

文章编号: 1000-4750(2011)05-0001-07

考虑弹塑性本构的三维模态变形体 离散元方法断裂模拟

*金 峰¹, 胡 卫^{1,2}, 张 冲³, 王进廷¹

(1. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084; 2. 华东中建地产有限公司, 上海 200122;

3. 中国水电顾问集团成都勘测设计研究院, 四川, 成都 610072)

摘 要: 三维模态变形体离散元(3MDEM)是针对离散块体系统在小应变、有限位移、有限转动条件下, 用变形模态模拟块体变形, 经过严格推导建立的一种离散元方法。该文在 3MDEM 平台实现对结构从弹性、到塑性再到断裂破坏的连续非连续全过程模拟。鉴于传统的接触破坏准则在塑性计算中的缺陷, 该文提出基于塑性应变的接触破坏判断准则, 并采用双块体的拉伸和剪切算例进行验证, 结果较合理。最后将考虑弹塑性本构的 3MDEM 用于悬臂梁算例, 模拟结构进入塑性和断裂破坏的连续非连续全过程。

关键词: 模态离散元; 数值方法; 弹塑性; 非连续; 接触

中图分类号: TV698.2⁺37 **文献标识码:** A

A FRACTURE SIMULATION USING 3-D MODE DISTINCT ELEMENT METHOD (3MDEM) WITH ELASTOPLASTIC CONSTITUTIVE MODEL

*JIN Feng¹, HU Wei^{1,2}, ZHANG Chong³, WANG Jin-ting¹

(1. State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. China State Construction Property Corporation LTD (East China), Shanghai 200122, China;

3. Chengdu Hydroelectric Investigation & Design Institute of SPC, Chengdu, Sichuan 610072, China)

Abstract: 3-D mode distinct element method (3MDEM) is a distinct element method under the assumption of small strain, finite displacement and finite rotation for blocks. The deformation of blocks is expressed as a combination of deformation modes in 3MDEM. In this paper, simulation from continuum to discontinuum including elastic-plastic-fracture is presented on 3MDEM platform. Due to the shortcoming of common criterion for contact fracture, a new criterion based on plastic strain is introduced, which is verified by two numerical examples. At last, a cantilever beam is studied from elastic to elastoplastic stage, and further to discontinuous fracture stage.

Key words: mode distinct element method; numerical method; elastoplastic; discontinuum; contact

Cundall^[1]于 1971 年提出二维刚体离散单元法 (Distinct Element Method, DEM), 用于模拟岩石边坡的破坏过程, 其基本思想是把不连续体分割成刚

性元素的集合, 在牛顿第二运动定律的基础上, 分析各个刚体, 刚体之间采用接触弹簧连接。后来 Cundall^[2]进一步在块体内部差分三角形网格, 提出

收稿日期: 2009-10-28; 修改日期: 2009-12-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(90510018, 50779021); “十一五”国家科技支撑计划项目(2008BAB29B05)

作者简介: *金 峰(1966—), 男, 贵州遵义人, 教授, 博士, 博导, 从事水工结构研究(E-mail: jinfeng@tsinghua.edu.cn);

胡 卫(1985—), 男, 江苏如皋人, 博士, 从事水工结构研究(E-mail: huw@mails.tsinghua.edu.cn);

张 冲(1978—), 男, 江苏海门人, 博士, 从事水工结构研究(E-mail: zhangchong96@mails.tsinghua.edu.cn);

王进廷(1973—), 男, 山西柳林人, 副教授, 博士, 从事水工结构研究(E-mail: wangjt@tsinghua.edu.cn).

