

文章编号: 1000-4750(2008)07-0028-07

基于 Pitt-peters 理论的风力发电机振动分析

*金 鑫, 何玉林, 刘 桦

(重庆大学机械学院, 重庆 400044)

摘 要: 采用 Pitt-Peter 理论进行风力机气动力的计算分析, 并用 MATLAB/simulink 进行编程, 建立风力机传动链的数学模型并在 MATLAB/simulink 中进行传动链系统的编程运算, 建立风力机 ADAMS 柔性多体结构动力学仿真模型, 将 MATLAB/simulink 和 ADAMS 进行风力机振动性能的联合仿真; 将计算的气动载荷加载到风力机叶片结构上, 将传动系统模型的反扭矩加到 ADAMS 风轮模型上, 同时风力机的结构变形也对气动性能、传动性能产生耦合影响, 仿真最终实现风力机系统振动性能耦合分析。仿真数据同实验测试数据比较表明: 该联合仿真方法可以较好的模拟风力机的振动特性。

关键词: Pitt-Peter 理论; 联合仿真; 风力发电机; 振动; 系统建模; 气弹耦合

中图分类号: TU311.3; TP391 **文献标识码:** A

VIBRATION ANALYSIS OF WIND TURBINE BASED ON PITT-PETER THEORY

*JIN Xin, HE Yu-lin, LIU Hua

(Department of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The aerodynamic characteristic of wind turbine was calculated by using Pitt-Peter theory and was programmed in Matlab/Simulink. The drive chain was calculated by applying state space method and also programmed in Matlab/Simulink. The model of the wind turbine was built with Adams. The simulation of vibration characteristic was carried out so that the aerodynamic loads and the torque were applied to the structure of the rotor. Simultaneously the deformation of the structure also affected the loads. The results show that the method has excellent capacity in simulating the vibration characteristic.

Key words: Pitt-Peter theory; combined simulation; wind turbine; vibration; system modeling; aeroelastic coupling

随着风力机功率的越来越大, 为了从风中吸取更多的能量, 叶片必须设计成足够长的尺寸, 这使其柔性进一步增加, 对其运行精度的控制要求越来越高, 需要准确地了解叶片工作过程中的动力学响应。风力机工作时, 叶片绕中心轴转动, 叶片的变形使其绕转轴的转动惯量及质量分布等发生改变, 从而影响叶片的转动形态, 而叶片的转动形态的改

变, 必然使叶片的弹性变形发生改变, 叶片的转动与柔性叶片弹性变形是相互耦合的, 可见, 旋转叶片的动力学分析不同于传统的不考虑结构的刚体位移的结构动力学分析, 它需要考虑叶片的转动与其弹性变形间的相互耦合关系及其所导致的动力学效应, 该问题属于现代柔性多体动力学的分析范畴。而且, 大型水平轴风力发电机系统为强非线性流刚

收稿日期: 2006-12-04; 修改日期: 2007-05-21

基金项目: 重庆市科技攻关计划项目(CSTC2007AA3051)

作者简介: *金 鑫(1979—), 男, 重庆人, 讲师, 博士, 主要从事虚拟样机技术、计算机辅助设计制造研究(E-mail: jin_xin_jin_xin@sina.com);

何玉林(1945—), 男, 四川遂宁人, 教授, 博导, 主要从事系统仿真、虚拟现实、计算机辅助设计制造、计算机图形学研究(E-mail: heyulin@cqu.edu.cn);

刘 桦(1975—), 男, 四川德阳人, 博士生, 主要从事系统仿真研究(E-mail: lhyaqing@sina.com).

柔耦合的周期时变多体系统,结构和运动非常复杂。力学建模必须考虑桨叶的几何非线性和大变形运动,机舱的刚体运动,塔架的弹性变形,气动载荷等因素。因此理论推导和数值计算都比较困难。文献[1]利用有限元法研究了桨叶、耦合转子/机舱/塔架系统的动力响应。文献[2]研究了风机气动性能和结构动力学特性,建立了桨叶半刚性模型。文献[3]给出了桨叶非线性运动方程。文献[4]推导了桨叶挥舞、摆振和扭转运动相耦合的运动方程。文献[5-6]利用有限元法对桨叶进行建模,文[5]采用2节点10自由度梁单元离散桨叶,根据Hamilton原理推导运动方程。文献[6]采用三维梁单元离散桨叶,考虑了桨叶的剪切、翘曲和弹性变形。文献[7]研究了大型水平轴风力发电机耦合转子/塔架气弹响应与稳定性,但是忽略了机舱对稳定性的影响。

