

文章编号: 1000-4750(2009)02-0060-05

# 平稳随机激励下随机结构动力可靠度分析的 多项式逼近法

乔红威<sup>1</sup>, \*吕震宙<sup>1</sup>, 关爱锐<sup>2</sup>, 刘旭华<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学航空学院, 西安 710072; 2. 中国飞行试验研究院, 西安 710089)

**摘 要:** 针对平稳随机激励下随机结构动力可靠度分析问题, 在分裂法和 Hermite 多项式逼近的基础之上, 建立了一种新的计算随机结构动力可靠度的方法。所提方法运用分裂法的思想将多维动力可靠度响应函数转换成一维问题, 并采用 Hermite 多项式逼近单随机变量的动力可靠度响应函数, 最后利用 Monte Carlo 法求解显式化后的无条件动力可靠度, 并通过两个算例考察了该方法的有效性和可行性。

**关键词:** 随机激励; 随机结构; 动力可靠度; 分裂法; Hermite 多项式逼近

中图分类号: O324; TB123 文献标识码: A

## DYNAMIC RELIABILITY ANALYSIS OF STOCHASTIC STRUCTURES UNDER STATIONARY RANDOM EXCITATION USING HERMITE POLYNOMIALS APPROXIMATION

QIAO Hong-wei<sup>1</sup>, \*LU Zhen-zhou<sup>1</sup>, GUAN Ai-rui<sup>2</sup>, LIU Xu-hua<sup>2</sup>

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. Chinese Flight Test Establishment, Xi'an 710089, China)

**Abstract:** For dynamic reliability analysis of stochastic structures under stationary random excitation, a new dynamic reliability assessment method is presented on the basis of decomposition method and Hermite polynomials approximation. The method involves an additive decomposition of a multi-dimensional dynamic reliability response function into an one-dimensional function, then the Hermite polynomials is employed to approximate the one-dimensional dynamic reliability response function. At last, the unconditional reliability of the explicit response function is obtained by the Monte Carlo simulation, two examples demonstrate the rationality of the presented method.

**Key words:** random excitation; stochastic structures; dynamic reliability; decomposition method; Hermite polynomials approximation

以可靠性理论为基础的概率设计方法, 是今后结构设计发展的必然趋势。传统的可靠性设计理论中, 静力可靠性分析可以同时考虑结构参数和静载荷的随机性, 而对于随机过程激励下的结构动力可靠度问题, 结构参数的随机性却考虑得

较少。因此, 很有必要建立一套能同时考虑结构随机性与激励随机性的复合随机振动系统可靠性分析方法。近年来, 这方面的研究工作也取得了一系列进展。如陈颖、王东升等<sup>[1]</sup>基于随机振动的首次超越破坏准则, 建立了随机结构动力可靠度

收稿日期: 2007-09-25; 修改日期: 2008-04-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(10572117, 50875213); 航空基础基金项目(2007ZA53012); 新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-05-0868); 民口 863 计划项目(2007AA04z401)

作者简介: 乔红威(1981—), 男, 重庆云阳人, 博士生, 主要从事结构动力可靠性研究(E-mail: qiaohongwei@mail.nupu.edu.cn);

\*吕震宙(1966—), 女, 湖北黄石人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构可靠性和飞行器结构设计研究(E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn);

关爱锐(1980—), 女, 河南漯河人, 硕士, 主要从事数据处理研究(E-mail: guanairui@163.com);

刘旭华(1979—), 男, 河南商丘人, 硕士, 主要从事飞行试验研究(E-mail: liuxuhua100@sina.com).