可变形的二维离散元模型，并开发出商业程序 UDEC。商业软件 3DEC^[3]是 Cundall 在三维块体内部采用差分四面体网格方法，得到的三维变形体离散元方法，并实现了块体的材料非线性。

非连续变形分析 (Discontinuous Deformation Analysis, DDA) 是由石根华和 Goodman^[4-5]共同提出的一种非连续介质力学方法，其方法主要思想^[6]是用节理面将不连续体切割成块体，以块体单元形心的平移和转动以及块体的变形作为基本未知量，块体间采用不允许嵌入的硬接触模型，由系统的最小势能原理建立平衡方程，用隐式方法求解方程组。DDA 在岩石边坡稳定、地下结构分析以及混凝土断裂等方面得到广泛运用^[7]。

Williams^[8]等曾经提过简单变形体离散元的概念，认为块体的运动和变形在某种条件下可以看成块体刚体运动和变形的叠加，但未开发出实际应用的软件。张冲^[9]基于块体有限运动力学，在小应变、有限位移、有限转动条件下，经过严格推导，建立了一种三维模态变形体离散元方法 (3 Mode Distinct Element Method, 3MDEM)，并发展到二阶变形模态^[10]，可比较精确地模拟结构从小变形到大变形，从连续体到非连续体，从弹性到断裂再到破坏的全过程。3MDEM 计算块体变形时，无需在块体内部差分网格，减小了计算自由度，比 3DEC 更具效率。

传统的连续介质方法，如有限单元法，优势是连续体的弹性和弹塑性阶段的计算。传统的非连续介质法主要在于弹性到断裂到破坏的模拟。对于破坏前塑性阶段不可忽略的材料或者结构，将塑性与非连续同时纳入考虑有重要意义。本文在 3MDEM 平台实现对连续系统的弹性阶段，到弹塑性阶段，再到断裂、破坏的连续非连续全过程模拟，如图 1。系统从弹性阶段过渡到线性通过块体的塑性本构关系实现，从弹塑性阶段到断裂的过程通过消除块体间初始的面面接触实现。

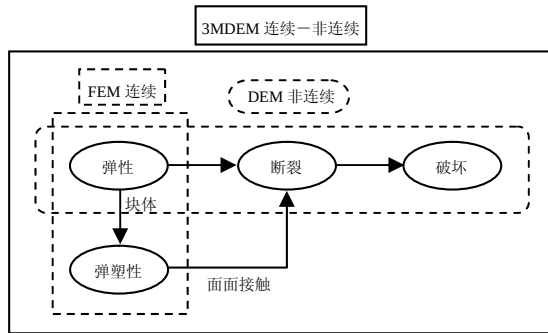


图 1 3MDEM 研究框架

Fig.1 Research framework for 3MDEM

1 3MDEM 弹塑性材料本构

关于三维模态变形体离散元方法及其弹塑性本构实现具体见参考文献[9—11]，本文简单介绍块体的弹塑性本构模型。

1.1 块体的弹塑性本构模型

对于简单变形模态离散元，六个模态系数 a 就构成了 Cauchy 应变张量 e ，对于弹性体，块体的应力增量：

$$\Delta s = [D_e] \Delta e \quad (1)$$

其中， D_e 是弹性矩阵。

时步末的应力如下式所示：

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta s \quad (2)$$

将式(2)代入变形方程，则可以计算下一时步的应变增量。

块体在进行弹塑性计算时，可以通过判断块体形心的应力状态，作为整个块体屈服的判断标准，块体的塑性流动也与形心的塑性流动完全一致。以 Mises 屈服准则为例，屈服函数如下：

$$F = J'_2 - s_s^2 \quad (3)$$

其中： J'_2 是第二偏差应力不变量； s_s 是屈服应力。对于关联流动，塑性势函数也取为式(3)，于是可以得到塑性刚度矩阵如下式，其中 H 为硬化参数。

$$[D_p] = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right\}}{H + \left\{ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right\}} \quad (4)$$

并注意到 $\frac{\partial J'_2}{\partial s_{ij}} = S_{ij}$ 的关系，这里 s 为应力偏量，将式(3)代入式(4)，可以得到 Mises 准则的塑性矩阵 $[D_p]$ ：

$$[D_p] = \frac{3G^2}{J_2(3G + H)} \cdot \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z & s_x t_{xy} & s_x t_{xz} & s_x t_{yz} \\ & s_y^2 & s_y s_z & s_y t_{xy} & s_y t_{xz} & s_y t_{yz} \\ & & s_z^2 & s_z t_{xy} & s_z t_{xz} & s_z t_{yz} \\ & & & t_{xy}^2 & t_{xy} t_{xz} & t_{xy} t_{yz} \\ & & & & t_{xz}^2 & t_{xz} t_{yz} \\ & & & & & t_{yz}^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

