSLS 方法来进行裂纹扩展过程的模拟分析, 该方法的插值函数具有 Kronecker delta 属性, 能够方便准确地施加本质边界条件, 且其计算和求导过程相对滑动最小二乘(MLS)插值更为简单, 克服了其它无网格方法的一些主要困难, 适合于裂纹扩展等网格畸变和网格移动等问题的分析模拟。该文中采用围线积分法计算裂纹的应力强度因子, 用最大周向应力理论来建立复合裂纹的断裂准则, 数值算例表明了该文理论和方法的正确性与可行性。

关键词: 裂纹扩展; 无网格; 无单元; Shepard 函数; MSLS; MLS

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

SIMULATION OF CRACK GROWTH BY THE MSLS METHOD

*CAI Yong-chang^{1,2}, ZHU He-hua¹

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education,

Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P.R.China;

2. Key Laboratory for the Exploitation of Southwest Resources and Environmental Disaster Control Engineering,

Ministry of Education, Chongqing 400044, China)

Abstract: A newly proposed Meshless Shepard and Least Square (MSLS) interpolation has been employed for the simulation of crack growth. The MSLS shape function possesses the much desired Kronecker delta property. Thus the essential boundary conditions can be treated as easily as they are in Finite Element Method (FEM). The construction and derivation of the MSLS interpolation are also simpler than that of the Moving Least Square (MLS) approximation. This MSLS method overcomes the main difficulties of other meshless methods and is well-suited for the analysis of crack propagations. In this work, the contour integral method has been used to compute the mixed-mode stress intensity factors. The crack propagation angle is determined by the criterion of maximum stress in the tangential direction. Several numerical examples are presented to verify the validity and accuracy of the present method.

Key words: crack growth; meshless; element free; shepard function; MSLS; MLS

无网格方法由于在插值时只需要离散结点, 不需要单元网格, 非常适合于裂纹扩展等网格畸变和网格移动等问题的分析模拟, 近年来得到了较大的关注和重视^[1], 并已在混凝土开裂^[2]、疲劳裂纹^[3-4]、动态断裂^[5]等问题的分析中得到了较广泛的应用。在目前已发展的诸如光滑粒子动力学方法

(SPH)、无网格伽辽金法(EFG)、无网格局部 Petro-Galerkin 法(MLPG)、点插值无网格方法(PIM)等众多无网格方法^[6-10]中, 又尤以 EFG 法因具有精度高、收敛快、求解稳定等优点而应用最为广泛。但是即使该类至今仍在广泛应用的基于滑动最小二乘(MLS)近似的 EFG 方法, 在实际使用时也存在着

收稿日期: 2009-02-19; 修改日期: 2009-08-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(50579093); 教育部科学技术研究重点项目(107041)

作者简介: *蔡永昌(1972—), 男, 四川人, 副教授, 博士, 博导, 从事岩土数值计算理论研究(E-mail: yccai@tongji.edu.cn);

朱合华(1962—), 男, 安徽人, 教授, 博士, 博导, 院长, 从事岩土工程研究(E-mail: zhuhehua@tongji.edu.cn).

许多难以克服或需要付出很大代价才能克服的困难,如MLS插值函数不具有Kronecker delta属性带来的本质边界条件施加困难、MLS形函数的计算过程复杂、计算点插值半径的选择对EFG方法计算结果的影响很大等。国内外学者付出了大量努力^[11-13]以试图解决这些问题,但问题和困难依然存在。

本文尝试采用一种新提出的无网格Shepard-最小二乘方法(Meshless Shepard and Least Square method, 简记为MSLS)^[14]来克服EFG等方法目前所面临的主要困难,并将其应用于裂纹扩展过程的模拟及分析。该插值方法由Shepard形函数和最小二乘形函数基于单位分解概念^[15-16]构造,具有Kronecker delta属性,能够方便准确地施加本质边界条件,且其计算和求导过程也比MLS简单。文中采用围线积分法计算混合裂纹的应力强度因子,用最大周向应力理论来建立复合裂纹的断裂准则。带裂纹的半圆盘试件、带圆孔的三点弯曲梁试件等裂纹扩展算例验证和说明了无网格MSLS方法应用于裂纹扩展过程分析的正确性和有效性。