功能函数, 然后引入序列响应面法进行失效概率计算; 陈建军等<sup>[2]</sup>利用随机因子法求解动力响应的数字特征, 并根据动力可靠性的Poisson公式导出随机结构在平稳随机激励下的动力可靠度计算公式; Spencer和Elishakoff<sup>[3]</sup>根据条件化方法应用动力可靠度的后向Kolmogonov方程求解了单自由度体系的可靠度; 最近, 李杰和陈建兵<sup>[4]</sup>基于概率密度演化方法求解结构复合随机振动的可靠度, 所提方法不需期望穿阈率的计算及对跨越过程性质的假定, 具有较高的精度, 采用数论选点法后能显著降低计算量, 更加适合高维问题。

早在多年前人们就将正交多项式用于随机结构的响应分析<sup>[5-6]</sup>, 其方法的难点在于如何计算多项式系数, 不当的算法会导致计算量很大, 文献[6]提出了采用B样条插值法求解多项式系数, 但仍需要较多的插值点。本文从随机结构的无条件动力可靠度公式出发, 运用分裂法<sup>[7]</sup>的思想将多维的条件可靠度函数转换成一维问题, 并且采用Hermite多项式逼近一维的条件动力可靠度函数, 多项式系数采用积分格式和Hermite正交多项式权函数形式近似的Hermite积分法计算。本文方法可高效准确的求出随机结构平稳随机激励下的动力可靠度值。

## 1 平稳随机激励下结构的动力可靠度分析

在结构动力可靠性分析中, 人们常采用的破坏准则有首超破坏和疲劳破坏准则, 本文主要讨论首超破坏。首超破坏是以结构上控制点的动力响应(位移、应力等)首次超越安全界限值(主要有单侧界限, 双侧界限和包络界限)为标志, 在工程中的应用亦极为广泛, 下面简单介绍结构动力可靠性分析的双侧界限。

双侧界限的定义是若结构的动力响应  $y(\tau)$  的绝对值在时间  $[0, t]$  内不超过安全界限值  $b$  的概率, 即是:

$$R(t) = \Pr\{-b \leq y(\tau) \leq b, 0 \leq \tau \leq t\} \quad (1)$$

以上是对动力可靠度的定义, 其中动力首超破坏分析的基础是响应  $y(\tau)$  与安全界限的交叉次数。人们通常认为结构系统的动力响应与允许界限的交叉服从Poisson分布和Markov过程的假设<sup>[8]</sup>, 基于交叉次数为Markov过程的动力可靠度公式为:

$$R(t) = \exp \left\{ -\frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \exp \left( -\frac{r^2}{2} \right) \frac{1 - \exp \left( -\sqrt{\frac{\pi}{2}} qr \right)}{1 - \exp \left( -\frac{r^2}{2} \right)} \right\} \quad (2)$$

其中:  $q = \left( 1 - \frac{a_1^2}{a_0 a_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $r = \frac{b}{\sqrt{a_0}}$  ( $a_k$  为谱矩,  $b$  为位移响应给定的双侧界限值)。

谱矩  $a_k$  的计算公式如下:

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k S_{yy}(\omega) d\omega \quad (3)$$

其中  $S_{yy}(\omega)$  为动力响应  $y(\tau)$  的自功率谱密度函数。

以上的动力可靠度计算方法无法考虑结构参数的随机性, 当需要考虑的结构为随机结构时, 可采用无条件动力可靠度分析公式<sup>[9-10]</sup>。设  $\mathbf{X}$  为表示结构参数的随机变量向量, 反映  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  (分别表示结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵) 的随机性, 则随机结构的无条件动力可靠度公式可写成:

$$R(t) = \int_{\mathbf{X}} R(t|\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (4)$$

其中:  $R(t|\mathbf{X})$  为在结构参数为  $\mathbf{X}$  时的条件可靠度;  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  为  $\mathbf{X}$  的联合概率密度函数。

式(4)的求解相当于解一个多重积分, 通常只能依靠数值方法。文献[9]提出将  $R(t)$  进行泰勒级数展开来求  $R(t)$ , 文献[10-11]亦运用响应面法或 Monte Carlo 法等数值方法来求无条件失效概率。本文根据分裂法和 Hermite 多项式逼近来求解无条件动力可靠度。

