

文章编号: 1000-4750(2009)02-0158-05

无背索斜拉桥稳定分析的能量法

*彭旺虎, 邵旭东

(湖南大学土木工程学院, 湖南, 长沙 410082)

摘 要: 无背索斜拉桥在理想的成桥状态下, 面内失稳模态为主梁屈曲。将主梁简化成弹性地基梁计算模型, 选用正弦级数作位移函数, 运用能量方法, 提出了主梁屈曲临界荷载的计算公式。结合该类桥梁的结构布置特点, 用简洁的连续函数描述主梁轴压力和拉索弹性支承刚度的变化, 同时用简单的线形折减系数反映斜塔变形对拉索弹性支承刚度的影响。最后以长沙市洪山大桥为例, 用该方法计算了其成桥状态屈曲临界荷载, 其结果与有限元解对比具有很好的精度。

关键词: 无背索斜拉桥; 屈曲稳定; 能量法; 弹性地基梁; 位移函数

中图分类号: U448.27; TU311.2 **文献标识码:** A

ENERGY METHOD FOR STABILITY ANALYSIS OF CABLE-STAYED BRIDGE WITHOUT BACKSTAYS

*PENG Wang-hu, SHAO Xu-dong

(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: For cable-stayed bridge without backstays under ideal completed stage, the in-plane instability of the structure many occur in the form of girder buckling. A formula based on energy method is proposed to calculate the critical buckling load of the main girder, adopting elastic foundation beam simplification and selecting the sine series as the displacement functions. According to the structural characteristics of this type of bridge, the simplified continuous functions are developed to describe the variations of the axial force of the girder and the equivalent elastic supporting stiffness of the cable. Moreover, the linear discount coefficient is introduced to account for the effect of pylon deformation on supporting stiffness. A case study on the critical load of Hongshan Bridge in Changsha is finally conducted for verification. The results are in good agreement with those of the finite element method.

Key words: cable-stayed bridge without backstays; buckling stability; energy method; elastic foundation beam; displacement function

大跨径斜拉桥的主梁和索塔尺度细长, 在成桥及施工状态承受着巨大的压力, 其稳定性是一个较为突出的问题。对于这类复杂结构体系的稳定性, 目前多应用有限元方法进行分析^[1-2]。不过, 采用直观明了的能量方法对结构进行简化分析, 无论是对有限元分析结果的检验还是作为初步设计时的估算都是十分必要的。文献[3-4]通过简单的力学

计算模型, 推导了常规斜拉桥的面内和面外弹性稳定计算公式, 在这些方法中, 拉索的弹性应变能均按照多根离散的形式计入, 实际应用时计算过程仍相当繁复。

本文将把握无背索斜拉桥的结构特性, 将拉索简化成连续设置的弹性膜, 将主梁看作连续弹性膜支承着的地基梁, 运用铁摩辛柯能量法分析结构的

收稿日期: 2007-09-21; 修改日期: 2007-12-18

作者简介: *彭旺虎(1975—), 男, 湖南长沙人, 助教, 博士生, 从事桥梁工程研究(E-mail: onehoo@163.com);

邵旭东(1961—), 男, 浙江富阳人, 教授, 博士, 博导, 从事桥梁工程研究(E-mail: shaoxd@hnu.cn).

屈曲稳定性, 得到简洁的临界荷载计算公式。

1 能量方法

1.1 简化模型

无背索斜拉桥不但在外形上与常规斜拉桥迥异, 受力特性和结构布置也有很大不同。其只在单边拉索, 利用后倾的塔身平衡梁重, 理想的成桥状态是塔、梁在自重和拉索张力共同作用下, 受到的弯矩很小, 可认为处于轴压状态^[5]。在活载作用和结构自重偏差的情况下, 无背索的斜塔均比常规斜拉桥中双边拉索的直塔承受更大的面内弯矩, 因而从工程实践来看, 在较大跨径的情况下, 斜塔的截面弯曲刚度会设计成比直塔的大很多; 同时该类桥梁均采用塔梁固结体系, 为减小基底力矩, 墩柱(或称下塔柱)高度亦不能太大。因而整个结构相对形成弱梁强塔的形式, 其面内稳定问题均为主梁屈曲, 即主梁会先于索塔发生屈曲。