1 无网格MSLS插值函数

如图1所示的任意分析区域 Ω ,共离散成了 N 个结点。设其中的任一结点 i 的坐标为 $\mathbf{x}_i$,影响半径为 d_{mi} ,在结点 i 的影响范围内有 M 个结点。如果结点的影响区域被裂纹割断,则采用文献[9-10]的可视化准则来确定结点的影响区域,例如如图1中的结点 k 和结点 j 。

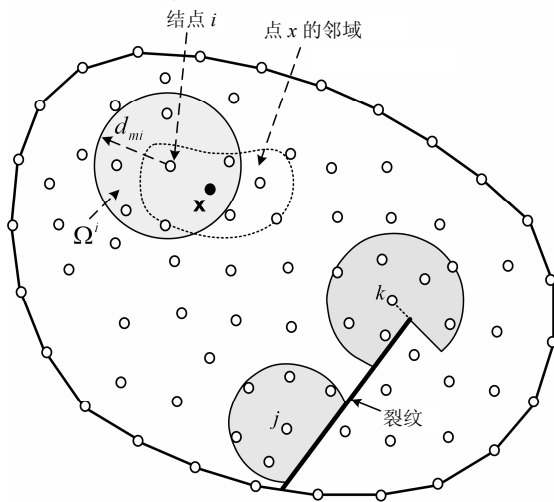


图1 分析区域的离散模型

Fig.1 Discrete model of domain

对分析区域中的任意点 $\mathbf{x}(\mathbf{x} \in \Omega)$,其位移近似

函数可由 $\mathbf{x}$ 周围的 n 个邻接结点定义如下:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i^0(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中:

$$\phi_i^0(\mathbf{x}) = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x})} \quad (2)$$

是著名的Shepard形函数(也称0阶MLS形函数); $\mathbf{x}$ 周围的 n 个邻接结点指的是其影响范围包含点 $\mathbf{x}$ 的结点; $w_i(\mathbf{x})$ 是结点 i 相关的权函数; $\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x})$ 在结点 i 上定义的局部近似函数。

如果权函数在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 处奇异,则Shepard形函数 $\phi_i^0(\mathbf{x})$ 满足 δ_{ij} 条件。本研究中采用如下形式的奇异权函数^[17]:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{d_{mi}^2}{d_i^2 + \varepsilon} \cos^2\left(\frac{\pi d_i}{2d_{mi}}\right), & d_i \leq d_{mi} \\ 0, & d_i > d_{mi} \end{cases} \quad (3)$$

其中: $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ 是点 $\mathbf{x}$ 与结点 $\mathbf{x}_i$ 之间的距离; ε 取一个很小的实数如 10^{-10} ,以避免结点处权函数计算的数值奇异性;结点 i 的影响半径 d_{mi} 的取值请参见文献[14]。

式(1)中的结点 i 的局部函数 $\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x})$ 通常定义为如下形式以提高Shepard插值的计算精度:

$$\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \beta_{ji} p_j(\mathbf{x}) \quad (4)$$

其中: β_{ji} 是结点 i 相关的自由度系数; $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, \dots]$ 是多项式基函数。

如果在式(4)中采用基函数 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1]$,则该局部近似函数 $\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x})$ 即是结点 i 的实际位移值,但该基函数将导致极差的求解精度。如果 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 取为高阶的多项式将能显著地提高求解精度,但却会增加结点 i 的自由度个数,并带来本质边界条件施加的困难。

本研究采用最小二乘插值^[18]来定义结点 i 的局部近似位移函数以避免上述问题。对结点 i 影响范围内的任意点 $\mathbf{x}$,其局部近似位移函数 $\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}_i)$ 可定义为:

$$\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \Phi_j^i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j \quad (5a)$$

其中:

$$\Phi_j^i(\mathbf{x}) = \sum_j p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji} \quad (5b)$$

是结点 $J(J=1, \dots, M)$ 相关的最小二乘形函数; M 是处于结点 i 影响范围 Ω^i 内的结点数; $p_j(\mathbf{x})$ 是多项式基函数:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_M)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ y_1 & y_2 & \dots & y_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5c)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \quad (5d)$$

由于式(5b)中的最小二乘形函数不满足结点 i 处的插值条件, 即在结点 i 处 $\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}_i) \neq \mathbf{u}_i$ 。为了能够方便地施加本质边界条件, 对式(5a)采用了如下修改:

$$\mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \bar{\Phi}_j^i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j = \bar{\Phi}^i \cdot \mathbf{u} \quad (6)$$