## 2 随机结构随机激励下无条件动力可靠度的求解

### 2.1 单随机变量结构系统无条件动力可靠度解法

对于不同的结构参数  $\mathbf{X}$ , 条件动力可靠度  $R(t|\mathbf{X})$  将具有不同的值, 因此我们可将条件动力可靠度  $R(t|\mathbf{X})$  ( $t$  为一固定的时间点) 当作一个响应函数来处理, 称之为可靠度响应函数, 可用  $r(t|\mathbf{X})$  来表示:

$$r(t|\mathbf{X}) = R(t|\mathbf{X}) \quad (5)$$

首先考虑  $\mathbf{X}$  (结构参数的随机变量) 为单随机变量的情况, 即动力可靠度响应函数为  $r(t|\mathbf{X})$ 。

本文方法建立在标准正态空间内, 因此如果结构参数为非标准正态分布的随机变量  $X$ , 则需根据 Rosenblatt 变换等变换方法将其转换成标准正态分布的变量  $x$ <sup>[6]</sup>(若  $X$  是具有均值  $\mu_X$  和标准差  $\sigma_X$  的正态随机变量, 则有  $x = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ ), 根据响应函数的多项式函数逼近理论<sup>[6]</sup>, 单随机变量形式的动力可靠度响应函数  $r(t|x)$  的 Hermite 多项式逼近函数可写成:

$$r(t|x) = \sum_{a=0}^{+\infty} g_a H_a(x) \quad (6)$$

式中  $g_a$  具有如下形式:

$$g_a = \frac{1}{a!} (r(t|x), H_a) = \frac{1}{a!} \int_x r(t|x) H_a(x) \varphi(x) dx \quad (7)$$

式(8)中的  $\varphi(x)$  为 Hermite 多项式的权函数:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (8)$$

$H_a$  可由下面的关系式推导得出:

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_{m+1}(x) = xH_m(x) - H'_m(x) \end{cases} \quad (9)$$

$H_a$  的阶数  $a$  取决于响应的非线性程度, 对于一般的随机结构动力可靠度问题,  $a$  取 4 即可。假设  $a$  取值为  $M$ , 那么条件可靠度函数的  $M$  阶 Hermite 多项式逼近可写成如下形式:

$$r(t|x) \cong r^M(x) = \sum_{a=0}^M g_a H_a(x) \quad (10)$$

在式(10)中,  $H_a$  具有固定的表达式(由式(9)推导得出), 只有系数  $g_a$  需要求解,  $g_a$  的求解是用多项式逼近动力可靠度响应函数  $r(t|x)$  中最为重要的部分。各种 Monte Carlo 法可用于  $g_a$  的求解, 但是所需的计算量巨大, 本文根据  $g_a$  的积分格式, 推导出一种新的求解方法。

将式(8)代入式(7)后可得到系数  $g_a$  的第  $a$  阶具体表达式:

$$g_a = \frac{1}{a!} \int_x r(t|x) H_a(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{a!} \int_x r(t|x) H_a(x) (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (11)$$

为了方便推导, 可令上式中的  $r(t|x) H_a(x) = Z_a(x)$ , 那么式(11)就可写成:

$$g_a = \frac{1}{a!} \int_x Z_a(x) (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (12)$$

再令式(12)中的  $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ , 经整理后有:

$$g_a = \frac{1}{a! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_a(\sqrt{2}y) \exp(-y^2) dy \quad (13)$$

通过对比发现, 式(13)和 Gauss-Hermite 积分公式具有相同的积分格式,  $m$  点的 Gauss-Hermite 积分公式如下所示:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(y) \exp(-y^2) dy \cong \sum_{i=1}^m w_i F(y_i) \quad (14)$$

$w_i$  是的权重系数,  $y_i (i=1, 2, \dots, m)$  是相应的积分点。

因此, 我们由式(13)和式(14)构建  $g_a$  的  $m$  点 Hermite 积分:

$$g_a = \frac{1}{a!} \sum_{i=1}^m P_i G(x_i) \quad (15)$$

由于前面有变换  $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ , 且将  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  合并了, 所以  $x_i$  和  $P_i$  应是如下形式:

$$x_i = \sqrt{2} y_i, \quad P_i = \frac{w_i}{\sqrt{\pi}} \quad (16)$$

Hermite 积分点数  $m$  可取 3、5、7 等, 通常取 7 即可, 具体的积分点和权重系数值请参考文献[12]。需要值得注意的是, 由于在前面将非标准正态分布的随机变量  $X$  转换成了标准正态分布的随机变量  $x$ , 因此  $r(t|x_i)$  的值实质上为  $r(t|X_i) = R(t|X_i)$  ( $X_i$  为  $x_i$  根据标准正态变换的逆变换的值)。在求出  $g_a$  后, 将其代入式(10)即可获得动力可靠度响应函数  $r(t|x)$  的  $M$  阶 Hermite 多项式逼近  $r^M(x)$ 。