块体屈服后第 n 步的应力增量可由下式得到：

$$\Delta s^n = [D_{ep}^n] \Delta e^n = ([D_e] - [D_p^n]) \Delta e^n \quad (6)$$

将式(6)代入下式,可获得时步末的应力。

$$s^{n+1} = s^n + \Delta s^n \quad (7)$$

1.2 接触破坏判断准则

3MDEM 在块体系统从弹塑性进入断裂,从连续进入非连续借助面接触的取消来实现。本文的面面接触模型是由初始面面接触(见图 2)构成,提供的是面力,面面接触取消就脱开或者成为点接触模型,点接触模型不会再形成面面接触。

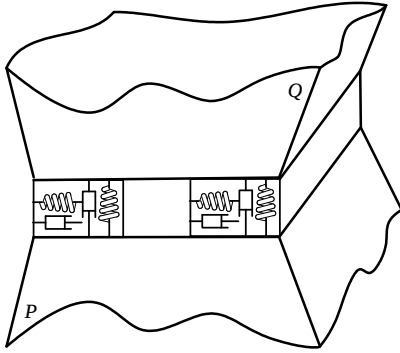


图 2 面接触模型

Fig.2 Face contact model

在两个互相接触的面之间,存在一个多边形的接触面,该接触力的法向为两个互相接触的面的法向单位矢量的平均,即:

$$n = \text{unit}(n_1 + n_2) \quad (8)$$

式中: n 为接触面的法向; n_1 、 n_2 分别为 P 块和 Q 块中两个互相接触的面的单位法向矢量;函数 $\text{unit}()$ 表示求单位矢量。

接触面上的每一个点均是接触点,在接触面的每一个角点上均设置了法向、切向弹簧和相应的阻尼器。假定接触面上的面力分布是线性的,将接触面多边形分成数个互相不重叠的三角形,由三角形的三个角点弹簧、阻尼求得该角点的分布力强度,再由三个角点力强度拟合出线性分布力系。这样,一个接触面可以有数个三角分布力系。每一个角点力的求解均与点接触模型一致,接触力增量和接触相对位移增量关系为:

$$\begin{cases} \Delta F_n = -K_n \Delta u_n \\ \Delta F_s = -K_s \Delta u_s \end{cases} \quad (9)$$

其中: K_n 、 K_s 分别是接触法向和切向弹簧的刚度; Δu_n 、 Δu_s 分别为相对位移增量的法向和切向分量; ΔF_n 、 ΔF_s 为法向和切向弹簧力变化量。

如图 3 所示,假定一个三角形接触面 $\triangle P_1 P_2 P_3$, 法线方向单位矢量为 n , 两个切线方向单位矢量分别为 s 、 t , 已经求得三个角点法向接触力强度 F_{ni} ,

切向力强度 F_{si} 、 F_{ti} , $i=1,2,3$ 。以法向力为例,对其中任何一点 P, 其法向力矢量满足如下式子:

$$F_n = \frac{A_1 F_{n1} + A_2 F_{n2} + A_3 F_{n3}}{A} \quad (10)$$

式中: A 为 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的面积; A_1 为 $\triangle PP_2 P_3$ 的面积; A_2 为 $\triangle P_1 P P_3$ 的面积; A_3 为 $\triangle P_1 P_2 P$ 的面积。

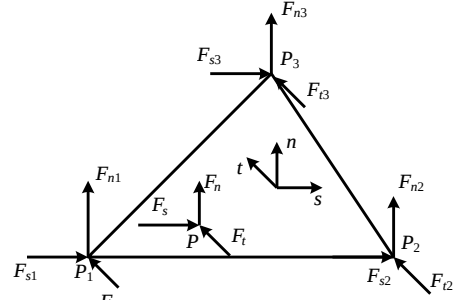


图 3 接触面力的分布

Fig.3 Distribution of face contact force

同样的方法,可以求得任何一点 P 的两个切向应力。

初始面面接触是抗拉的,面面接触的破坏需要满足一定的准则。通常有抗拉准则和摩尔库伦准则,见下式。

$$F^n = \int_{S\Delta} F_n dS \leq t S \quad (11)$$

$$|F^s + F^t| = \left| \int_{S\Delta} F_n dS + \int_{S\Delta} F_t dS \right| \leq |F^n| f + cA \quad (12)$$