其中:

$$\bar{\Phi}^i(\mathbf{x}) = [\Phi_1^i(\mathbf{x}) - \Phi_1^i(\mathbf{x}_i), \dots, 1 + \Phi_1^i(\mathbf{x}) - \Phi_1^i(\mathbf{x}_i), \dots, \Phi_M^i(\mathbf{x}) - \Phi_M^i(\mathbf{x}_i)] \quad (7)$$

$\mathbf{x}_i$ 是结点 i 的坐标值。可以看出, 修改后的形函数式(7)仍然满足单位分解条件 $\sum_J \bar{\Phi}_J^i(\mathbf{x}) = 1$, 且满足

$$\bar{\Phi}_J^i(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1, & J=i \\ 0, & J \neq i \end{cases} \text{ 从而强制使得 } \mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_i \text{ 成立。}$$

将式(6)代入式(1)可以得到一种 MSLS 无网格插值近似函数:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i^0(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{Li}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i^0(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^M \bar{\Phi}_j^i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j \right) \quad (8)$$

设 R 是与任意点 $\mathbf{x}$ 相关结点的总个数, 该结点总数包括点 $\mathbf{x}$ 的 n 个邻接结点以及位于这 n 个邻接结点的影响范围内的所有结点。式(8)可改写为:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \\ \vdots \\ \phi_n^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1^1 & \bar{\Phi}_2^1 & \dots & \bar{\Phi}_n^1 & \bar{\Phi}_{n+1}^1 & \dots & \bar{\Phi}_R^1 \\ \bar{\Phi}_1^2 & \bar{\Phi}_2^2 & \dots & \bar{\Phi}_n^2 & \bar{\Phi}_{n+1}^2 & \dots & \bar{\Phi}_R^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{\Phi}_1^n & \bar{\Phi}_2^n & \dots & \bar{\Phi}_n^n & \bar{\Phi}_{n+1}^n & \dots & \bar{\Phi}_R^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^0 \bar{\Phi}^1 \mathbf{u} \\ \phi_2^0 \bar{\Phi}^2 \mathbf{u} \\ \vdots \\ \phi_n^0 \bar{\Phi}^n \mathbf{u} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^R \bar{N}_k(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k \quad (9)$$

其中: Φ^0 是 Shepard 形函数向量; $\bar{\Phi}$ 是修改后的最小二乘插值形函数矩阵; $\mathbf{u}$ 是结点的位移向量; $\bar{N}_k(\mathbf{x})$ 是 MSLS 形函数。

很简单即可以证明^[14], $\bar{N}_k(\mathbf{x})$ 满足 δ_{ij} 条件, 即 $\bar{N}_k(\mathbf{x}_j) = \delta_{kj}$, ($j=1, \dots, n; k=1, \dots, R$); 同时也可证明该 MSLS 形函数满足线性连续条件和单位分解条件。

2 裂纹扩展准则

利用线弹性断裂力学研究裂纹体结构中裂纹的扩展时, 应力强度因子的精确计算及合理的断裂准则是十分重要的。计算复杂几何形状和复杂载荷下的混合型裂纹应力强度因子主要有权函数法、虚裂纹扩展法、边界配置法和 J 积分法等, 复合裂纹的断裂准则有最大周向应力准则、最大能量释放率准则和应变能密度因子准则等。本文采用围积积分法^[19]来计算混合型裂纹的应力强度因子, 采用最大周向应力准则来确定裂纹的开裂角, 并认为裂尖沿着最大周向应力的法向扩展, 其计算公式为:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (10)$$

由式(10)求出了裂纹的开裂角 θ_0 后, 即可得到 $r=r_0$ 圆周上的最大周向应力为:

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \cos \frac{\theta_0}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right) \quad (11)$$

据此可建立相应的断裂准则:

$$\sigma_{\theta \max} = \sigma_{\theta c} \quad (12)$$

式中 $\sigma_{\theta c}$ 为最大周向应力的临界值。

此外, 裂纹扩展步长的选择也很重要, 小的裂纹扩展步长可提高计算精度, 但会极大地增加计算工作量; 而较大的裂纹扩展步长其计算精度可能不满足要求, 甚至出现计算结果大大偏离实际结果。本文采用 $0.15a$ (a 为初始裂纹长度) 作为裂纹扩展步长以取得较满意的计算结果。

3 离散控制方程

考虑二维弹性体, 可以与有限元类似采用最小势能原理导出如下的离散控制方程:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (13a)$$

