

文章编号: 1000-4750(2010)11-0196-08

增强相周期分布的多涂层纤维复合材料 反平面问题的解析方法

*徐耀玲¹, 肖俊华¹, 沈艳芝²

(1. 燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004; 2. 燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004)

摘 要: 采用增强纤维周期分布模型, 通过引入非均匀的本征应变并结合双准周期 Riemann 边值问题理论, 将非均匀介质问题转化为均匀介质的周期本征应变问题, 获得了反平面载荷作用下多涂层纤维复合材料纤维、各涂层和基体中弹性场的解析解答。与有限元、广义自洽和渐进均匀化等方法的比较显示了该文方法的精度。讨论了涂层厚度和刚度等材料微结构参数对界面应力集中系数和有效反平面剪切模量的影响。该文为研究多涂层复合材料界面效应提供了一个有效的分析工具。

关键词: 多涂层; 双周期模型; 应力集中; 有效模量; 反平面剪切

中图分类号: TB301; TB33 **文献标识码:** A

AN ANALYTICAL METHOD FOR MULTIPLY COATED FIBER COMPOSITES WITH PERIODIC REINFORCEMENT PHASE UNDER ANTIPLANE SHEAR

*XU Yao-ling¹, XIAO Jun-hua¹, SHEN Yan-zhi²

(1. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

2. College of Mechanics Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: A composite model with periodic distributed reinforcement is adopted to study the elastic behaviour of multiply coated fiber composites under antiplane shear forces. Referring to the concept of eigenstrain and using the theory for doubly quasi-periodic Riemann boundary value problems, the problem of periodic distributed inclusions is transformed into that of homogeneous materials with periodic distributed eigenstrains. The elastic fields in the fibers, coatings and matrix are obtained in series form. Several comparisons with the finite element method, generalized self-consistent method and asymptotic homogenization method are made to demonstrate the accuracy of the present method. The influences of the thickness and stiffness of coatings on interfacial stress concentration and effective longitudinal shear modulus are discussed. The present method provides an efficient tool for interfacial effect analysis of multiply coated fiber composites.

Key words: multiple coatings; doubly periodic model; stress concentration; effective modulus; antiplane shear

实际的复合材料系统, 由于化学反应或人为界面设计(例如利用多层涂层实现增强相表面改性, 以达到提高增强相与基体之间润湿性及调节界面残

余应力等目的), 在增强相和基体之间存在着一层或多层性质不同于增强相和基体的界面层。界面层在纤维和基体间传递载荷, 是决定复合材料整体强度

收稿日期: 2009-04-29; 修改日期: 2009-07-20

作者简介: *徐耀玲(1968—), 男, 黑龙江人, 教授, 博士, 从事复合材料力学研究(E-mail: xylisu@sina.com);

肖俊华(1981—), 男, 河南人, 讲师, 博士, 从事非均匀材料力学研究(E-mail: xiaojunhua@yahoo.cn);

沈艳芝(1968—), 女, 黑龙江人, 讲师, 硕士, 从事精密测量和结构计算研究(E-mail: syzysu@163.com).

和刚度的一个关键因素。长期以来,学者们对界面问题进行了大量研究。以往研究多采用单夹杂模型^[1-3]或增强相周期分布的单界面层模型^[4-5]。对于增强相周期分布的多界面层复合材料问题,研究非常有限。

本文采用增强相周期分布模型,研究具有任意多层界面的纤维复合材料在远场反平面载荷作用下的弹性响应。通过引入本征应变将非均匀介质均匀化,利用各相材料在连接处的位移协调条件和应力连续条件将问题归结为双准周期 Riemann 边值问题,进而获得了纤维、各层界面和基体内弹性场的解析解答。讨论了界面层厚度和刚度等微结构参数对界面应力集中系数和有效反平面剪切模量的影响。本文方法既能准确反映双周期夹杂间的相互作用,又能用于研究多界面层。

1 问题描述

基本胞元如图 1 所示,其内部包含一个具有 N 层界面的纤维,纤维、界面层和基体均为纯弹性材料且它们之间完好连接。 G_f 、 G_j ($j=1,2,\dots,N$) 和 G_m 分别为纤维、第 j 层界面和基体的剪切模量。整个无限平面由基本胞元周期复制而成,如图 2 所示。远场均匀反平面剪应力 τ_{13}^∞ 、 τ_{23}^∞ (图 2 中没有画出),求纤维、各界面层和基体中的弹性场。