若斜塔采用独柱式, 面外刚度比面内刚度要小很多, 因而索塔稳定多为侧倾稳定问题。独柱塔的侧倾临界荷载可以当作底端固结顶端自由的杆件按欧拉公式求解, 计算较为简单。因此, 本文将重点研究无背索斜拉桥的主梁面内稳定。

在分析斜拉桥主梁的受力时, 多将其简化成多点弹性支承的连续梁, 如图 1(b)所示。在这一主梁结构中, 拉索的比拟弹簧是沿跨径方向间断布置的, 因而全部支承的应变能需要对每个弹性支承单独计算, 然后求和。

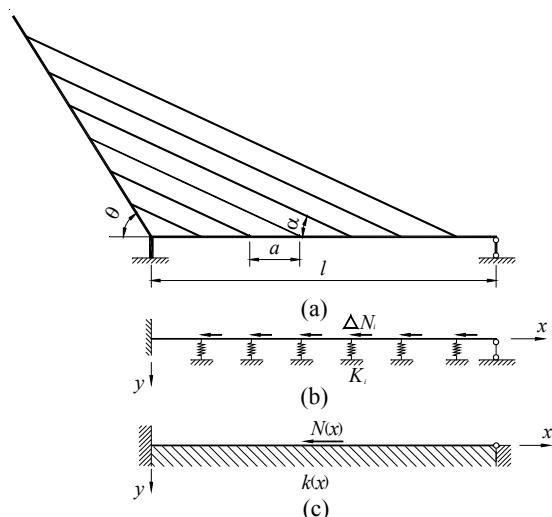


图 1 主梁简化模型

Fig.1 Simplified model of main girder

注意到较大跨径的斜拉桥中, 拉索间距相比主梁跨径是一个很小的量, 因此, 全部拉索可以比拟

成连续设置的弹性索膜, 对主梁连续支承而不是间断支承。或者说, 全部弹性支承可以用一个连续的弹性地基来比拟, 其地基系数为 $k(x)$, 使得结构的变形与多点弹性支承时的一致, 那么就可以直接积分求得支承的应变能。这样, 主梁结构可以看成弹性地基梁(如图 1(c)所示), 不过其地基系数沿轴向是变化的。

1.2 能量关系及屈曲荷载公式

体系应变能包括主梁弯曲应变能和弹性支承应变能:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(v'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l kv^2 dx \quad (1)$$

式中: EI 为主梁弯曲刚度; v 为主梁变形曲线; v'' 为 v 的二次导数; l 为跨径。

外力做功亦包括两部分: 其一, 梁上轴向作用力的二阶效应; 其二, 梁上竖向荷载的效应。轴向作用力是沿轴向变化的, 在数值上等于梁内轴力, 假定轴力表示为 $N_0 \cdot \xi(x)$, N_0 为全跨最大的轴压力, 它出现在梁根部, $\xi(x)$ 为无量纲函数, 表示轴力沿轴向的变化形式。另假定梁上竖向荷载为 $q(x)$, 则体系外力功为:

$$W = \frac{1}{2} N_0 \int_0^l \xi(v')^2 dx + \int_0^l qv dx \quad (2)$$

由于后一项只是外力功对位移 v 的一级变分, 而不是二级变分, 因而屈曲分析时不考虑主梁上的竖向荷载。根据能量法, 在中性平衡状态外力对体系所作的功 W 等于体系应变能 U 的增加, 即:

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI(v'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l kv^2 dx = \frac{1}{2} N_0 \int_0^l \xi(v')^2 dx \quad (3)$$

由此可以得到能量法确定的主梁屈曲荷载 N_{cr} 为:

$$N_{cr} = \frac{\int_0^l EI(v'')^2 dx + \int_0^l kv^2 dx}{\int_0^l \xi(v')^2 dx} \quad (4)$$

主梁变形曲线 v 若取单参数函数 $c\phi(x)$, 式(4)可直接求解; 若取用多参数函数 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$, 则需