其中总体刚度子矩阵:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j d\Omega \quad (13b)$$

式中: $\mathbf{D}$ 是弹性材料矩阵; $\mathbf{B}_i$ 是应变子矩阵。

对式(13a)的积分可采用与其它无网格方法一样的背景积分网格或有限元网格来完成。在本文中, 采用了离散结点的 Delaunay 三角形网格来进行刚度矩阵的积分, 在每个三角形网格上采用 3 个

Hammer 积分点。式(3)中的结点影响半径 d_{mi} 取值为与该节点 i 最近的第 6 个结点的距离; 在靠近裂纹的结点处, 则采用 1.6 倍上述距离作为结点影响半径。

4 数值算例

上述无网格MSLS进行裂纹扩展过程模拟的分析程序采用标准C++编制, 并利用如下算例对其理论和方法进行了测试和验证。在所有的算例中, 均采用了线性基函数。

4.1 弧形裂纹

无限大板中的中心弧形裂纹, 其几何尺寸及力学模型如图 2 所示。该问题的应力强度因子解析解^[20]为:

$$K_I = \frac{\sigma}{2} \pi R \sin \beta \left[\frac{a \cos(\beta/2)}{b} + \cos(3\beta/2) \right],$$

$$K_{II} = \frac{\sigma}{2} \pi R \sin \beta \left[\frac{a \sin(\beta/2)}{b} + \sin(3\beta/2) \right]. \quad (14)$$

其中:

$$a = 1 - \sin^2(\beta/2) \cos^2(\beta/2), \quad b = 1 + \sin^2(\beta/2).$$

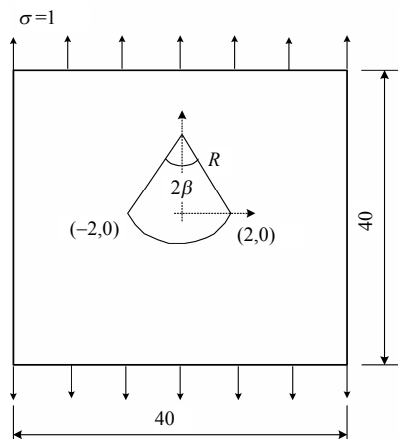


图2 无限大板中的弧形裂纹

Fig.2 Curved crack in an infinite plate

在本例中取 $R = 4.25$ 和 $\beta = 28.0725^\circ$ 。采用 40×40 的无网格结点进行计算。表 1 给出了用 MSLS 方法计算得到的应力强度因子与解析解的对照结果, 可以发现本文结果与解析解吻合较好。

表 1 弧形裂纹的应力强度因子

Table 1 Stress intensity factors for curved crack

	解析解	MSLS 方法	误差/(%)
K_I	2.015	1.990	-1.24
K_{II}	1.112	1.102	-0.89

4.2 带裂纹的半圆盘试件

对如图 3 所示的半圆盘状带裂纹试件, 其几何

尺寸和初始计算结点分别如图 3 和图 4 所示, 共布置了 1074 个离散结点。这是一个典型的 I-II 型混合模式下的张裂纹扩展算例。图 4 和图 5 给出了本文得到的无网格模拟裂纹扩展的路径及其与 Lim 等 (1993)^[21] 的数值模拟结果和实验结果的比较, 可以看出本文计算结果与实验结果吻合良好。

