

文章编号: 1000-4750(2008)12-0060-05

计及二阶效应的一种变截面梁精确单元刚度阵

*陆念力, 张宏生

(哈尔滨工业大学机电工程学院, 黑龙江, 哈尔滨 150001)

摘 要: 推导一种精确的 Bernoulli-Euler 变截面梁单元, 解决了传统变截面梁单元在结构稳定性分析中存在的计算精度较低的问题, 以常见的外形沿轴向按线性变化的变截面梁为例, 给出梁单元的精确刚度阵。放弃传统有限元通过插值理论构建变形场, 并通过虚位移原理获取单元刚度阵的方法, 直接从计入二阶效应的单元平衡微分方程中得到变截面梁的载荷位移关系, 进而得到有限元格式的变截面梁精确刚度阵。借助于变截面梁单元刚度阵, 可导致与精确的微分方程解析法同样的计算精度。通过与几个经典算例和 ANSYS 计算结果比较表明: 该精确刚度阵可直接应用于结构稳定性分析, 获得变截面梁结构精确的欧拉临界力。

关键词: 有限单元法; 结构稳定性分析; 变截面 Bernoulli-Euler 梁; 二阶效应; 精确单元刚度阵

中图分类号: O242.21; TU311.2 **文献标识码:** A

EXACT ELEMENTAL STIFFNESS MATRIX OF A TAPERED BEAM CONSIDERING SECOND-ORDER EFFECTS

*LU Nian-li, ZHANG Hong-sheng

(School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The exact stiffness matrix of the tapered Bernoulli-Euler beam is proposed, whose profile is assumed to be varying linearly, and it can be incorporated into stability analysis with high accuracy. The Bernoulli-Euler theory of bending is used to describe the motion of the beam. Classical finite element method to obtain stiffness matrix is replaced by interpolation method and the principle of virtual work. Solving the governing differential equation of motion with second-order effects, the force-displacement relation is obtained. In the formulation of finite element method, the derived stiffness matrix has the same accuracy with the solution of exact differential equations. The results are compared with some classical ones and ANSYS's. It shows that the proposed exact stiffness matrix offers an accurate and effective tool for stability analysis of tapered beam structures, and obtains the exact Euler critical force.

Key words: finite element method; structural stability analysis; tapered Bernoulli-Euler beam; second-order effects; exact elemental stiffness matrix

变截面梁因其易于满足合理受力, 节约材料的条件, 而在工程中得到广泛使用。变截面梁的稳定性一直受到人们关注, 早期的研究是将变截面梁其划分很多段等截面梁来代替^[1], 这种方法已经被证明是相当低效的。Eisenberger^[2]和 Yau^[3]研究了变截面梁的扭转稳定性。对于 Timoshenko 梁的研究,

To C W S^[4]使用三次多项式来描述挠度, 得到刚度阵。Cleghorn 和 Tabarrok^[5]的研究工作中, 形函数由静态挠度的控制方程求出, 得到单元刚度阵。对于 Bernoulli-Euler 梁, Al-Gahtani^[6]研究了变截面单元的轴向、弯曲和扭转刚度。但是文献[4-6]均忽略了轴向力对于变截面梁弯曲刚度的影响。从

收稿日期: 2007-07-11; 修改日期: 2007-12-12

基金项目: 国家科技支撑计划项目(2006BAJ12B03-2)

作者简介: *陆念力(1955—), 男, 广西隆安人, 教授, 博士, 博导, 从事机械结构分析和机械动力学研究(E-mail: N.lu@hit.edu.cn);

张宏生(1981—), 男, 安徽庐江人, 博士生, 从事机械结构分析和机械动力学研究(E-mail: whywww@gmail.com).

Birnstiel^[7]等人的研究中可以知道,利用赫米特插值的等截面梁单元考虑二阶效应的影响时,必须用三个、四个单元拟合一根杆件,才能取得较好的精度。Banerjee^[8]则利用 Bessel 函数得到考虑二阶效应的 Bernoulli-Euler 变截面单元刚度阵。

传统有限元的方法为得到单元的刚度矩阵,通常先通过插值理论,得到变形函数,然后使用卡氏方法或虚功原理建立单元刚度阵^[9]。由此得到的刚度阵通常精度都不够高,不得不通过在一个杆件中多划分单元来提高精度。为了降低计算成本,提高计算精度,本文放弃传统方法,直接通过微分方程推导变截面梁的刚度阵。对于工程中常见的外形沿轴向按线性变化的变截面梁,其横截面积沿轴向二次变化,而惯性矩沿轴向四次变化,如图 1 所示。应用文献[10—12]中的思想,基于小变形假设和考虑二阶效应,在变形后位形上建立平衡方程,从转角位移微分方程出发,得到 Bernoulli-Euler 变截面梁单元精确刚度阵。