式中: t 为抗拉强度; f 是接触面的摩擦系数; c 为凝聚力; A 为面积。

以上的接触破坏判别准则对于弹性块体是完全适用的,但考虑到块体的弹塑性本构关系,块体在加载过程中进入塑性后刚度很小,即当块体已经发生较大的变形时,应力状态的变化很小,见图 4,若采用理想弹塑性本构,块体产生大变形,应力状态仍会保持不变。块体的应力在塑性阶段变得不敏感,轻微的数值振荡即可能会影响到判别结果,所以基于应力和力的抗拉准则和摩尔库伦准则,在判断塑性块体面面接触破坏时存在着较大的误差。

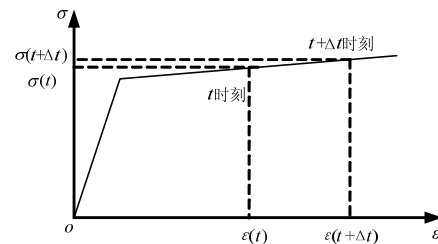


图 4 应力-应变曲线示意图

Fig.4 Stress-strain curve

考虑弹塑性本构的 3MDEM 初衷在于模拟结构块体系统从弹性阶段、进入塑性阶段、再进入断裂和破坏的全过程。基于这一原则，可以假定块体弹性阶段时，面面接触不会破坏，块体进入塑性后才进行面面接触的破坏判断。于是本文提出基于块体的塑性应变作为块体间面面接触破坏的判断准则，即两接触的块体的塑性拉应变或剪应变的大小大于相应的极限应变后，两块体断开，面面接触取消，见下式：

$$\min(e_{xx}^i, e_{xx}^j) > e_{tt} \text{ 或 } \min(|e_{xy}^i|, |e_{xy}^j|) > e_{ts} \quad (13)$$

式中： e_{xx} 为接触面正应变； e_{xy} 为接触面剪应变；其上标 i, j 表示面面接触的两个块体编号； e_{tt} 和 e_{ts} 表示极限正应变和极限剪应变。

具体如图 5，若块体 1 未达到极限应变，块体 2 和块体 3 达到极限应变，则块体 2 与块体 3 之间的面面接触取消。

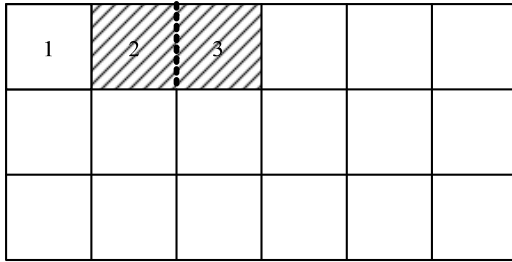


图 5 面面接触破坏准则示意图
Fig.5 Diagram of face contact failure

2 算例验证

2.1 双块体拉断

采用两个块体，左边阴影块体为位移强制固定的刚体，右边块体大小为 $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ ，弹性模量为 24GPa ，泊松比为 0.2 ，密度为 2400kg/m^3 。采用 Mises 屈服准则，屈服应力为 1.732MPa ，硬化参数 1GPa ，极限拉伸应变取为 100×10^{-6} ，极限剪切应变取为 200×10^{-6} 。法向接触刚度 50GPa ，切向接触刚度为零，可以模拟单向拉伸，右端部施加向右 3000kN/m^2 的均布荷载，如图 6。

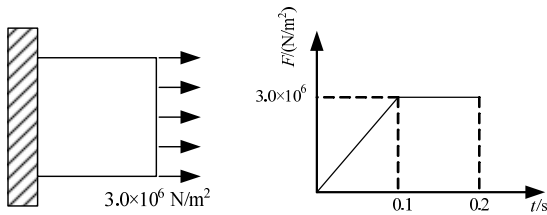


图 6 拉伸块体示意图
Fig.6 Blocks for tension

块体形心的位移，应变和应力时程曲线如图 7—图 9 所示。从 0.09s 左右开始，位移开始出现突然增大，并呈抛物线上升，说明块体面面接触断开，块体被拉开向右作匀加速直线运动。同时塑性应变保持不变，应力出现卸载并保持稳定。