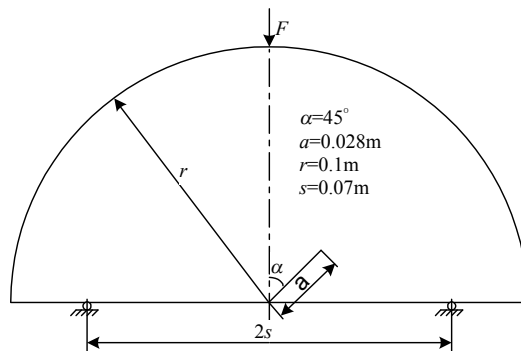


图3 半圆盘裂纹试件

Fig.3 Half circle specimen with initial crack

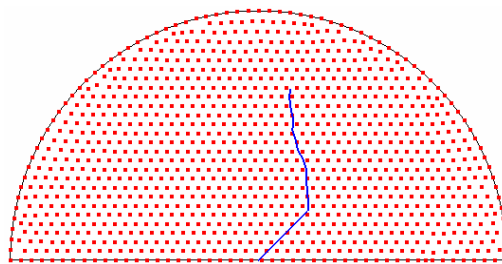


图4 裂纹扩展过程中的某一状态

Fig.4 One stage of the crack growth

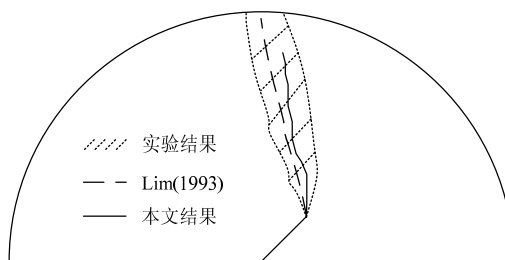


图5 扩展路径比较

Fig.5 Comparison of crack growth path

4.3 带圆孔的三点弯曲梁试件

如图 6 所示的三点弯曲梁试件, 在梁的中心线左侧有三个小圆孔, 在梁的底部有一条初始裂纹。采用 MSLS 的线性基函数进行求解, 布置了 1959 个无网格离散计算结点。图 7 给出了用 MSLS 方法计算得到的裂纹扩展过程, 与 Bittencourt 等 (1996)^[22] 给出的实验结果吻合较好 (如图 8 所示)。

对上述算例的进一步分析还表明, 本文方法与 EFG 法在求解裂纹扩展时的精度基本上是一致的, 其计算时间略少于 EFG 法, 大约是 EFG 法的 3/4。

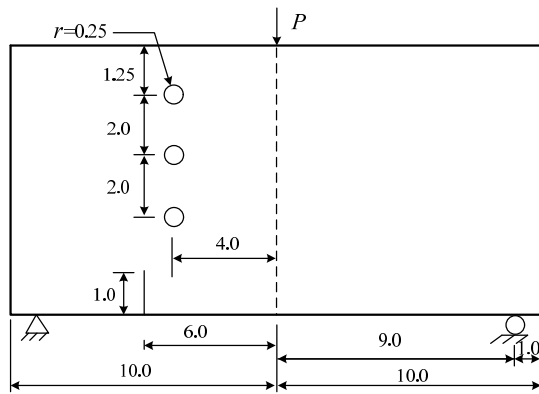


图6 存在三个小圆孔的三点弯曲梁试件

Fig.6 Curved crack in an infinite plate

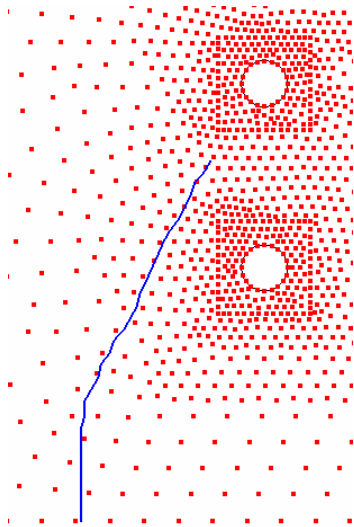


图7 裂纹扩展过程中的某一状态

Fig.7 One stage of the crack growth

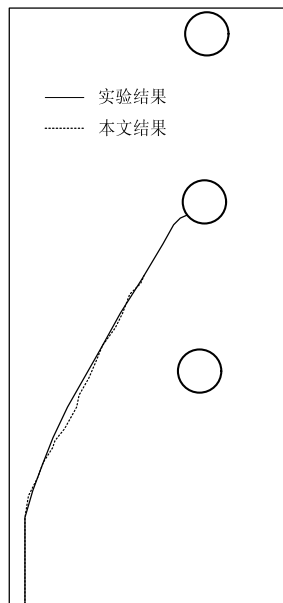


图8 扩展路径与实验结果的对比

Fig.8 Comparison of crack growth path between MSLS solution and experiment results

5 结论

采用了一种新提出的无网格 MSLS 方法来进行裂纹扩展过程的分析研究,该方法克服了以往 EFG 类无网格方法计算过程复杂、难以施加边界条件等缺点,适合于裂纹问题的分析求解。算例表明,本文方法可以较好模拟裂纹的断裂过程,具有广阔的应用前景。

但由于 MSLS 方法是一种新提出的无网格方法,在数值应用上还处于初始阶段,在其可靠性、收敛性等方面也还有待理论上的进一步研究和验证。

参考文献:

- [1] 张雄, 刘岩. 无网格方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
Zhang Xiong, Liu Yan. Meshless method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [2] 陆新征, 江见鲸. 利用无网格方法分析钢筋混凝土梁开裂问题[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 24—28.
Lu Xinzheng, Jiang Jianjin. Analysis of cracking of RC beams using meshless method [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(2): 24—28. (in Chinese)
- [3] 袁振, 李子然, 吴长春. 无网格法模拟复合型疲劳裂纹的扩展[J]. 工程力学, 2002, 19(1): 25—28.
Yuan Zhen, Li Ziran, Wu Changchun. Simulation of mixed mode fatigue crack growth by EFG method [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(1): 25—28. (in Chinese)
- [4] Marc D, Huang N D. A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 59: 1945—1961.
- [5] 李树忱, 程玉民, 李术才. 动态断裂力学的无网格流形方法[J]. 物理学报, 2006, 55(9): 4760—4766.
Li Shuchen, Cheng Yumin, Li Shucan. Meshless manifold method for dynamic fracture mechanic [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(9): 4760—4766. (in Chinese)
- [6] Gingold R A, Moraghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars [J]. Monthly Notice of the Royal Astronomical Society, 1977, 18: 375—389.
- [7] Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50: 937—951.
- [8] 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 508—517.
Long Shuyao. A local Petrov-Galerkin method for the elasticity problem [J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(4): 508—517. (in Chinese)

- [9] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D. Meshless methods: An overview and recent developments [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 3—47.
- [10] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229—256.
- [11] Gu Y T, Wang Q X, Lam K Y. A meshless local Kriging method for large deformation analyses [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196: 1673—1684.
- [12] Fernandez-Mendez S, Huerta A. Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 1257—1275.
- [13] Belytschko T, Organ D, Krongauz Ya. A Coupled finite element-element free Galerkin method [J]. *Computational Mechanics*, 1995, 17: 186—195.
- [14] Cai Yongchang., Zhu Hehua. A local meshless Shepard and least square interpolation method based on local weak form [J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, 2008, 34(2): 179—204.
- [15] Oden J T, Durate C A, Zienkiewicz O C. A new cloud-based hp finite element method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 153: 117—126.
- [16] Rajendran S, Zhang B R. A 'FE-meshfree' QUAD4 element based on partition of unity [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 197: 128—147.
- [17] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods [J]. *Mathematics of Computation*, 1981, 37: 141—158.
- [18] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, Taylor R L. A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39: 3839—3866.
- [19] 杨晓翔, 范家齐, 匡震邦. 求解混合型裂纹强度因子的围线积分法[J]. *计算结构力学及其应用*, 1996, 13(1): 84—89.
Yang Xiaoxiang, Fan Jiaqi, Kuang Zhenbang. A contour integral method for stress intensity factor of mixed-mode crack [J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1996, 13(1): 84—89. (in Chinese)
- [20] Gdoutos E. *Fracture mechanics* [M]. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1979.
- [21] Lim I L, Johnston I W, Choi S K. A numerical model for simulation of fracture propagation in rock [C]. *Proceeding of the Computer Methods Applied in Rock Mechanics and Engineering*. Xi'an: Shanxi Science and Technology Press, 1993: 397—404.
- [22] Bittencourt T N, Wawrzynek P A, Ingraffea A R, Sousa J L. Quasiautomatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 55: 321—334.

(上接第9页)

- [10] Sawa T, Liu J, Nakano K. A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads [J]. *J Adhes Sci Technol*, 2000, 14(1): 43—66.
- [11] 赵波. 刚度非平衡胶接接头的二维应力分析[J]. *工程力学*, 2008, 25(12): 6—13.
Zhao Bo. A two-dimensional solution for unsymmetric single-lap adhesive bonded joints [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(12): 6—13. (in Chinese)
- [12] 赵波. 胶接单搭接头应力的二维线性和一维非线性解析分析[D]. 北京: 清华大学, 2009.
Zhao Bo. 2D linear and 1D nonlinear analytical stress solutions of adhesive-bonded single-lap joints [D]. Beijing: Tsinghua University, 2009. (in Chinese)
- [13] Zhao Bo, Lu Zhenhua. A two-dimensional approach of single-lap adhesive bonded joints [J]. *Mech Adv Mater Struc*, 2009, 16(2): 130—159.
- [14] Luo Q, Tong L. Linear and higher order displacement theories for adhesively bonded lap joints [J]. *Int J Solids Struct*, 2004, 41(22-23): 6351—6381.