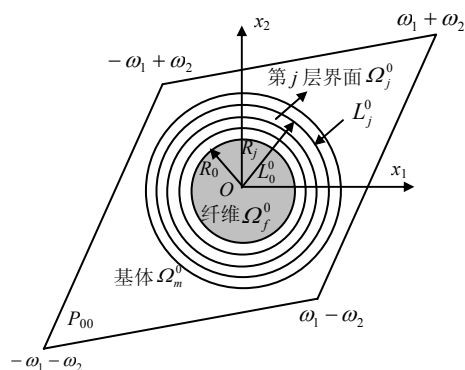


图 1 基本胞元 P_{00} 与界面
Fig.1 Unit cell P_{00} and interface

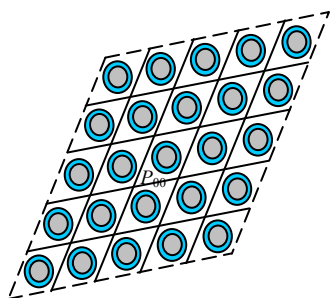


图 2 复合材料横截面
Fig.2 The cross section of composites

基本胞元中, L_j^0 ($j=0,1,2,\dots,N$) 表示各圆周线, R_j ($j=0,1,2,\dots,N$) 为各圆周线半径。 Ω_f^0 、 Ω_j^0 、 Ω_m^0 分别为纤维、第 j ($j=1,2,\dots,N$) 界面层、基体占据的区域。纤维边界为 L_0^0 , 半径 R_0 。第 j 界面层内外边界分别为 L_{j-1}^0 、 L_j^0 , 内外半径分别为 R_{j-1} 、 R_j 。无限平面上,用 L_j 表示 L_j^0 的合曲线; Ω_f 、 Ω_j 、 Ω_m 表示 Ω_f^0 、 Ω_j^0 、 Ω_m^0 的合区域。纤维分布的两个基本周期分别用 $2\omega_1$ 和 $2\omega_2$ 表示,则胞元 4 个顶点分别为 $\omega_1 + \omega_2$ 、 $-\omega_1 + \omega_2$ 、 $-\omega_1 - \omega_2$ 和 $\omega_1 - \omega_2$ ^[6]。

2 分析与求解

反平面问题可用一个解析函数 $U(z)$ 描述。以 $\tau = \tau_{13} - i\tau_{23}$ 表示反平面剪切问题的复应力, $\gamma = \gamma_{13} - i\gamma_{23}$ 为复应变。反平面位移 w 、应力 τ 及介质中任意弧段 AB 上的合力 T 表示为^[7]:

$$w = [U(z) + \overline{U(z)}] / 2 \quad (1)$$

$$\tau = G\gamma = GU'(z) \quad (2)$$

$$T = -\int_A^B (\tau_{23} dx_1 - \tau_{13} dx_2) = Gi[\overline{U(z)} - U(z)]_A^B / 2 \quad (3)$$

式中: $z = x_1 + ix_2$ 为复变量; “ $\overline{\quad}$ ” 表示共轭; 上标撇号表示求导。

2.1 均匀化

借鉴 Eshelby 等效夹杂原理^[8],通过引入非均匀本征应变,将双周期非均匀介质问题化为均匀介质的双周期非均匀本征应变问题。考虑一个与基体性质相同的无限大介质,无穷远均匀反平面应力 $\tau^\infty = \tau_{13}^\infty - i\tau_{23}^\infty$ 。此时介质内的初始应力和应变分别为 $\tau^0 = \tau^\infty$ 、 $\gamma^0 = \tau^\infty / G_m$ 。设想在该介质中出现双周期纤维和 N 层界面以取代原有的基体,则初始弹性场将受到扰动,纤维、界面层和基体内扰动应力、应变分别用 τ'_f 、 γ'_f , τ'_j 、 γ'_j , τ'_m 、 γ'_m 表示。各区域内最后的应力、应变分别为初始应力、应变和扰动应力、应变之和。各区域本构关系为:

$$\tau^0 + \tau'_f = G_f(\gamma^0 + \gamma'_f), \quad \Omega_f \text{ 内} \quad (4)$$

$$\tau^0 + \tau'_j = G_j(\gamma^0 + \gamma'_j), \quad \Omega_j (j=1,2,\dots,N) \text{ 内} \quad (5)$$

$$\tau^0 + \tau'_m = G_m(\gamma^0 + \gamma'_m), \quad \Omega_m \text{ 内} \quad (6)$$

再考虑一个与上述问题等效的问题。仍从上述与基体性质相同、远场受均匀应力 τ^∞ 的无穷大介质出发。介质内初始应力和应变仍为 $\tau^0 = \tau^\infty$ 、 $\gamma^0 = \tau^\infty / G_m$ 。设想在与双周期纤维和 N 层界面对

应区域内的介质发生了非均匀本征应变 γ_f^* 和 γ_j^* 。本征应变与应力场无关,但由于周围介质的约束作用,其将引起弹性场扰动。设此扰动场在 Ω_f 、 Ω_j 、 Ω_m 中分别为 τ_f'' 、 γ_f'' 、 τ_j'' 、 γ_j'' 、 τ_m'' 、 γ_m'' 。则在 Ω_f 、 Ω_j 、 Ω_m 内总的应力为初始应力与扰动应力之和,应变为初始应变、本征应变和扰动应变之和。本征应变为无应力-应变,则各区域内本构关系分别为:

$$\tau^0 + \tau_f'' = G_m(\gamma^0 + \gamma_f^* + \gamma_f'' - \gamma_f^*) = G_m(\gamma^0 + \gamma_f''), \quad \Omega_f \text{ 内} \quad (7)$$

$$\tau^0 + \tau_j'' = G_m(\gamma^0 + \gamma_j^* + \gamma_j'' - \gamma_j^*) = G_m(\gamma^0 + \gamma_j''), \quad \Omega_j (j=1,2,\dots,N) \text{ 内} \quad (8)$$

$$\tau^0 + \tau_m'' = G_m(\gamma^0 + \gamma_m''), \quad \Omega_m \text{ 内} \quad (9)$$