## 2.2 多随机变量结构系统无条件动力可靠度解法

分裂法是 Rahman 和 Xu<sup>[7]</sup> 根据多维函数降维处理的思想, 将含有多个随机变量的结构响应函数  $g(\mathbf{X})$  分解成仅含有单个输入随机变量响应函数的组合(单变量分解), 其分解模型具有如下形式:

$$g(\mathbf{X}) \cong \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - (n-1)g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{X}$  为  $n$  维随机向量;  $\bar{x}_n$  为第  $n$  个随机变量的均值;  $x_i$  代表第  $i$  个随机变量。

根据此思想, 我们可将多维的动力可靠度响应函数  $r(t|\mathbf{X})$  分解成若干个一维动力可靠度响应函数的组合, 而一维的动力可靠度响应函数可用 2.1 节的方法逼近。

令含多随机变量的结构动力可靠度响应函数为  $r(t|\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X}$  为  $n$  维随机向量, 其均值为  $\bar{\mathbf{X}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ , 令  $\mathbf{X}^i = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n\}$  (即为  $\mathbf{X}^i$  中除  $x_i$  外其余的随机变量为其均值, 相当于只含一个随机变量  $x_i$ )。那么  $r(t|\mathbf{X}^i)$  (只含一个变量) 的  $M$  阶逼近形式为:

$$r^M(t|\mathbf{X}^i) \cong \sum_{a=0}^M g_{ai} H_a(\mathbf{X}^i) \quad (18)$$

则多随机变量的动力可靠度响应函数  $r(t|\mathbf{X})$  的近似公式表达式为:

$$r(t|\mathbf{X}) \cong \sum_{i=1}^n r^M(t|\mathbf{X}^i) - (n-1)r(t|\bar{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{a=0}^M g_{ai} H_a(\mathbf{X}^i) - (n-1)r(t|\bar{\mathbf{X}}) \quad (19)$$

$r(t|\bar{\mathbf{X}})$  为结构在均值处的可靠度值。当能用显式的  $r(t|\mathbf{X})$  来表示隐式的  $R(t|\mathbf{X})$  后, 无条件动力可靠度公式的积分(式(4))就很容易的由 Monte Carlo 法求解。尽管 Monte Carlo 法需要多次抽样才能获得较好的结果, 但由于  $r(t|\mathbf{X})$  是显式的数值表达式, 所以其计算效率相当高, 所需的时间与调用确定性动力分析程序所需的时间相比可以忽略, 本文方法的主要计算工作量在于用 Hermite 多项式逼近动力可靠度函数  $r(t|\mathbf{X})$ 。

### 3 算例分析

#### 例 1. 单自由度振子体系平稳位移响应可靠性分析

单自由度线性体系受单源平稳随机激励时的运动方程可表示为:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t),$$

其中:  $m$  为质量;  $c$  为阻尼;  $k$  为刚度; 系统阻尼  $\zeta = c / (2\sqrt{mk})$ , 采用无量纲参数;  $f(t)$  为一平稳随机过程, 自谱为常值  $S_{ff}(\omega) = S_0 = 1$ ,  $k$ 、 $\zeta$ 、 $m$  为服从正态分布且相互独立的随机变量, 均值分别为 40、0.05、15,  $k$ 、 $\zeta$ 、 $m$  均具有相同的变异系数  $\nu$ 。分别考虑  $k$ 、 $\zeta$ 、 $m$  三者之一为随机变量和全部均为随机变量的情形, 分析位