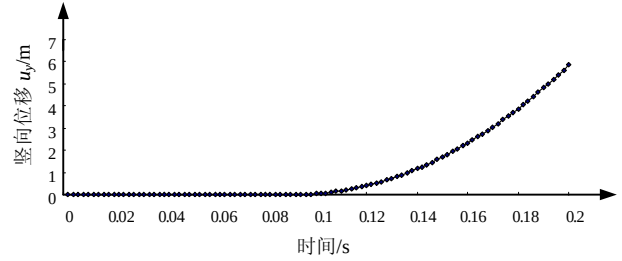


图 7 块体竖向位移时程曲线
Fig.7 Time interval of vertical displacement

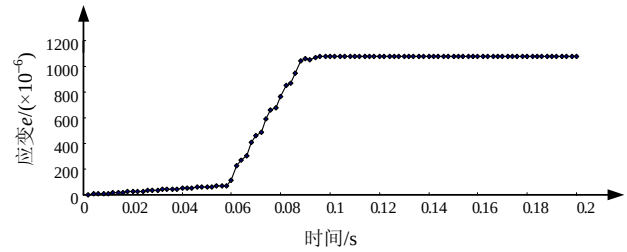


图 8 块体应变时程曲线
Fig.8 Time interval of strain

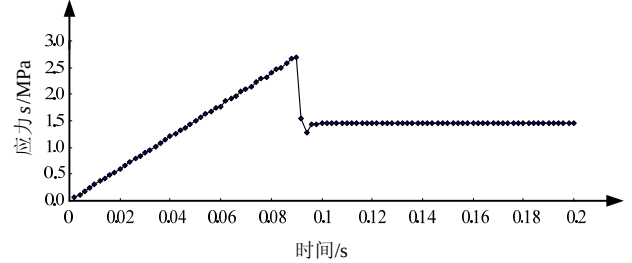


图 9 块体应力时程曲线
Fig.9 Time interval of stress

从应变时程曲线可以看出，块体从 0.06s 左右进入塑性，应变增加到 100×10^{-6} 以上开始保持不变，这是因为块体被拉断，出现卸载，块体又恢复弹性。从应力时程曲线可以看出，卸载后应力保持在 1.5MPa 附近，为施加荷载的一半，这个应力体现的是形心点的受力状态，将块体从中间竖向切开可以发现，左右两边的块体各受一半的惯性力，即该截面存在平衡状态一半的应力，块体正应力沿 x 方向线性分布。

2.2 双块体剪断

采用与上面拉断算例中相同尺寸和材料的块体，法向接触刚度 50GPa ，切向接触刚度 20.8MPa ，右部施加向下 1600kN/m^2 的均布荷载，如图 10。

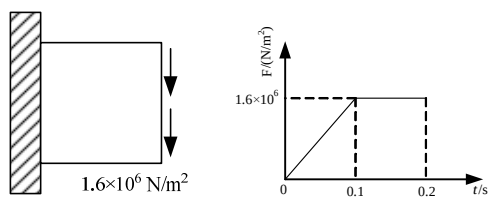


图 10 剪切块体示意图

Fig.10 Blocks for shear

块体形心的位移,应变和应力时程曲线如图 11—图 13 所示。从在 0.12s 左右开始,位移开始出现突然增大,应变保持不变,应力出现突然减小,说明块体面面接触被剪断,与拉伸相比剪切的过程比较复杂,块体会发生转动,与端部的固定刚体发生碰撞。