考虑上述两个问题的等效。令两个问题对应区域内的应变相等,即令 $\gamma_f^* + \gamma_f'' = \gamma_f'$ 、 $\gamma_j^* + \gamma_j'' = \gamma_j'$ 、 $\gamma_m'' = \gamma_m'$ 。由式(6)、式(9),两个问题在域 Ω_m 内应力亦相等。若再令两问题在域 Ω_f 、 Ω_j 内应力相等,则这两个问题完全等价。由式(4)、式(7)和式(5)、式(8),应力相等条件可写为:

$$(G_f - G_m)(\gamma^0 + \gamma_f'') + G_f \gamma_f^* = 0, \quad \Omega_f \text{ 内} \quad (10)$$

$$(G_j - G_m)(\gamma^0 + \gamma_j'') + G_j \gamma_j^* = 0, \quad \Omega_j (j=1,2,\dots,N) \text{ 内} \quad (11)$$

式(10)一式(11)中包含本征应变与由其引起的扰动应变。为了求解问题,还须研究本征应变所引起的扰动弹性场。

2.2 本征应变 γ_f^* 、 γ_j^* 引起的扰动弹性场

用 $w''(z)$ 和 $U''(z)$ 表示由本征应变 γ_f^* 、 γ_j^* 引起的扰动弹性场的位移和复势。由于本征应变是双周期的,其引起的应力、应变是双周期的,而位移是双准周期的,因此 $w''(z)$ 和 $U''(z)$ 均为双准周期函数。

用 $U_f^*(z)$ 描述纤维内本征应变 γ_f^* ,略去常数项,将其在基本胞元 P_{00} 域 Ω_f^0 内展成泰勒级数:

$$U_f^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^f z^k, \quad z \in \Omega_f^0 \quad (12)$$

由式(2),域 Ω_f^0 内本征应变可表示为:

$$\gamma_f^* = \frac{dU_f^*(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k^f z^{k-1}, \quad z \in \Omega_f^0 \quad (13)$$

由式(1)得纤维边界 L_0^0 上的本征位移:

$$w_f^*(t) = \frac{1}{2} [U_f^*(z) + \overline{U_f^*(z)}]_{z=t \in L_0^0} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^f t^k + R_0^{2k} \overline{A_k^f} \frac{1}{t^k} \right) \quad t \in L_0^0 \quad (14)$$

用复势 $U_j^*(z)$ 描述第 j 界面层内本征应变 γ_j^* ,略去常数项,将其在基本胞元 P_{00} 中域 Ω_j^0 上展成罗朗级数:

$$U_j^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(j)} z^k + A_{-k}^{(j)} z^{-k}), \quad z \in \Omega_j^0 \quad (15)$$

本征应变为:

$$\gamma_j^* = \frac{dU_j^*(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} k (A_k^{(j)} z^{k-1} - A_{-k}^{(j)} z^{-(k+1)}), \quad z \in \Omega_j^0 \quad (16)$$

第 j 界面层内外边界 L_{j-1}^0 和 L_j^0 上的本征位移分别为:

$$w_{j,1}^*(t) = \frac{1}{2} [U_j^*(z) + \overline{U_j^*(z)}]_{z=t \in L_{j-1}^0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(j)} + \frac{1}{R_{j-1}^{2k}} \overline{A_{-k}^{(j)}} \right) t^k + (R_{j-1}^{2k} \overline{A_k^{(j)}} + A_{-k}^{(j)}) \frac{1}{t^k} \right], \quad t \in L_{j-1}^0 \quad (17)$$

$$w_{j,2}^*(t) = \frac{1}{2} [U_j^*(z) + \overline{U_j^*(z)}]_{z=t \in L_j^0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(j)} + \frac{1}{R_j^{2k}} \overline{A_{-k}^{(j)}} \right) t^k + (R_j^{2k} \overline{A_k^{(j)}} + A_{-k}^{(j)}) \frac{1}{t^k} \right], \quad t \in L_j^0 \quad (18)$$

本征应变区域内的介质之间及其与周围基体之间的约束作用将在各区域产生扰动弹性场。各区域接触面上有如下的位移协调条件:

$$[w''(t)]^+ - [w''(t)]^- = \begin{cases} w_{1,1}^*(t) - w_f^*(t), & t \in L_0 \\ w_{j+1,1}^*(t) - w_{j,2}^*(t), & t \in L_j (j=1,2,\dots,N-1) \\ -w_{N,2}^*(t), & t \in L_N \end{cases} \quad (19)$$

式中上标“+”、“-”代表函数从内外两侧趋向曲线。尽管 $w_f^*(t)$ 、 $w_{j,1}^*(t)$ 、 $w_{j,2}^*(t)$ 定义在 L_j^0 上,这里将其定义拓展到 L_j 上并理解为双周期函数。

利用式(1)和式(19)得:

$$([U''(t)]^+ + \overline{[U''(t)]^+}) - ([U''(t)]^- + \overline{[U''(t)]^-}) = \begin{cases} 2[w_{1,1}^*(t) - w_f^*(t)], & t \in L_0 \\ 2[w_{j+1,1}^*(t) - w_{j,2}^*(t)], & t \in L_j (j=1,2,\dots,N-1) \\ -2w_{N,2}^*(t), & t \in L_N \end{cases} \quad (20)$$

L_j 上应力连续条件为:

$$T^+(t) = T^-(t), \quad t \in L_j (j=0,1,2,\dots,N) \quad (21)$$

利用式(3), 该条件可写为:

$$([U''(t)]^+ - [U''(t)]^-) = ([U''(t)]^- - [U''(t)]^-), \quad t \in L_j \quad (22)$$