仿真设计技术是目前国际上流行的一种先进设计技术,它广泛吸收了现代数学、力学等学科的理论基础,并借助于计算机技术而发展起来的一门新兴学科。通过这项技术,可对许多工程中的实际问题进行数值建模仿真,从而加快了设计的速度,是现代工程学形成和发展的重要推动力之一^[8-15]。1983年美国,Anderson P M等人将仿真方法,用于MOD-2型的研究之中,此后国内外不少学者对风力机模拟的方法进行了研究^[1-8],并成功地应用于工程实践。但是上述研究的重点是考察或模型的转矩/转速、或局部强度有限元分析、或转动模态分析,并未从风力机系统振动性能分析入手,目前国内对风力机系统振动性能研究主要采用国际有名的风力发电分析软件Bladed来完成。

本文将联合仿真技术应用于风力机模型的建立中,并对某失速型风力机进行系统振动性能分析,是一种新的尝试。自主编程计算风力机空气动力学,在ADAMS环境下进行风力机结构动态仿真分析,在MATLAB/simulink环境下进行传动系统仿真,采用联合仿真技术实现风力机的气弹耦合振动分析。为风力机动力学性能分析进行了一次有益的探索,现以某型风力机为例进行具体分析。试验结果验证了该模型的正确性,这对风力发电机组的进一步优化设计、优化控制等均具有指导意义。

1 风力机结构动力学分析模型

风力机的工作过程为风作用在风轮上产生气动扭矩,从而带动传动链系统,传动链系统又在风轮

上作用反扭矩。传动链又将扭矩传递至电机,电机发电同时又对传动链作用一个反扭矩,最终使得风轮在一定转速下转动,发出功率一定的电量。

风力机动力学模型包括空气动力学模型、风轮/塔架/机舱结构动力学模型和传动链模型。当风速一定时,空气动力学模型计算出风力机气动性能和气动载荷,计算出的气动载荷作为输入作用在结构动力学模型上,由于气动载荷的变化,引起结构的变形,计算出的变形又作为输入作用在空气动力学模型上,计算出相应的气动载荷,这就是气弹耦合现象。结构动力学模型计算出的输出扭矩,同时作用在传动链模型上,传统链模型也对结构动力学模型产生反作用力矩,在空气动力学模型和传动链模型联合作用下,结构动力学模型计算出转速。转速又影响空气动力学模型载荷的气动载荷计算,生成新的气动载荷,又作用在结构动力学模型上。各模型关系的关系如图1。其中空气动力学模型和传动链动力学模型是在MATLAB/simulink下建立的,结构动力学模型是在ADAMS/view下建立的。



图1 风力机动力学模型各子系统关系图

Fig.1 Diagram of relationship among sub systems

2 风力机空气动力学模型

风力机空气动力学的计算采用Pitt-Peters模型。图2(a)所示为一个叶素上的风速分量,假设叶素在桨叶上处于半径 r 的位置,来流风速为 U_∞ ,叶素旋转角速度为 Ω 。引入轴向和切向速度诱导因子 a 、 a' ,通过叶素的气流轴向速度为 $U_\infty(1-a)$,在风轮旋转平面内,该叶素处气流的切向速度为 $\Omega r(1+a')$,轴向速度和切向速度合成了相对速度 W ,由于风速方向的改变,将导致攻角 α 改变,定义叶素来流角 $\phi = \alpha + \beta$, β 为桨叶安装角和截面扭角之和。 L 和 D 是桨叶坐标上叶素的升力和阻力,见图2(b)。应用动态入流模型,考虑叶尖和轮毂损失 F ,考虑风力机实际工作时的结构参数,速度诱导因子求解公式变为:

轴向诱导速度因子:

$$a = a_0 + a_s \mu \sin \psi + a_c \mu \cos \psi \quad (1)$$

式中: a_0 、 a_s 、 a_c 分别是风轮处平均诱导速度、横向诱导速度、纵向诱导速度的变化参数。诱导速度的

一阶时间导数为 $\{v\}^*$:

$$M \begin{Bmatrix} \dot{a}_0 \\ \dot{a}_c \\ \dot{a}_s \end{Bmatrix} + L^{-1} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_c \\ a_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_T \\ C_{m_y} \\ C_{m_z} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中:

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{128}{75\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{45\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{45\pi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{4A(a_0)} & 0 & -\frac{15\pi}{128} \tan \frac{\chi}{2} \\ 0 & -\sec^2 \frac{\chi}{2} & 0 \\ \frac{15\pi}{128A(a_0)} \tan \frac{\chi}{2} & 0 & -\left(1 - \tan^2 \frac{\chi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, χ 、 γ 分别为气流斜角和倾角。

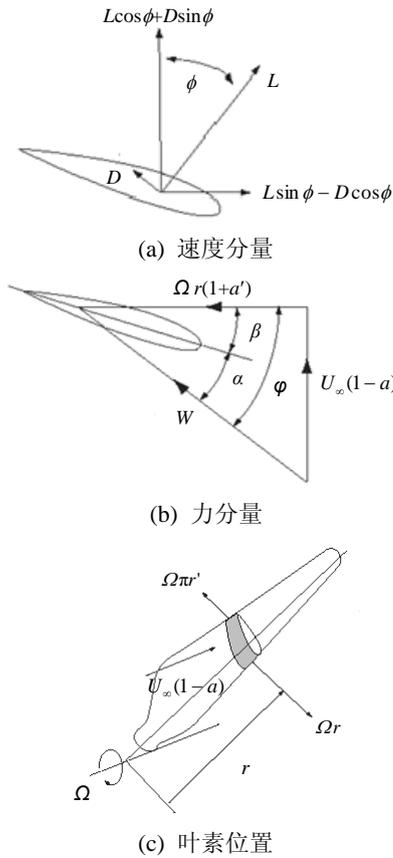


图 2 叶素气动载荷

Fig.2 Aerodynamic forces on blade element

当采用 Glauert 动量理论时:

$$A(a_0) = \sqrt{1 - a_0(2 \cos \gamma - a_0)} \quad (5)$$

取 Coleman 动量理论时:

$$A(a_0) = \cos \gamma + \tan \frac{\chi}{2} \sin \gamma - a_0 \sec^2 \frac{\chi}{2} \quad (6)$$

其中, C_T 、 C_{m_y} 、 C_{m_z} 分别为推力系数、横倾力矩系数、纵倾力矩系数:

$$\begin{aligned} C_T &= 4a_0 \\ a_s &= -\left(1 - \tan^2 \frac{\gamma}{2}\right) C_{m_z} \\ a_c &= -\sec^2 \frac{\gamma}{2} C_{m_y} \end{aligned} \quad (7)$$

可以得到风轮上的诱导速度分布, 从而计算出轴向、切向诱导速度因子 a 、 a' 。

叶素的相对速度为:

$$W = \sqrt{(U_\infty(1-a))^2 + (\Omega r)^2} \quad (8)$$

作用在叶素上的法向力和切向力分别为:

$$dL = 1/2 \rho W^2 c C_L(\alpha) dr \quad (9)$$

$$dD = 1/2 \rho W^2 c C_D(\alpha) dr \quad (10)$$

式中: ρ 为空气密度; W 为相对速度; Ω 为风轮转速; U_∞ 为来流风速; C_L 、 C_D 为升阻力系数。

叶素上的推力和转矩分别为:

$$dF = \frac{1}{2} \rho W^2 c (C_L \cos \phi + C_D \sin \phi) dr \quad (11)$$

$$dT = \frac{1}{2} \rho W^2 c (C_L \sin \phi - C_D \cos \phi) dr \quad (12)$$

因此, 对于第 i 个半径为 R 的风轮叶片, 推力 F 、转矩 T 和产生的功率 P 分别为:

$$F_i = \int_0^R dF, \quad T_i = \int_0^R r dF, \quad P_i = T_i \Omega \quad (13)$$

风力机功率系数 C_p 为:

$$C_p = \frac{\sum_{i=1}^B P_i}{\frac{1}{2} \rho \pi R^2 U_\infty^3} \quad (14)$$

3 传动链系统动力学模型

传动系主要是由风轮转子、低速轴、齿轮箱、高速轴和发电机构成。传动系的建模分为风轮、传动装置和电机。低速端传动模型为:

$$J_r \frac{d\Omega}{dt} = T - T_D - v T_m \quad (15)$$

$$T_r = C_p(\lambda, \beta) \frac{1}{2} \rho \pi R^2 \frac{U_\infty^3}{\Omega} \quad (16)$$