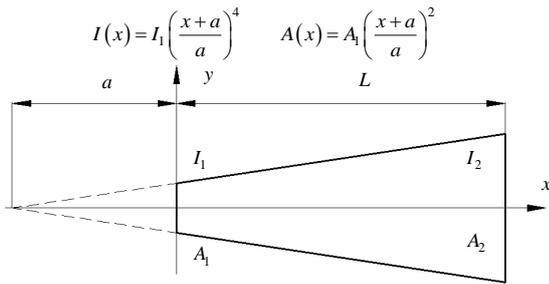


图 1 均匀变截面梁单元

Fig.1 Tapered beam element with linear profile

1 考虑二阶效应导出变截面梁的精确刚度阵

均匀变截面压弯梁的力学模型如图 2 所示,单元长度为 L , 截面面积为 $A(x)$, 惯性矩为 $I(x)$, A_1 、 I_1 和 A_2 、 I_2 分别为变截面梁始端和末端的截面积和惯性矩。在变形后位形上建立平衡方程,考虑轴力效应但忽略轴向变形影响。单元的平衡方程为:

$$\begin{aligned} F_1 + F_4 &= 0 \\ F_2 + F_5 &= 0 \\ F_2 &= (F_3 + F_6) / L + F_1 \psi \end{aligned} \quad (1)$$

基于小变形假设,式中:

$$\psi = (u_5 - u_2) / L \quad (2)$$

以图 2 中所示各力和位移方向为正,当轴力 $F_1 > 0$ 为压力时,对梁单元任意点建立弯矩平衡方程,得到:

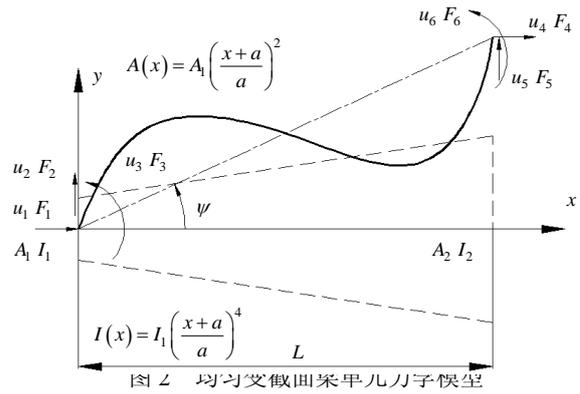


图 2 均匀变截面梁单元力学模型

Fig.2 Mechanics model of the tapered beam element with linear profile

$$EI(x)y'' + F_1 y = -F_3 + F_2 x \quad (3)$$

式(3)中:

$$I(x) = I_1 \left(\frac{x+a}{a} \right)^4 \quad (4)$$

方程(3)的通解为:

$$\begin{aligned} y &= (x+a) \left(A \sin \left(\frac{a\eta}{x+a} \right) + B \cos \left(\frac{a\eta}{x+a} \right) \right) - \\ &\frac{F_3}{F_1} \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \frac{F_6}{F_1} \frac{x}{L} + x\psi \end{aligned} \quad (5)$$

式中:

$$\eta = \sqrt{\frac{F_1 a^2}{EI_1}} \quad (6)$$

由边界条件:

$$\begin{cases} x=0 & y(0) = 0 \\ x=L & y(L) = \psi L \end{cases} \quad (7)$$

记:

$$\lambda = a / (a+L) \quad (8)$$

解出:

$$\begin{cases} A = -\frac{F_3(-1+\lambda)\cos(\eta\lambda)\csc(\eta-\eta\lambda)}{LF_1\lambda} - \\ \frac{F_6(-1+\lambda)\cos(\eta)\csc(\eta-\eta\lambda)}{LF_1} \\ B = \frac{F_3(-1+\lambda)\csc(\eta-\eta\lambda)\sin(\eta\lambda)}{LF_1\lambda} + \\ \frac{F_6(-1+\lambda)\csc(\eta-\eta\lambda)\sin(\eta)}{LF_1} \end{cases} \quad (9)$$

再由边界条件:

$$\begin{cases} x=0 & y'(0) = u_3 \\ x=L & y'(L) = u_6 \end{cases} \quad (10)$$

并记:

等截面梁单元只是本文变截面梁单元 $a \rightarrow \infty$ 的特例, 可以证明, 当 $a \rightarrow \infty$ 时, 式(22)中的刚度阵 $[K]$ 即变为文献[10-12]中的等截面非线性梁刚度阵, 当 $a \rightarrow \infty$ 且 $F_1 \rightarrow 0$ 时, $[K]$ 则退化为普通两节点梁单元的线性刚度阵。