由极值条件 $\frac{\partial N_{cr}}{\partial c_i} = 0$ 来确定, 该极值条件等价于以

$a_{ij} = \int_0^l (EI\phi_i''\phi_j'' + k\phi_i\phi_j - N_{cr}\xi\phi_i'\phi_j') dx$ 为元素的行列式等于 0。在无背索斜拉桥中, 利用其结构自身的特点, 可以构造相对简洁的 $k(x)$ 、 $\xi(x)$ 函数, 方便地求解屈曲荷载 N_{cr} 。

1.3 位移函数

主梁屈曲变形的位移函数选取对计算精度有很大的影响,对于两端铰支杆件的变形曲线一般可取正弦级数:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (5)$$

虽然无背索斜拉桥的主梁一端为嵌固,但由于主梁跨高比大,是柔性杆件,其受力上主要还是靠拉索支承,端支座的嵌固作用很不明显。三角级数计算方便,也可适用于作为主梁屈曲变形的位移函数。

由于是用假定的变形曲线,相当于增加了结构的约束,因此能量法近似计算结果均会比精确解大,计算时取用级数项数越多,越接近真实的变形,结果越接近精确解。不过,从实用的角度来说,取用三项以下才能便于直接计算,这时如果能大致判断出屈曲形态以选用最恰当的级数项对减小计算量大有裨益。

仅有端支承的杆件的屈曲形态为半正弦波或类似半正弦波的形状,但是有拉索弹性支承的主梁的屈曲形态并不会这么简单,其形态与拉索的支承刚度相关。文献[6]用下式计算常系数地基上的杆在屈曲变形时出现的半波数目 m :

$$m = \sqrt[4]{kl^4 / (\pi^4 EI)} \quad (6)$$

式(6)本是针对地基系数 k 为定值的情况,对于本文讨论的变地基系数的主梁,可以近似取跨中 $k(l/2)$ 代入计算。

2 无背索斜拉桥的结构特点

2.1 主梁轴力分布

在无背索斜拉桥中,辐射形索面会带来很大的塔根弯矩,没有应用的桥例;实际较多的采用竖琴形索面,各拉索倾角保持一致;较少的采用扇形索面,不过由于塔的后倾,拉索倾角的变化范围相比常规斜拉桥要小很多^[7],仍可按照平均倾角考虑受力。各拉索张力 T 基本相等,为:

$$T = qa / \sin \alpha \quad (7)$$

式中: q 为成桥状态主梁上的荷载集度; a 为拉索间距; α 为拉索倾角或平均倾角。这样,理想的成桥状态主梁根部轴力 N_0 为:

$$N_0 = ql / \tan \alpha \quad (8)$$

主梁上轴力 $N(x)$ 沿纵向呈阶梯形等差递减分布,因而可以将其近似地按照线性递减函数来表述:

$$N(x) = N_0 \cdot \xi(x) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (9)$$

2.2 拉索弹性支承刚度

由于没有背索的影响,弹性支承的刚度仅需考虑拉索和斜塔两者的弹性变形。单点支承刚度 K 参照图2按下式计算^[8]:

$$K = \frac{1}{\delta_1 + \delta_2} \quad (10)$$

式中 δ_1 、 δ_2 分别为支承点作用单位力 $P=1$ 时,由拉索伸长和索塔弯曲所引起的主梁竖向挠曲位移。式(10)可以写成:

$$K = K_c \eta \quad (11)$$

式中: K_c 为拉索支承刚度, $K_c = 1/\delta_1$; η 为计入斜塔影响的折减系数, $\eta = \delta_1 / (\delta_1 + \delta_2)$ 。