其中： J_r 为风轮转动惯量/($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)； Ω 为风轮转动角速度/(rad/s)； T_r 为风轮吸收的动力矩/($\text{N}\cdot\text{m}$)； T_D 为能量传递装置中的全部阻力矩/($\text{N}\cdot\text{m}$)，假定全部集中在风轮处； ν 为齿轮传动比； T_m 为高速轴上的扭矩； λ 为尖速比； ρ 为空气密度； R 为风轮半径； U_∞ 为上风向风速。

高速端传动模型为：

$$J_g \frac{d\omega_g}{dt} = T_m - T \quad (17)$$

其中： J_g 为电机转动惯量/($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)； ω_g 为电机转动角速度/(rad/s)； T_m 为高速轴上的扭矩； T_e 为发电机上的反扭矩。

失速控制风力发电机组采用的电机主要是定速感应电机，其特性由斜率 h 和短路瞬态时间常数 τ 。电机反作用扭矩 T_e 为：

$$\dot{T}_e = \frac{1}{\tau} [h(\omega - \omega_0) - T_e] \quad (18)$$

其中： ω 为电机转速； ω_0 为同步电机转速。

$$h = \frac{P_r}{\varepsilon \omega_r (\omega_r - \omega_0)} \quad (19)$$

其中： ω_r 是电机在额定功率 P_r 下的电机转速； ε 为电机满载效率。

当风轮转动惯量、传动比、电机转子转动惯量已知时，可计算出风轮的转速、风轮吸收的动力矩、电机转速、电机的力矩。其中风轮转速、传动链对风轮的反扭矩被用于结构动力学计算。

4 风力机振动仿真模型的建立

4.1 风轮塔架模态分析

模态分析是结构动态分析的核心，是进行风力机结构动力学分析的基础。进行风力机的性能分析时，首先要进行模态分析，通过模态分析可以获得结构动态特性等方面的可靠数据，可以了解结构之间的关系和整个系统的动特性，从而为结构动态设计、改进提供科学依据。

风轮塔架模态分析在 MSC.Patran/Nastran 环境下进行，然后生成模态中性分析文件，最终导入到 ADAMS 中，进行结构柔性多体动力学分析。

模态分析主要是求模型的固有频率和各固有频率下的振型。结果见表 1。计算结果同实验测试数据比较，误差很小，证明了计算的正确性，该实验数据来自国内某风力发电机组设计制造公司。

表 1 风力机自振频率分析结果
Table 1 Comparison between calculated and experimental results

	风轮前三阶频率/Hz			塔架前三阶频率/Hz		
计算结果	1.719	2.852	3.17	2.61	11.23	27.11
实验测试数据	1.65	2.93	3.3	2.59	11.16	26.71

4.2 风力机系统结构动力学模型建模

风力机总体性能仿真模型主要部件包括风轮、塔架、低速轴、高速轴、齿轮箱、电机等部件模型。其中风轮和塔架均为实体模型，齿轮箱和电机只需要考虑传动比和电机反应扭矩以及质量分布就可以了，不必建立详细模型。将 4.1 节分析的风轮塔架模型生成 MNF 文件，然后导入到 ADAMS 环境中，生成柔性体。在上述假设的基础上，在 ADAMS 系统中完成了风力机的装配，生成了风力机仿真数字模型，如图 3 所示。

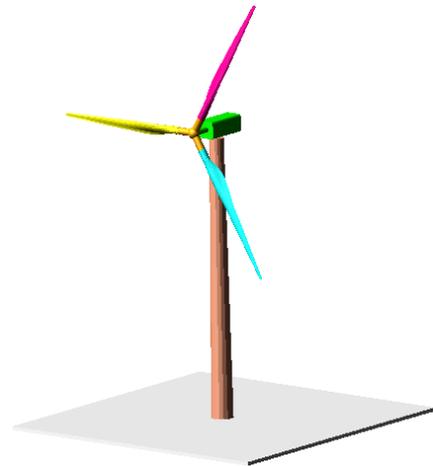


图 3 风力发电机组仿真模型

Fig.3 Simulation model of wind turbine

4.3 风力机振动性能分析模型

风力机的气动力加载，根据风力机风轮的实时转速和风速，按照式(1)一式(14)编程计算，生成的空气动力学载荷，载荷加载到结构动力学模型上，实现 ADAMS 和 MATLAB/simulink 的联合仿真；根据已有的传动系数数据，在 MATLAB 下建立传动系的数学模型。空气动力学模型向 ADAMS 结构动力学分析模型输入气动力，由于风轮是柔性结构，本身的结构变形和风轮的转速将导致气动力的变化，变化的气动力又重新作用在 ADAMS 结构动力学模型上，这就是气弹耦合现象，通过 ADAMS 与 MATLAB/Simulink 联合仿真来实现；ADAMS 结构动力学模型又向传动系统 Matlab 模型输入风轮扭矩，传动系统 Matlab 又向 ADAMS 结构动力学模型