由式(20)和式(22)可得:

$$[U''(t)]^+ - [U''(t)]^- = \begin{cases} w_{1,1}^*(t) - w_f^*(t), & t \in L_0 \\ w_{j+1,1}^*(t) - w_{j,2}^*(t), & t \in L_j (j=1,2,\dots,N-1) \\ -w_{N,2}^*(t), & t \in L_N \end{cases} \quad (23)$$

式(23)为定义在曲线 $L_j (j=0,1,2,\dots,N)$ 上的双准周期 Riemann 边值问题, 略去常数项, 在 P_{00} 中的解为^[9]:

$$U''(z) = Cz + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^0} [w_{1,1}^*(t) - w_f^*(t)] \zeta(t-z) dt + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{L_j^0} [w_{j+1,1}^*(t) - w_{j,2}^*(t)] \zeta(t-z) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_N^0} [-w_{N,2}^*(t)] \zeta(t-z) dt \quad (24)$$

式中: $\zeta(\cdot)$ 为 Weierstrass Zeta 函数; C 为待求常数。

将式(14)、式(17)和式(18)代入式(24)并计算其中的积分得本征应变 γ_f^* 、 γ_j^* 引起的扰动场的复势 $U''(z)$, 它是一个定义在区域 Ω_f^0 、 $\Omega_j^0 (j=1,2,\dots,N)$ 、 Ω_m^0 上的分区全纯函数, 其表达式中包含待常数 C 、系数 A_k^f 、系数 $A_k^{(j)}$ 、系数 $A_{-k}^{(j)}$ 。对于所讨论的双周期本征应变问题, 由于远场没有力作用, 同时根据问题的周期性, 可知基本胞元边界上的合力为零。由此条件并利用式(3), 可将 C 用系数 A_k^f 、系数 $A_k^{(j)}$ 、系数 $A_{-k}^{(j)}$ 表示, $U''(z)$ 的表达式见附录。系数 A_k^f 、系数 $A_k^{(j)}$ 、系数 $A_{-k}^{(j)}$ 利用等价条件式(10)和式(11)通过比较 z 的同次幂系数确定, 本文利用带有符号运算功能的软件 Mathematica 编程完成。完全确定复势 $U''(z)$ 后, 将其对 z 求一阶导, 就可得本征应变引起的扰动应变, 最后由式(4)一式(6)或式(7)一式(9)即得纤维、各界面层和基体中级数形式的应力场。结果精度取决于式(12)和式(15)级数项项数, 计算表明, 系数 A_k^f 、系数 $A_k^{(j)}$ 、系数 $A_{-k}^{(j)}$ 均取 30 项可以满足精度要求。

3 界面应力集中系数与有效反平面剪切模量

纤维方形(胞元边长 $2a$)和正六角形排列(胞元

边长 a)如图 3 所示。对方形排列, 远场施加均匀反平面剪应力 $\tau_{13}^\infty = q_0$ 时, x_1 轴上各相连接处的界面应力 τ_{13} 与远场应力 q_0 的比值 τ_{13}/q_0 称为界面应力集中系数^[10]。采用平均场理论计算有效反平面剪切模量。根据平均场理论, 远场施加均匀应力 σ^0 时, 复合材料的有效柔度张量 D_{eff} 的预测公式为^[11]:

$$(D_m - D_{eff}): \sigma^0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (D_m - D_i): \bar{\sigma}^i \quad (25)$$

式中: D_m 为基体柔度张量; D_i 、 λ_i 、 $\bar{\sigma}^i$ 分别为第 i 相夹杂柔度张量、体积分数和平均应力。对有效柔度矩阵求逆可得有效刚度矩阵 $C_{eff} = D_{eff}^{-1}$ 。

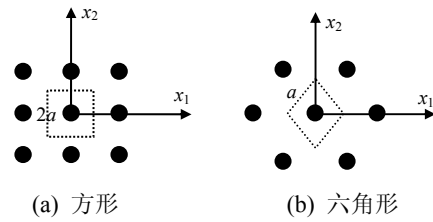


图 3 纤维排列方式

Fig.3 Fiber arrays

3.1 方法验证

硼纤维/环氧树脂复合材料, 单涂层如图 4(b)所示。纤维和基体剪切模量为 $G_f = 172.37 \text{ GPa}$ 和 $G_m = 1.5322 \text{ GPa}$ ^[7], 涂层剪切模量 $G_c = 50G_m$ 。纤维体积分数 $\lambda_f = 0.4$, 涂层体积分数用 λ_c 表示。

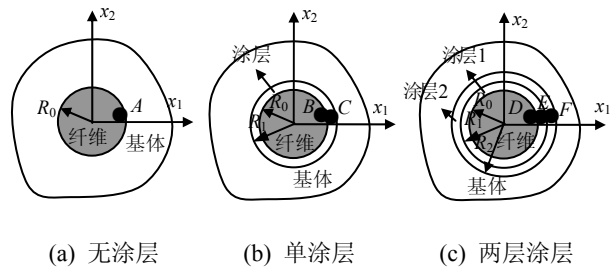


图 4 纤维与基体间的涂层

Fig.4 Coatings between fibers and matrix

表 1 和表 2 给出了本文结果与有限元法(FEM)、广义自洽法(GSCM)结果的比较。有限元法取单个胞元为计算对象, 在边界上施加周期边界条件^[12], 用有限元软件 Ansys10.0 计算。广义自洽法可参考文献[7]。由结果可见, 有限元法的结果与本文结果非常一致。对有效反平面剪切模量, 广义自洽法预测的结果与本文正六角形排列的结果非常接近, 这与无涂层时的情况相同^[13]。