表 1 不同变异系数下的动力可靠度

变异系数	$\nu_k = 0.1$	$\nu_\zeta = 0.1$	$\nu_m = 0.1$	$\nu_{all} = 0.1$
$R(t)$	0.99248	0.99485	0.99593	0.99031
变异系数	$\nu_k = 0.15$	$\nu_\zeta = 0.15$	$\nu_m = 0.15$	$\nu_{all} = 0.15$
$R(t)$	0.98449	0.99175	0.99499	0.97828

移响应  $y$  的动力可靠度, 双侧位移响应界限值为 0.55,  $t=120$ 。以下各表为分析结果。

表 2 为 Monte Carlo 法的计算结果,  $k$ 、 $\zeta$ 、 $m$  均具有相同的变异系数  $\nu$ , 模拟次数为 10 万次。

表 2 Monte Carlo 法和与本文方法结果

Table 2 The results of proposed method and Monte Carlo method

变异系数	$\nu_{all} = 0.05$	$\nu_{all} = 0.1$	$\nu_{all} = 0.15$
数值模拟	0.99517	0.99034	0.97821
本文方法	0.99523	0.98937	0.97467
误差(%)	0.00603	0.0979	0.362

表 1 的数据表明:  $k$ 、 $\zeta$ 、 $m$  对位移响应的可靠度影响各不相同(由各变量对应的可靠度值来确定),  $k$  最大,  $m$  最小, 当所有变量具有随机性时对可靠度的影响最大。表 2 表明动力可靠度值随着变量变异系数的增大而减小, 并且变异系数的大小对本文方法的精度影响较小。当变异系数为 0.15 时, 与 Monte Carlo 法计算 10 万次的误差仅为 0.362%, 而且只调用了 21(7×3, 7 为 Hermite 积分数, 3 为随机变量个数)次可靠度计算程序。

#### 例 2. 三盒段翼盒结构动力可靠性分析

三盒段模拟机翼的翼盒结构如图 1 所示, 左端固支, 通常将翼盒模型看成是板杆结构, 总共有 28 个杆、16 个板。翼盒的尺寸见图 1, 杆单元和板单元所用的材料相同, 密度为  $7800 \text{ kg/m}^3$ , 泊松比取 0.3, 弹性模量为  $E/\text{GPa}$ , 设所有杆元具有相同的面积  $A/\text{m}^2$ , 所有板元有相同的厚度  $H/\text{m}$ , 节点 6、节点 8、节点 10、节点 12、节点 14、节点 16 上受到沿  $X$  方向的 6 个完全相关的随机集中力  $f(t)$  的作用,  $f(t)$  的自谱为常值  $1.0 \times 10^6 \text{ N}^2/\text{Hz}$ , 频率范围  $f \in [0, 150] \text{ Hz}$ , 阻尼比均为 0.01。假定结构参数  $A$ 、 $H$ 、 $E$  为 3 个互不相关的服从正态分布的基本随机变量, 均值分别为 0.0005、0.008、300, 均具有相同的变异系数  $\nu$ , 分别考虑  $A$ 、 $H$ 、 $E$  三者之一为随机变量和全部均

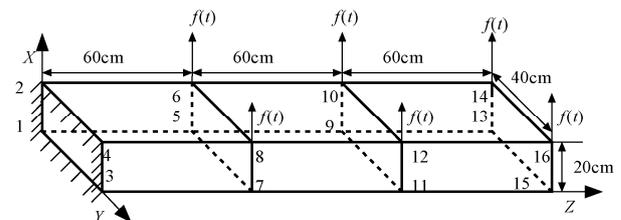


图 1 三盒段结构示意图

Fig.1 Diagram of three-box structure

为随机变量的情况下,第15节点X方向位移的动力可靠度,双侧位移响应界限值  $b=0.06\text{m}$ ,  $t=1200\text{s}$ 。

表3 不同变异系数下的动力可靠度

Table 3 Dynamic reliability results under different coefficient

变异系数	$\nu_A = 0.05$	$\nu_H = 0.05$	$\nu_E = 0.05$	$\nu_{all} = 0.05$
$R(t)$	0.99853	0.99702	0.99867	0.99681
变异系数	$\nu_A = 0.1$	$\nu_H = 0.1$	$\nu_E = 0.1$	$\nu_{all} = 0.1$
$R(t)$	0.99819	0.98221	0.99810	0.98103