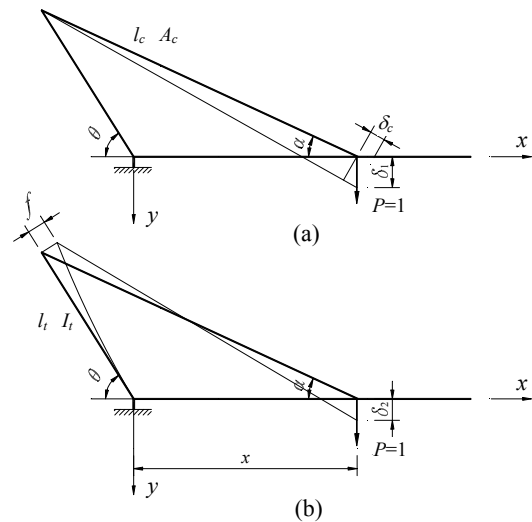


图2 索、塔变形引起的主梁位移

Fig.2 Girder's displacement caused by deformation of pylon & cable

δ_1 由拉索的伸长 δ_c 求得:

$$\delta_1 = \delta_c / \sin \alpha \quad (12)$$

拉索在 P 作用时产生的张力 $T = P / \sin \alpha$, 因而:

$$\delta_c = \frac{Pl_c}{E_c A_c \sin \alpha} \quad (13)$$

而拉索长度 l_c 和主梁轴向坐标 x 有如下几何关系:

$$\frac{l_c}{\sin \theta} = \frac{x}{\sin(\theta - \alpha)} \quad (14)$$

综合式(12)一式(14)得到:

$$K_c = \frac{1}{\delta_1} = \frac{E_c A_c \sin^2 \alpha \sin(\theta - \alpha)}{x \sin \theta} \quad (15)$$

如前所述,在无背索斜拉桥中由于采用竖琴形或倾角范围很窄的扇形索面,各拉索成桥索力相差

不大,因而可取用相同的截面型号。这样,拉索弹簧刚度 K_c 可看作仅随纵向坐标 x 变化的量值。实桥中计入活载的效应,一般仅尾索取用较小截面,其余拉索均取相同或相近的型号。并且由于近支点区段的竖向位移小,将拉索简化成同一类型带来的弹性支承应变能的误差并不大。

2.3 索塔变形对支承刚度的折减

δ_2 由斜塔变形 f 求得:

$$\delta_2 = f \sin(\theta - \alpha) / \sin \alpha \quad (16)$$

索力在塔身法向的分力为 $P \sin(\theta - \alpha) / \sin \alpha$,

因而塔上锚固点的法向位移为:

$$f = \frac{P \sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{l_t^3}{3E_t I_t} \quad (17)$$

而长度 l_t 和纵向坐标 x 有如下几何关系:

$$\frac{l_t}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin(\theta - \alpha)} \quad (18)$$

综合式(16)一式(18)得到:

$$\delta_2 = \frac{x^3 \sin \alpha}{3E_t I_t \sin(\theta - \alpha)} \quad (19)$$

由此可以得到计入斜塔影响的折减系数 η , 其完备的表达式为:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{E_c A_c x^2}{3E_t I_t} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \theta}} \quad (20)$$

η 值亦是随 x 而变化, 并与拉索倾角 α 、抗拉刚度 $E_c A_c$ 、索塔倾角 θ 、抗弯刚度 $E_t I_t$ 等诸多参数相关。图 3 示出了按实际参数计算得到的几座典型无背索斜拉桥中各拉索的 η 值, 这几座桥梁的基本情况参见文献[7], Alamillo Br. 和孝南互通匝道桥的计算参数分别来自文献[9]和文献[10], 其余两座来自相关桥梁设计图纸。

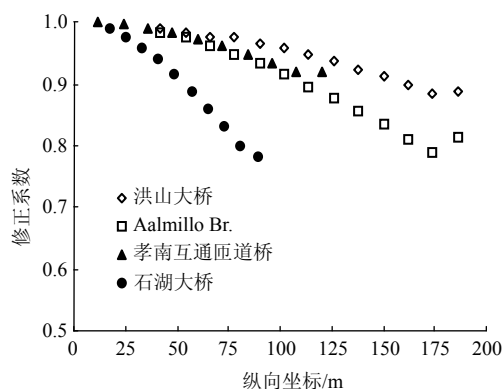


图 3 支承刚度折减系数

Fig.3 Discount coefficients for supporting stiffness

η 的完备表达式虽然较为复杂, 但从图 3 中可以看出各座桥的 η 数值沿纵向坐标 x 呈现出接近线性递减变化的特征, 因此可以将 η 简化成直线递减的形式, 或者直接取跨中区域的数值 $\bar{\eta}$ 作为全跨数值计算。比如洪山大桥的 η 值沿全跨从 1.0 向 0.90 递减, 全跨数值相差不大, 即可取 0.95 作为拉索弹簧刚度的折减系数。同样由于近支点区段的真实竖向位移小, 折减系数的偏差仅会带来弹性支承应变能很小的变化。