表 1 界面应力集中系数

Table 1 Stress concentration factor on interface

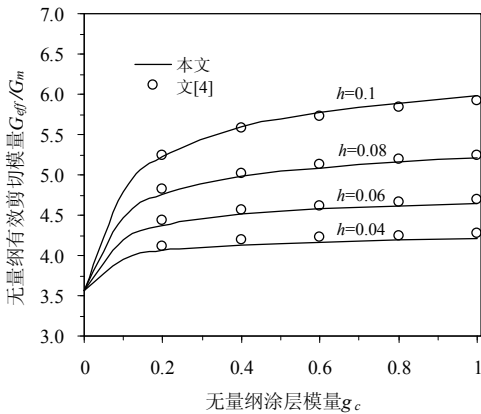
λ_c	B 点		C 点	
	本文	FEM	本文	FEM
0.05	1.71616	1.7132	1.68527	1.6820
0.1	1.75996	1.7579	1.72214	1.7190
0.2	1.85100	1.8476	1.88455	1.8777

表 2 有效反平面剪切模量 /GPa

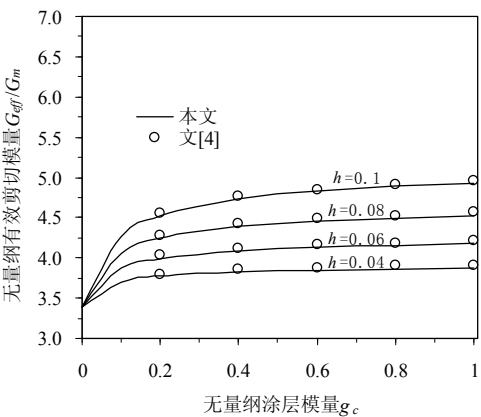
Table 2 Effective longitudinal shear modulus

λ_c	方形		六角形		GSCM
	本文	FEM	本文	FEM	
0.05	4.00568	4.00565	3.95485	3.95484	3.95226
0.1	4.58048	4.58045	4.47726	4.47724	4.47081
0.2	6.31540	6.31525	5.90413	5.90396	5.86905

仍取单涂层, $G_f/G_m=20$, 纤维体积分数 $\lambda_f=0.6$, 涂层无量纲厚度 $h=(R_1-R_0)/R_0$, 涂层无量纲模量 $g_c=(G_c-G_m)/(G_f-G_m)$ 。本文无量纲有效剪切模量 G_{eff}/G_m 的结果与文[4]均匀化方法结果的比较见图 5, 可见均匀化方法的结果与本文结果符合很好。



(a) 方形



(b) 六角形

图 5 有效模量的结果与对比

Fig.5 Results and comparisons of effective modulus

3.2 界面应力集中系数

两层涂层如图 4(c)所示, 无量纲涂层厚度为 $\delta_1=(R_1-R_0)/a$ 和 $\delta_2=(R_2-R_1)/a$ 。纤维和基体剪切模量为 $G_f=172.37\text{GPa}$ 和 $G_m=1.5322\text{GPa}$ 。涂层 1 和涂层 2 的剪切模量分别为 $G_1=70G_m$ 、 $G_2=30G_m$, $\delta_1=\delta_2=0.01$ 。

图 6 给出了 D、E、F 三点界面应力集中系数随纤维无量纲半径 R_0/a 的变化, 为了与无涂层时比较, 图中也给出了无涂层(见图 4(a))时 A 点的界面应力集中系数。由图 6 可见, 当纤维半径较小时(纤维体积分数较低), D、E、F 三点的应力集中系数相差较大, 随着纤维半径的增加差别逐渐减小。当纤维半径较大时, 各点应力集中系数已非常接近。对比无涂层与有涂层的结果可见, 涂层的存在导致胞元内应力的重新分布, 其影响是不容忽视的。

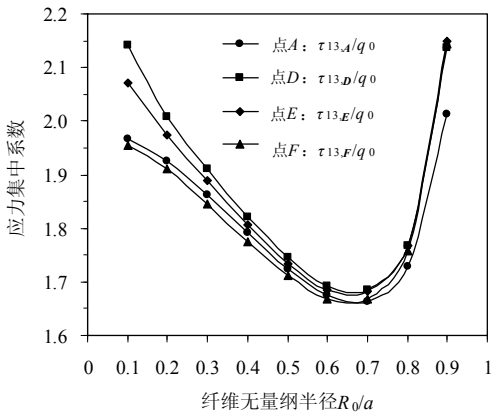


图 6 应力集中系数随纤维无量纲半径 R_0/a 的变化

Fig.6 Variations of the stress concentration factor with the dimensionless fiber radius R_0/a