2 变截面梁的精确单元刚度阵在稳定计算中的应用

使用本文方法, 对三个经典算例进行稳定性分析, 并和 ANSYS 的 Beam 44 变截面梁单元计算结果进行对比。为了便于比较, 引入无量纲系数 $m = P_{cr}L^2 / (EI_1)$ 。

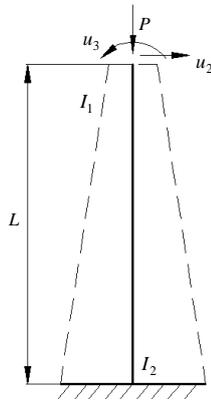


图3 均匀变截面悬臂柱

Fig.3 Tapered cantilever column with linear profile

算例 1. 如图 3 所示的悬臂柱, $I_2/I_1=2$, $\lambda = (1/2)^{1/4}$, 其精确欧拉临界力为 $P_{cr} = 2.002EI_2 / L^2$ [13]。

将其划分一个单元, 共有两个自由度, 其刚度阵为:

$$[K] = \frac{EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} \gamma K_{22} & \gamma K_{23} \\ \gamma K_{32} & \gamma K_{33} \end{bmatrix}$$

由 $\det(K) = 0$, 得到:

$$\begin{aligned} & (-2 + \eta^2(-1 + \lambda)\lambda) \cos\left(\frac{3}{2}\eta(-1 + \lambda)\right) + \\ & (2 + \eta^2(-1 + \lambda)\lambda) \cos\left(\frac{1}{2}\eta(-1 + \lambda)\right) - \\ & \eta(-1 + 3\lambda) \sin\left(\frac{3}{2}\eta(-1 + \lambda)\right) - \\ & \eta(1 + \lambda) \sin\left(\frac{1}{2}\eta(1 - \lambda)\right) = 0 \end{aligned}$$

解得 $\eta=10.57$, 由式(18)可得临界力为 $P_{cr} = \frac{\eta^2(1-\lambda)^2 EI_1}{\lambda^2 L^2} = 2.002EI_2 / L^2$, 即 $m = 4.004$ 。可见

本文只用一个单元即得到精确解, 可以证明将一个杆件划分为多个单元将得到相同的临界力。使用通用有限元软件 ANSYS 中的 Beam 44 单元, 并将杆件划分为 1 个-20 个单元, 其计算结果比较如表 1 所示。

表 1 均匀变截面悬臂柱的 m 值

Table 1 m of tapered cantilever column with linear profile

	精确解	本文单元	Beam44 (ANSYS)			
单元数	—	1 2	1	5	10	20
m	4.004	4.0044.004	3.62215	3.98982	4.00093	4.0037
相对误差/(%)	—	0.0 0.0	-9.53665	-0.354158	-0.0766294	-0.007479

算例 2. 如图 4 所示的两端铰接杆, $I_2/I_1=2$, $\lambda = (1/2)^{1/4}$, 其精确欧拉临界力为 $P_{cr} = 6.979EI_2 / L^2$ [13]。

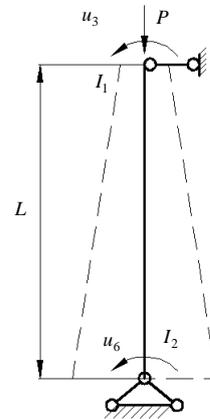


图4 两端铰支均匀变截面压杆

Fig.4 Simply supported tapered column with linear profile

将其划分一个单元, 共有两个自由度, 其刚度阵为:

$$[K] = \frac{EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} \gamma K_{33} & \gamma K_{36} \\ \gamma K_{63} & \gamma K_{66} \end{bmatrix}$$

由 $\det(K) = 0$, 得到:

$$\frac{\eta^3(-1 + \lambda)^3 \cos\left(\frac{1}{2}(\eta - \eta\lambda)\right)}{\eta(-1 + \lambda) \cos\left(\frac{1}{2}(\eta - \eta\lambda)\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\eta - \eta\lambda)\right)} = 0$$

解得 $\eta=19.745$, 由式(18)可得临界力为 $P_{cr} = \frac{\eta^2(1-\lambda)^2 EI_1}{\lambda^2 L^2} = 6.979EI_2 / L^2$, 即 $m = 13.958$ 。可

见本文只用一个单元即得到精确解, 可以证明将一个杆件划分为多个单元将得到相同的临界力。使用通用有限元软件 ANSYS 中的 Beam 44 单元, 并将杆件划分为 1 个-20 个单元, 其计算结果比较如表 2 所示。

表 2 两端绞支均匀变截面压杆的 m 值
Table 2 m of simply supported tapered column with linear profile