在获得单个弹性支承的等代刚度后, 可用下式得到连续的地基系数 $k(x)$:

$$k(x) = \frac{K}{a} = \bar{\eta} \frac{E_c A_c \sin^2 \alpha \sin(\theta - \alpha)}{a \sin \theta} \cdot \frac{1}{x} \quad (21)$$

3 算例

长沙洪山大桥^[5-7]是一座跨径 206m 的无背索竖琴式斜拉桥, 斜塔为预应力混凝土结构, 倾角 58° ; 主梁采用钢-混凝土组合脊骨梁, 由中央钢箱梁和两侧钢挑梁上的桥面板组成。恒载重量约为 34t/m, 主梁面内弯曲刚度为 $4.266 \times 10^5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^4$ 。全桥按梁上间距 12m 设置 13 对拉索, 拉索倾角 25° , 斜拉索采用 283 ϕ 7(1 号—3 号索)、223 ϕ 7(4 号—12 号索)和 187 ϕ 7(13 号索)三种规格。用能量法简化计算时取每对拉索截面积均为 171.64 cm^2 (对应 223 ϕ 7), 弹性模量取 $1.9 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。将这些数据代入式 (21), 并依前述取 $\bar{\eta} = 0.95$, 得到 $k(x) = 29.612/x \text{ (MN/m}^2\text{)}$ 。

依照洪山大桥的数据, 由式(6)得到 m 值为 1.88, 意味着屈曲时将会出现两个半波。因此可以直接取式(5)所表示的正弦级数的第二项作为位移函数, 即 $v = c_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$, 计算结果为 $N_{cr} = 1756 \text{ MN}$ 。

若取正弦级数第二项与第三项的和作为位移函数,

即 $v = c_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + c_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$, 可由极值条件

$\frac{\partial N_{cr}}{\partial c_i} = 0$ 获得两个方程, 联立求解得到 N_{cr} 的解为

1609MN。主梁根部真实的轴力依式(8)计算为 150MN, 则计算得到相应的主梁屈曲稳定安全系数为 11.707 和 10.727。

为与能量方法作比较, 用通用有限元程序建立了全桥空间模型, 其中梁、塔用梁单元, 拉索用索单元(屈曲分析时退化成杆单元), 模拟成桥的实际

情况, 计算得到如图 4 所示的结构一阶屈曲模态, 特征值(即稳定安全系数)为 10.421, 屈曲形式为主梁屈曲, 变形曲线为一短一长两个半波。

表 1 对能量方法近似计算和有限元精确建模得到的主梁屈曲稳定系数作了比较。从表 1 中可以看出, 当取用两项正弦级数时, 便可获得与精确值相当接近的结果。

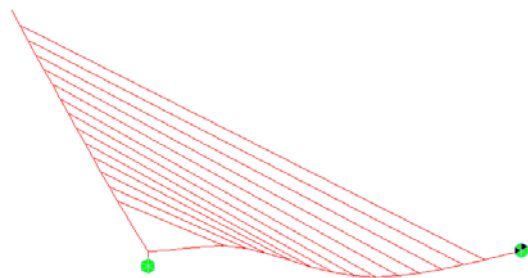


图 4 屈曲模态

Fig.4 Buckling mode

表 1 稳定安全系数计算结果

Table 1 Stability safety coefficients

方法	①EnM1	②EnM2	③有限元法	①/③	②/③
结果	11.707	10.727	10.421	1.123	1.029

注: EnM1、EnM2 分别为位移函数取一项和两项级数的能量方法。

4 结论

无背索斜拉桥结构刚度对比为弱梁强塔, 在理想的成桥状态, 面内稳定为主梁屈曲。

(1) 将拉索比拟成连续的弹性索膜, 将主梁简化成连续支承的地基梁, 利用能量原理即可很方便地获得主梁的屈曲荷载计算公式。斜拉桥主梁长细比大, 嵌固端的转动约束效应很不明显, 可用正弦级数作为假定的变形曲线。