考察涂层厚度对界面应力集中系数的影响。取 $R_0/a=0.3$, 图 7 给出了应力集中系数随涂层无量纲厚度 δ_1 、 δ_2 的变化。可见两层涂层厚度的变化对涂层间界面(E 点)的应力影响很大。固定涂层 2 厚度、增加涂层 1 厚度时, 该点应力随涂层 1 厚度的增加而减小。固定涂层 1 厚度、增加涂层 2 厚度时, 该点应力随涂层 2 厚度的增加而增大。对纤维与涂层 1、涂层 2 与基体界面 D、F 两点, 各层涂层厚度改变只影响应力数值的大小而不影响变化趋势。

考察涂层刚度对应力集中系数的影响。取 $R_0/a=0.3$, $\delta_1=\delta_2=0.02$, 图 8 给出了应力集中系数随涂层刚度的变化。图 8(a)为固定涂层 2 刚度、改变涂层 1 刚度的情况。随着涂层 1 刚度的增加 D 点的应力先增加而后降低, E、F 两点的应力单调增大且当涂层 1 刚度增加到一定值后趋于稳定。图

8(b)为固定涂层 1 刚度、改变涂层 2 刚度的情况。随着涂层 2 刚度的增加 D 、 E 两点的应力先增加而后降低, F 点的应力单调增大且当涂层 2 刚度增加到一定值后趋于稳定。上述结果表明, 当某层涂层刚度很小时, 涂层传递应力的能力较弱, 该涂层内侧材料应力水平较低。当涂层刚度很大时, 涂层传递应变的能力较弱, 该涂层内侧材料受到“屏蔽”, 应力水平也较低。

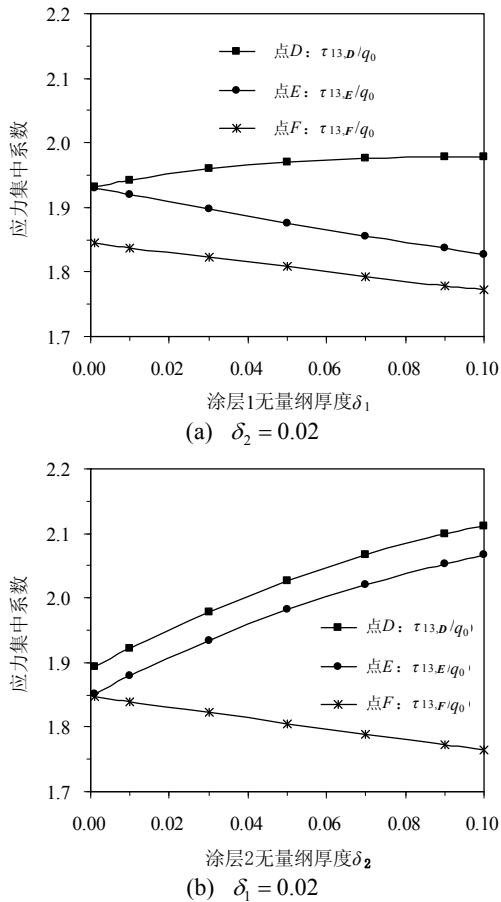


图 7 应力集中系数随无量纲涂层厚度的变化
Fig.7 Variations of the stress concentration factor with the dimensionless coating thickness

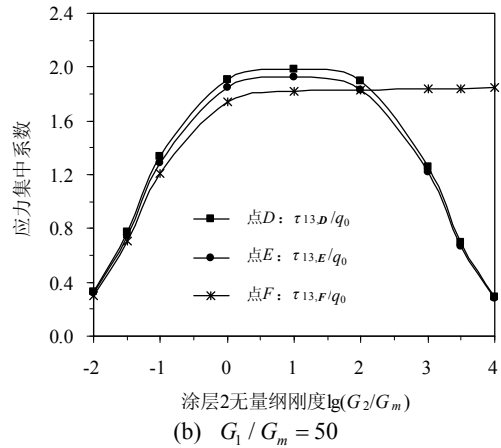
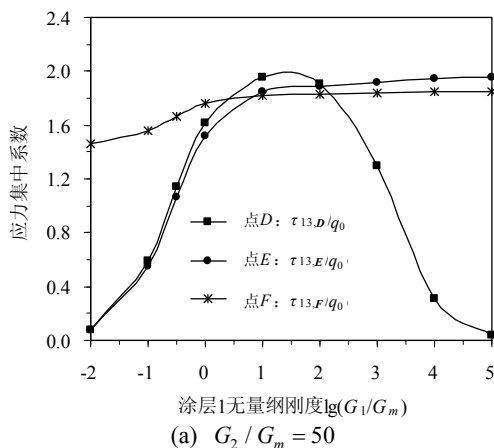


图 8 应力集中系数随涂层刚度的变化

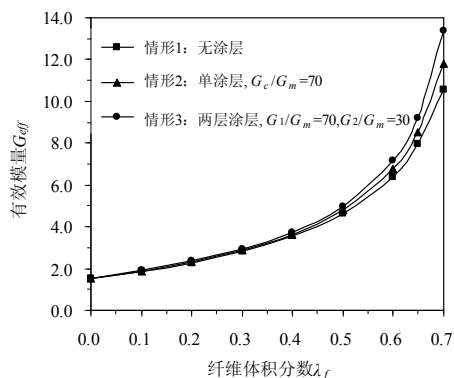
Fig.8 Variations of the stress concentration factor with the coating stiffness