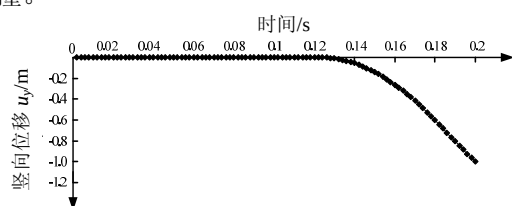


图 11 块体竖向位移时程曲线

Fig.11 Time interval of vertical displacement

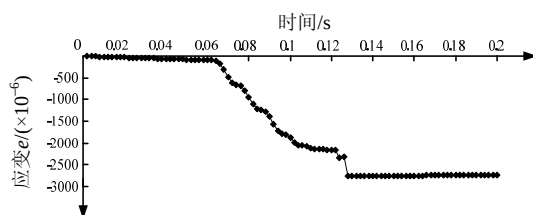


图 12 块体应变时程曲线

Fig.12 Time interval of strain

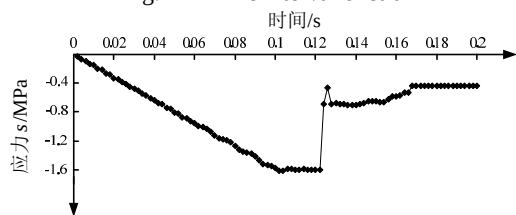


图 13 块体应力时程曲线

Fig.13 Time interval of stress

从应变时程曲线可以看出,块体从 0.06s 左右进入塑性,应变增加到 200×10^{-6} 以上,并在 0.13s 后保持不变,这是因为块体被剪断而后卸载,处于弹性状态。

3 悬臂梁算例

如图 14,一个左端固支的悬臂梁,尺寸为 $300\text{m} \times 60\text{m} \times 15\text{m}$,弹性模量为 24GPa,泊松比为 0.2,密度为 2400kg/m^3 。采用 Mises 屈服准则,屈服应力

为 1.732MPa,硬化参数 H 为 1GPa,极限拉伸应变取为 1×10^{-3} ,极限剪切应变取为 2×10^{-3} 。

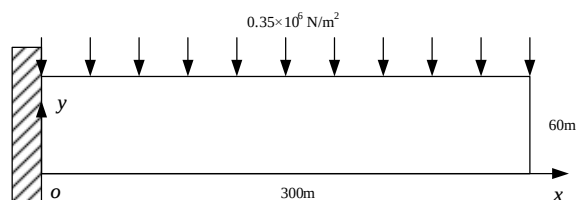


图 14 悬臂梁示意图

Fig.14 Diagram of a cantilever beam

离散元块体如图 15 所示,厚度方向分为 4 层,每个块体尺寸为 $15\text{m} \times 15\text{m} \times 15\text{m}$ 。法向接触刚度 5GPa,切向接触刚度 2.08GPa。在最上一层块体表面施加均布面力,10s 内均布荷载 P 从 0 线性增加到 $0.35 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 。

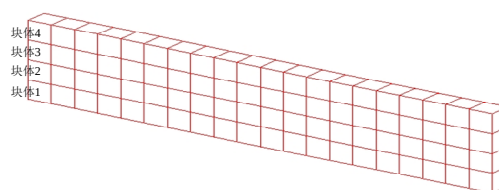


图 15 悬臂梁块体示意图

Fig.15 Blocks of the cantilever beam

有限元(FEM)与 3MDEM 的屈服区比较见图 16,在 $0.5P_0$ 时,3MDEM 与 FEM 的计算,悬臂梁均处于连续状态,两者屈服区的结果较为接近。继续加载,两者结果的有所不同,FEM 的屈服区不再扩大,而塑性应变在端部应力集中区开始迅速增长直至变形过大,计算出现不收敛而无法继续;3MDEM 的结果显示,荷载达到 $0.6P_0$ 后,左上部块体 4 塑性应变超过极限应变,与端部块体的面面接触断裂,进入非连续阶段。

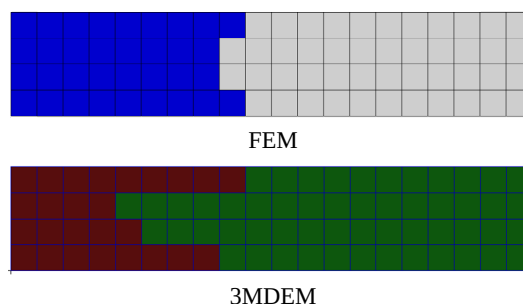
图 16 屈服区示意图($0.5P_0$)