通过对表3的观察可以得出,在此种情况下,板元厚度H对翼盒结构动力可靠度的影响最大,其次是弹性模量和杆元面积。

翼盒的动力可靠度值在不同时刻也是各不相同的,下表为翼盒在不同时刻的可靠度值(所有变量均具有变异系数0.05,限值  $b=0.06\text{m}$ )。

表4 不同时刻的动力可靠度

Table 4 Dynamic reliability results at different times

t/s	t=1000	t=1100	t=1200	t=1300	t=1400
$R(t)$	0.99732	0.99715	0.99681	0.99652	0.99634

表4表明结构的动力可靠度值随着时间的增大而减小,也即是失效的可能性增大。在本例中,对于每一个时间点,需要21(7×3)次确定性结构的动力可靠度分析。本文方法与响应面法类似,整个分析过程中不需要修改动力分析程序,并且效率较高,因此适合于大型结构分析。

## 4 结论

同时考虑结构参数随机性和载荷随机性的复合随机振动可靠性问题,现有的计算方法要么计算烦琐,要么效率低下,不适合工程应用。本文提出了一种新的建立在分裂法和Hermite多项式逼近基础之上的复合随机振动可靠度计算方法,所提方法采用Hermite多项式逼近单随机变量的可靠度响应函数,并运用高效的Hermite积分求解多项式系数,多随机变量的可靠度响应函数通过分裂法的思想来近似。由于Hermite积分和分裂法思想的有机结合,使得本文方法能够兼顾效率和精度,可为大型复杂工程结构的动力可靠性分析提供一条出路。

### 参考文献:

[1] 陈颖,王东升,朱长春. 随机结构在随机载荷下的动力

可靠度分析[J]. 工程力学, 2006, 23(10): 82—85.

Chen Ying, Wang Dongsheng, Zhu Changchun. Dynamic reliability analysis of stochastic structures subjected to random loads [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(10): 82—85. (in Chinese)

- [2] 胡太彬, 陈建军, 高伟. 平稳随机激励下随机桁架结构动力可靠性分析[J]. 力学学报, 2004, 36(2): 241—246.  
Hu Taibin, Chen Jianjun, Gao Wei. Dynamic reliability analysis of stochastic truss structures under stationary random excitation [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(2): 241—246. (in Chinese)
- [3] Spencer B F Jr, Elishakoff I. Reliability of uncertain linear and nonlinear systems [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(1): 135—149.
- [4] 陈建兵, 李杰. 复合随机振动系统的动力可靠度分析[J]. 工程力学, 2005, 22(3): 52—57.  
Chen Jianbing, Li Jie. Dynamic reliability assessment of double random vibration systems [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(3): 52—57. (in Chinese)
- [5] Papadimitriou C, Katafygiotis L S, Beck J L. Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1995, 10(4): 251—264.
- [6] Baroth J, Bodé L, Bressollette Ph, Fogli M. SFE method using Hermite polynomials: An approach for solving nonlinear mechanical problems with uncertain parameters [J]. Comput. Methods Appl Mech. Engrg., 2006, 195(44-47): 6479—6501.
- [7] Rahman S, Xu H. A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2004, 19(4): 393—408.
- [8] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 北京: 地震出版社, 1988: 22—31.  
Hu Yuxian. Earthquake engineering [M]. Beijing Earthquake Press, 1988: 22—31. (in Chinese)
- [9] Chaudhuri A, Chakraborty S. Reliability of linear structures with parameter uncertainty under non-stationary earthquake [J]. Structural Safety, 2006, 28(3): 231—246.
- [10] Zhao Y G, Ono T, Idota H. Response uncertainty and time-variant reliability analysis for hysteretic MDF structures [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1999, 28: 1187—1213.
- [11] Venini P, Mariani C, Claudia M. Reliability as a measure of active control effectiveness [J]. Computers and Structures, 1999, 73(1): 465—473.
- [12] Zhao Y G, Ono T. New point estimates for probability moments [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(4): 433—436.