3.3 有效反平面剪切模量

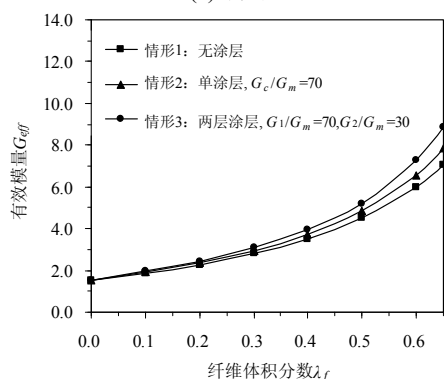
纤维和基体的剪切模量分别为 $G_f = 172.37$ GPa 和 $G_m = 1.5322$ GPa。考虑 3 种情形: 情形 1 为无涂层; 情形 2 为单涂层, 取 $G_c/G_m = 70$, $\delta_1 = 0.01$; 情形 3 为两层涂层, 取 $G_1/G_m = 70$, $G_2/G_m = 30$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ 。

图 9 给出了上述 3 种情况有效模量随纤维体积分数 λ_f 的变化。由结果可见, 当纤维体积分数较小时, 涂层对模量的影响不明显。随着纤维体积分数的增加, 涂层的影响逐步增强。本例两层涂层均比基体刚硬, 有涂层时的有效模量比无涂层时大。进一步计算表明, 两层涂层刚度的不同取值(每层都比基体柔软或一层比基体刚硬、一层比基体柔软)都可导致有效模量比无涂层时降低。

两层涂层, 取 $\lambda_f = 0.6$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$, $G_m = 1.5322$ GPa。为考察涂层 2 内侧的涂层 1 和纤维的刚度对有效模量的影响, 考虑 3 种情况, 情形 1: $G_f = 172.37$ GPa, $G_1 = 70G_m$; 情形 2: $G_f = 172.37$ GPa, $G_1 = 0.1G_m$ (涂层 1 刚度远小于情形 1); 情形 3: $G_f = 1723.7$ GPa (纤维刚度为情形 1 的 10 倍), $G_1 = 70G_m$ 。图 10 给出了这 3 种情况有效模量随涂层 2 刚度的变化。由结果可见, 当涂层 2 刚度在某一范围内时, 纤维和涂层 1 的刚度对复合材料整体有效模量的影响很明显。当涂层 2 刚度非常大或非常小时, 无论该涂层内侧的纤维和涂层 1 刚度取何值, 材料的有效模量趋于相同。这表明纤维和各层涂层对有效模量的影响依赖于单个涂层的性质, 某一过软或过硬的涂层会限制该涂层内侧的纤维和涂层对整体刚度的贡献。



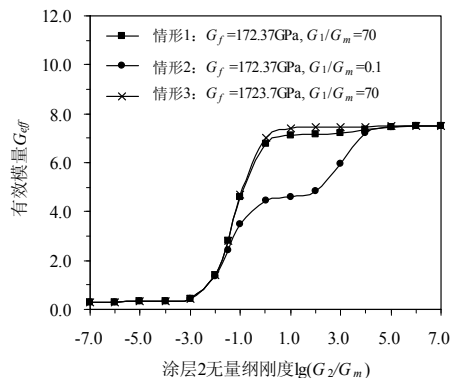
(a) 方形



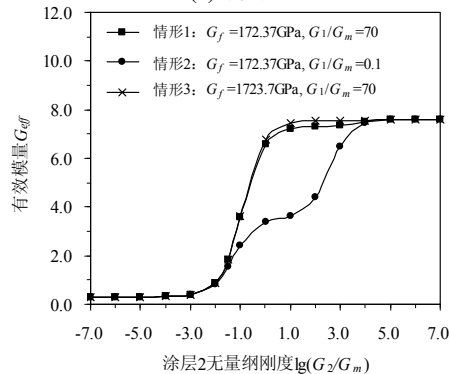
(b) 六角形

图9 有效模量随纤维体积分数的变化

Fig.9 Variations of the effective modulus with the fiber volume fraction



(a) 方形



(b) 六角形

图10 有效模量随涂层2刚度的变化

Fig.10 Variations of the effective modulus with the stiffness of coating 2

4 结论

本文为含任意多层涂层圆截面纤维复合材料反平面问题发展了一个严格的分析方法。与有限元、广义自洽和均匀化等方法的比较显示了本文方法的精度。算例讨论了多涂层的刚度、厚度等涂层微结构参数对复合材料界面应力集中系数和有效反平面剪切模量的影响。

渐进均匀化法被认为是基于数学的方法，有限元法需要在胞元边界上施加复杂的周期性边界条件，且在研究涂层尤其是多涂层问题时，由于涂层一般为一薄层，因而需要很密的网格划分，计算量大。本文发展的方法概念清楚，结果准确且计算效率高，可方便计算多涂层纤维的任意双周期排列(基本胞元为任意平行四边形)，对不同形状的胞元计算量没有明显差别，便于研究多涂层材料的性质随微结构参数变化的规律。

参考文献:

- [1] Herve E, Zaoui A. Elastic behaviour of multiply coated fibre reinforced composites [J]. International Journal of Engineering Science, 1995, 33(10): 1419—1433.
- [2] 荀飞, 胡更开, 黄筑平. 连续变化界面层对复合材料弹性性能的影响[J]. 复合材料学报, 2004, 21(1): 134—140.
Xun Fei, Hu Gengkai, Huang Zhuping. Effect of gradual interphase on elastic properties of composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2004, 21(1): 134—140. (in Chinese)
- [3] 戴兰宏, 黄筑平, 王仁. N-层涂层夹杂体复合材料有效模量显式表达[J]. 高分子材料科学与工程, 2000, 16(3): 17—19.
Dai Lanhong, Huang Zhuping, Wang Ren. Explicit expression of the effective moduli of N-layered inclusion based composites [J]. Polymer Materials Science and Engineering, 2000, 16(3): 17—19. (in Chinese)
- [4] Andrianov I V, Danishevs'kyy V V, Kalamkarov A L. Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings [J]. Composites: Part B, 2008, 39: 874—881.
- [5] 肖俊华. 双周期涂层纤维增强复合材料反平面剪切问题[J]. 复合材料学报, 2008, 25(3): 168—173.
Xiao Junhua. Problem of doubly periodic coated fiber reinforce composites under antiplane shear [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(3): 168—173. (in Chinese)
- [6] 李星. 双周期裂纹场平面弹性焊接的数学问题[J]. 应用数学与力学, 1993, 14(12): 1085—1092.
Li Xing. On the mathematical problems of composite

- materials with a doubly periodic set of cracks [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, 14(12): 1085—1092. (in Chinese)
- [7] Jiang C P, Cheung Y K. A fiber/matrix/composite model with a combined confocal elliptical cylinder unit cell for predicting the effective longitudinal shear modulus [J]. International Journal of Solids and Structure, 1998, 35(30): 3977—3987.
- [8] Eshelby J D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion [J]. Proceedings of the Royal Society London A, 1959, 252: 561—569.
- [9] Lu J K. Boundary value problems for analytic function [M]. Singapore: World Scientific, 1993.
- [10] Chen C H. Fiber-reinforced composites under longitudinal shearing [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1970, 37: 198—201.
- [11] Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials [M]. Amsterdam: Elsevier, 1999.
- [12] Xia Z H, Zhang Y F, Ellyin F A. A unified periodical boundary condition for representative volume element of composite and applications [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(8): 1907—1721.
- [13] 徐耀玲. 含双周期夹杂复合材料细观力学研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2003.
- Xu Yaoling. Study on micromechanics of composite materials with doubly-periodic inclusions [D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003. (in Chinese)

附录:

$$U''(z) = \begin{cases} Cz + U_{f,\text{in}}(z) + \sum_{i=1}^N [U_{i,\text{in}}^1(z) + U_{i,\text{in}}^2(z)], & z \in \Omega_f^0 \\ Cz + U_{f,\text{out}}(z) + \sum_{i=1}^{j-1} [U_{i,\text{out}}^1(z) + U_{i,\text{out}}^2(z)] + U_{j,\text{out}}^1(z) + \\ U_{j,\text{in}}^1(z) + \sum_{i=j+1}^N [U_{i,\text{in}}^1(z) + U_{i,\text{in}}^2(z)], & z \in \Omega_j^0 (j=1, 2, \dots, N) \\ Cz + U_{f,\text{out}}(z) + \sum_{i=1}^N [U_{i,\text{out}}^1(z) + U_{i,\text{out}}^2(z)], & z \in \Omega_m^0 \end{cases} \quad \text{A(1)}$$

$$U_{f,\text{in}}(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k z^k + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \overline{A_k} R_0^{2k} \left[\zeta(z) - \frac{1}{z} \right]^{(k-1)} \right) \quad \text{A(2)}$$

$$U_{f,\text{out}}(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(k-1)!} \overline{A_k} R_0^{2k} \zeta^{(k-1)}(z) \right) \quad \text{A(3)}$$

$$U_{i,\text{in}}^1(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(i)} + \frac{1}{R_{i-1}^{2k}} \overline{A_{-k}^{(i)}} \right) z^k + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} (R_{i-1}^{2k} \overline{A_k^{(i)}} + A_{-k}^{(i)}) \left[\zeta(z) - \frac{1}{z} \right]^{(k-1)} \right] \quad \text{A(4)}$$

$$U_{i,\text{out}}^1(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(k-1)!} (R_{i-1}^{2k} \overline{A_k^{(i)}} + A_{-k}^{(i)}) \zeta^{(k-1)}(z) \right] \quad \text{A(5)}$$

$$U_{i,\text{in}}^2(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(i)} + \frac{1}{R_i^{2k}} \overline{A_{-k}^{(i)}} \right) z^k + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} (R_i^{2k} \overline{A_k^{(i)}} + A_{-k}^{(i)}) \left[\zeta(z) - \frac{1}{z} \right]^{(k-1)} \right] \quad \text{A(6)}$$

$$U_{i,\text{out}}^2(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(k-1)!} (R_i^{2k} \overline{A_k^{(i)}} + A_{-k}^{(i)}) \zeta^{(k-1)}(z) \right] \quad \text{A(7)}$$

$$C = \frac{\pi R_0^2}{2S} (A_1 - \delta_2 \overline{A_1}) + \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{2S} [(R_i^2 - R_{i-1}^2)(A_1^{(i)} - \delta_2 \overline{A_1^{(i)}})] \quad \text{A(8)}$$

式 A(8) 中 $S = 2i(\omega_1 \overline{\omega_2} - \omega_2 \overline{\omega_1})$, $\delta_2 = \frac{2}{\pi i} (\overline{\omega_1} \eta_2 - \overline{\omega_2} \eta_1)$, $\eta_j = \zeta(\omega_j)$, $j=1, 2$.