Fig.16 Diagram of yield zone

FEM 与 3MDEM 的应力比较见图 17,其中虚线为 3MDEM 结果,实线为 FEM 结果。加载到 $0.5P_0$,在进入非连续之前,两者计算结果除去端部,其他区域分布规律近似,吻合较好。这是由于简单

变形体离散元的变形模态阶数不够,端部的应力集中反应不够充分,应力会略有偏小。加载到 $0.6P_0$, 3MDEM 的计算进入非连续,左上部块体 4 发生断裂,出现局部的卸载见图 18,可见左上端部,应力卸载到零,附近的应力出现较大范围的重分布。

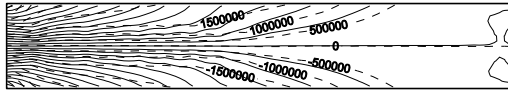


图 17 x 向正应力等值线图比较($0.5P_0$) /Pa
Fig.17 Contour map of x stress ($0.5P_0$)

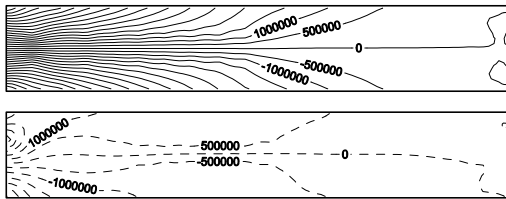
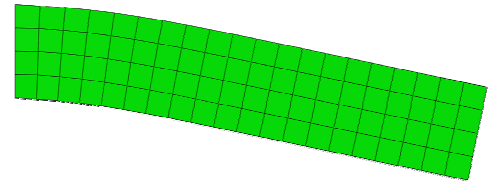
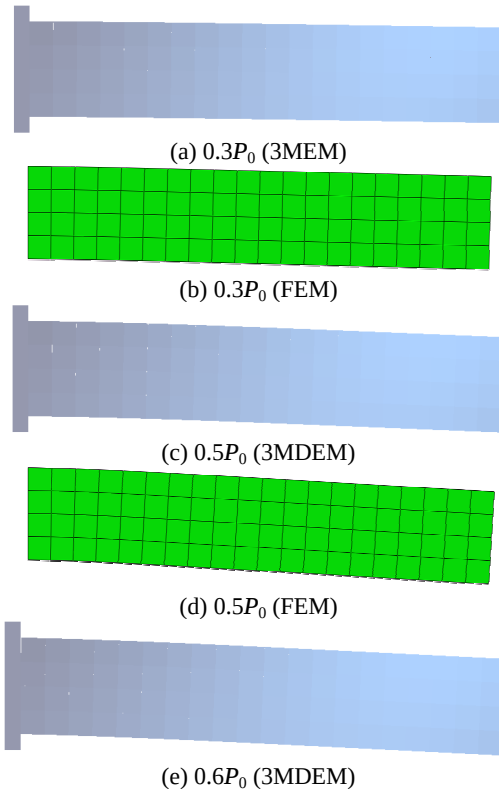
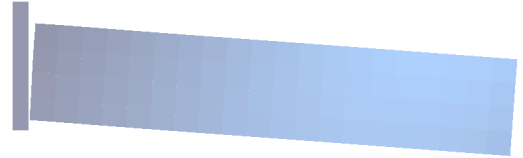


图 18 x 向正应力等值线图($0.6P_0$) /Pa
Fig.18 Contour map of x stress ($0.6P_0$)

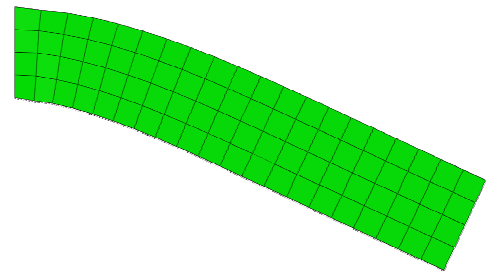
图 19 给出了 3MDEM 与 FEM 计算悬臂梁的破坏过程,位移均放大 10 倍。可以看出加载到 $0.6P_0$ 之前,3MDEM 与 FEM 的结果类似,梁端部进入塑性,出现较大弯曲变形;加载到 $0.6P_0$, 3MDEM 出现开裂,位置在左端上部,整个界面逐渐拉剪破坏,最后悬臂梁整体脱离固支端,而此阶段 FEM 结果的端部塑性区继续发展,出现很大变形直到计算不收敛,无法模拟结构断裂后的非连续破坏。