单元数	精确解 本文单元			Beam44 (ANSYS)			
	1	2	1	5	10	20	
m	13.958	13.958	13.958	17.4845	13.9539	13.9564	13.9574
相对误差/(%)	—	0.0	0.0	25.2652	-0.02939	-0.01120	-0.00442

算例 3. 如图 5 所示的对称变截面梁门式框架, 左右两端为变截面梁, $I_2 / I_1 = 4$, $\lambda = (1/4)^{1/4}$, 中间杆件为等截面梁, 其惯性矩为 I_1 。

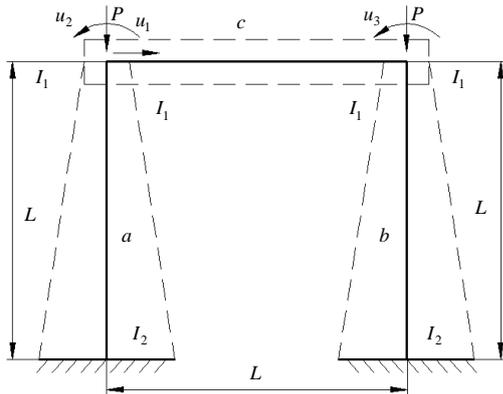


图 5 对称变截面梁门式框架

Fig.5 Symmetrical tapered portal frame

将每个杆件划分为一个单元, 系统共有 3 个单元, 左端单元为 a , 右端单元为 b , 中间单元为 c , 系统共有 3 个自由度。按照“对号入座”的原则将各单元刚度阵组装成总体刚度阵为:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{22}^a + K_{22}^b & K_{23}^a & K_{23}^b \\ K_{32}^a & K_{33}^a + K_{33}^c & K_{36}^c \\ K_{32}^b & K_{63}^c & K_{33}^b + K_{66}^c \end{bmatrix}$$

由 $\det(K) = 0$, 解得 $\eta = 9.08438$, 由式(18)可得临界力为 $P_{cr} = \frac{\eta^2(1-\lambda)^2 EI_1}{\lambda^2 L^2} = 14.1592 EI_1 / L^2$, 即

$$m = 14.1592$$

对于图 5 所示的对称变截面梁门式框架, 很难通过列写微分方程得到精确欧拉临界力, 故使用通用有限元软件 ANSYS 中的 Beam 44 单元, 并将每个杆件划分为 1 个—32 个单元, 其计算结果和本文结果比较如表 3 所示。由表 3 中可见, 随着单元数

表 3 对称变截面梁门式框架的 m 值

Table 3 m of symmetrical portal tapered frame

单元数	本文单元			Beam44 (ANSYS)		
	1	1	2	4	16	32
m	14.1592	13.15398	14.33091	14.22145	14.16269	14.15970
相对误差/(%)	—	-7.09941	1.21271	0.439643	0.024648	0.0035313

目的增多, ANSYS 中的 Beam 44 单元分析的结果趋近于本文结果, 由此证明本文单元精度很高。

3 结论

本文导出的变截面压(拉)弯梁有限元方程及刚度阵从二阶理论角度来说是完全精确的, 用它求解一类稳定问题可得到与精确的欧拉临界力完全吻合的结果。在小位移条件下, 本文变截面梁单元刚度阵则因精确地考虑了轴力引起的二阶效应, 导致与微分方程解具有同样的计算精度。从形式上看, 此方法实质上不过是将考虑二阶效应对变截面梁杆结构进行分析计算的过程改为用有限元方式表达而已。然而, 正是因为采用了有限元格式, 丰富了有限元的单元库, 可以方便的移植到现有的有限元程序中, 使其应用于大型复杂变截面结构成为可能, 从而具有广阔的应用前景。

参考文献:

- [1] Wang C K. Stability of rigid frames with nonuniform members [J]. Journal of the Structure Division, 1967, 93(1): 275—294.
- [2] Eisenberger M. Nonuniform torsional analysis of variable and open cross-section bars [J]. Thin-Walled Structures, 1995, 21(2): 93—105.
- [3] Yau Jong Dar. Stability of tapered I-beams under torsional moments [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42(10): 914—927.
- [4] To C W S. Linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotary inertia for vibration analysis [J]. Journal of Sound and Vibration. 1981, 78(4): 475—484.
- [5] Cleghorn W L, Tabarrok B. Finite element formulation of a tapered Timoshenko beam for free vibration analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 152(3): 461—470.
- [6] Al-Gahtani H J. Exact stiffness for tapered members [J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(10): 1234—1239.
- [7] Birnstiel C, Iffland J B. Factors influencing frame stability [J]. Journal of the Structural Division, 1980, 106(2): 491—504.
- [8] Banerjee J R, Williams F W. Exact bernoulli-euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(9): 1615—1628.

(参考文献[9]—[13]转第 78 页)