(2) 注意到无背索斜拉桥拉索的构造特点——拉索布置成竖琴形, 或倾角范围很窄的扇形; 各索力相差不远, 一般除两端略作调整外, 全桥拉索型号较为统一, 主梁内的轴力和拉索弹性支承的弹簧刚度可以用较为简洁的连续函数式表示。

(3) 考虑斜塔变形对拉索弹性支承刚度的折减效果, 其完备表达式较为复杂, 通过几座实桥的计算, 发现可以简单地拟合成线性折减。

运用能量方法, 若把握住结构的主要特点, 便可以获得与精确建模分析非常接近的计算结果, 而节约大量的建模时间, 同时还易于分析结构参数调整的影响, 并且通用于同类型的其它桥梁结构。

参考文献:

- [1] 项海帆. 高等桥梁结构理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
Xiang Haifan. Advanced structural theory of bridge [M]. Beijing: China Communications Press, 2002. (in Chinese)
- [2] 顾安邦, 向中富, 徐君兰. 大跨斜拉桥的线性与非线性稳定分析[J]. 重庆交通学院学报, 2001, 20(增刊): 1—6.
Gu Anbang, Xiang Zhongfu, Xu Junlan. Linearity and non-linearity stability analysis of the long span pre-stressed concrete cable-stayed bridges [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2001, 20(Supplement): 1—6. (in Chinese)
- [3] Chen Wai-Fah, Duan Lian. Bridge engineering handbook [M]. Boca Raton: CRC Press, 2000.
- [4] 葛耀君. 索-塔-梁耦合作用下的斜拉桥侧倾稳定研究[J]. 中国公路学报, 1995, 8(4): 38—44.
Ge Yaojun. Research of lateral buckling stability of cable stayed bridges under cable-pylon girder coupling [J]. China Journal of Highway and Transport, 1995, 8(4): 38—44. (in Chinese)
- [5] Shao Xudong, Zhao Hua, Li Lifeng. Design and experimental study of a harp shaped single span cable-stayed bridge [J]. Journal of Bridge Engineering. ASCE, 2005, 10(6): 658—665.
- [6] 铁摩辛柯, 盖莱. 弹性稳定理论(第 2 版)[M]. 张福范, 译. 北京: 科学出版社, 1965.
Timoshenko S P, Gere J M. Theory of elastic stability [M]. 2nd Edition. Translated by Zhang Fufan. Beijing: Science Press, 1965. (in Chinese)
- [7] 彭旺虎, 邵旭东, 李立峰. 无背索斜拉桥的概念、设计与施工[J]. 土木工程学报, 2007, 40(5): 26—33.
Peng Wanghu, Shao Xudong, Li Lifeng. Concept, design, and construction of cable-stayed bridge without backstays [J]. China Civil Engineering Journal, 2007, 40(5): 26—33. (in Chinese)
- [8] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1992.
Li Guohao. Stability and vibration of bridge structures [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1992. (in Chinese)
- [9] Pollalis S N. What is Bridge?: The making of Calatrava's bridge in seville [M]. Cambridge, Massachusetts, London, England: The MIT Press, 1999.
- [10] 丁望星. 孝南互通 A、B 匝道桥无背索斜拉桥设计和技术特点[C]// 中国公路学会. 第三届全国公路科技创新高层论坛论文集. 北京: 人民交通出版社, 2006: 472—481.
Ding Wangxing. Design & characteristics of two cable-stayed bridges without backstays — A&B ramp bridges of Xiaonan Interchange [C]// China Highway & Transportation Society. The 3rd China National Forum on Innovation Highway Technology Compositions Collection. Beijing: China Communications Press, 2006: 472—481. (in Chinese)