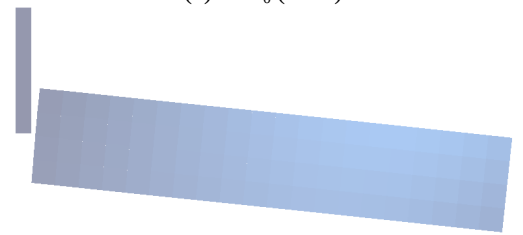
(f) $0.6P_0$ (FEM)



(g) $0.8P_0$ (3MDEM)



(h) $0.8P_0$ (FEM)



(i) $1.0P_0$ (3MDEM)

计算不收敛

(j) $1.0P_0$ (FEM)

图 19 悬臂梁破坏过程示意图(位移放大 10 倍)

Fig.19 Failure process of cantilever beam

综上, 3MDEM 对悬臂梁的计算结果, 连续阶段的精度与 FEM 有可比性, 非连续阶段的模拟结果较合理, 基本实现了结构弹性-塑性-断裂-破坏的连续非连续全过程模拟。

4 结论

本文在三维模态变形体离散元方法(3MDEM)的平台实现对连续系统的弹性阶段, 到弹塑性阶段, 再到断裂、破坏的全过程模拟。系统从弹性阶段过渡到线性通过块体的塑性本构关系实现, 从弹塑性阶段到断裂的过程通过解除块体间初始的面面接触实现; 为了解决基于力和应力的接触破坏判断准则在弹塑性本构的 3MDEM 中的缺陷, 本文提出了基于塑性应变的拉伸和剪切的接触破坏判断准则, 并进行了双块体的拉断和剪断算例验证; 最后将这一模型用于计算上表面受竖向均布荷载的

悬臂梁,模拟了悬臂梁从弹性进入塑性,并断裂破坏的全过程,结果较为合理,可以实现结构弹性-塑性-断裂-破坏的全过程模拟。

参考文献:

- [1] Cundall P A. A computer model for simulating progressive large-scale movements in block rock systems [C]. Proceedings of International Society for Rock Mechanics, Nancy France, 1971, 1, paper No.II-8.
- [2] Cundall P A. Udec – A Generalised distinct element program for modeling jointed rock, final technical report [R]. London, England: European Research Office, United States Army, 1980.
- [3] Itasca Consulting Group Inc. 3DEC version 3.0: Theory and background [M]. USA: Itasca Consulting Group Inc., 2004.
- [4] Shi Genhua, Goodman R E. Two dimensional discontinuous deformation analysis [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985, 9: 541—556.
- [5] Shi Genhua, Goodman R E. Generalization of two dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, 13(4): 359—380.
- [6] 石根华. 数值流行方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [7] Jing Lanru. Formulation of discontinuous deformation analysis (DDA): an implicit discrete element model for block systems [J]. Engineering Geology, 1998, 49(34): 371—381.
- [8] Williams J R, Hocking G., Mustoe G G W. The theoretical basis of the discrete element method [C]. Proceeding of the Numeta Conference, 1985.
- [9] 张冲, 金峰, 侯艳丽. 三维简单变形体离散元方法[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(2): 159—163.
Zhang Chong, Jin Feng, Hou Yanli. 3-D simple deformable distinct element method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(2): 159—163. (in Chinese)
- [10] 张冲. 三维模态变形体离散元方法及拱坝-坝肩整体稳定分析[D]. 北京: 清华大学, 2006.
Zhang Chong. 3-D mode distinct element method and arch dam-foundation stability analysis [D]. Beijing: Tsinghua University, 2006. (in Chinese)
- [11] 胡卫. 高拱坝破损溃决全过程模拟及安全评价方法研究[D]. 北京: 清华大学, 2010.
Hu Wei. Simulation of damage-collapse process and safety evaluation for arch dams [D]. Beijing: Tsinghua University, 2010. (in Chinese)