反馈一个反作用扭矩，最终保证转速保持恒定。这就是联合仿真的整个过程。联合仿真模型见图4。

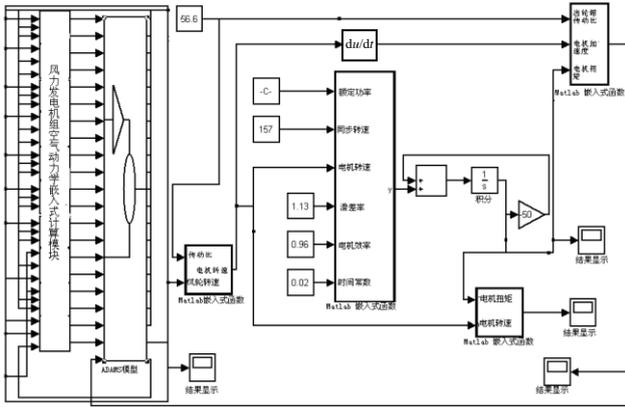
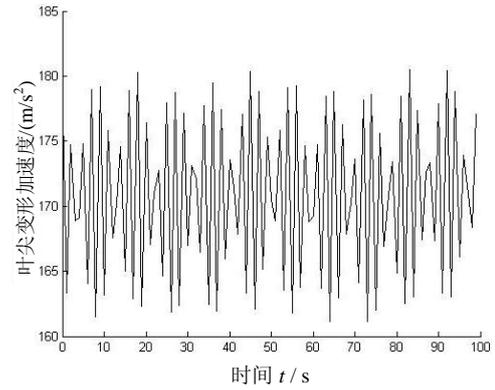


图4 联合仿真模型

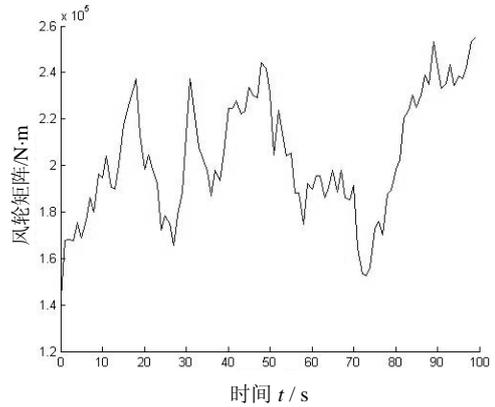
Fig.4 Model of the combine simulation

5 仿真分析结果及数据对比

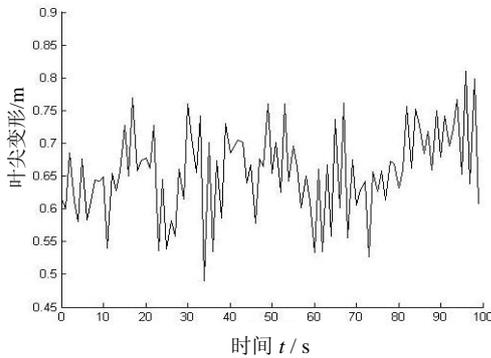
对某失速型风力机进行仿真，该风力机额定功率 600kW，基本结构采用三叶片上风向，叶轮直径 43.4m，叶片长度 19.2m，轮毂高度为 40m。分析在极端风速下，风轮叶片变形、塔架变形等振动特性的变化情况。



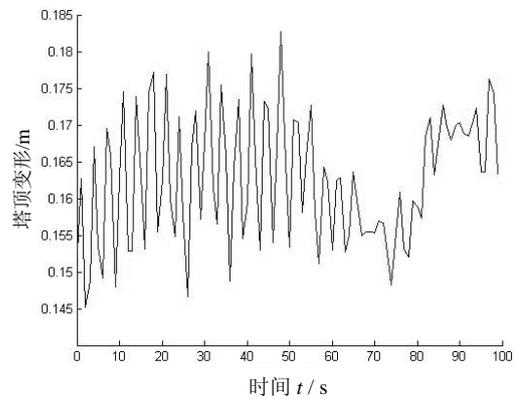
(c) 叶尖变形加速度



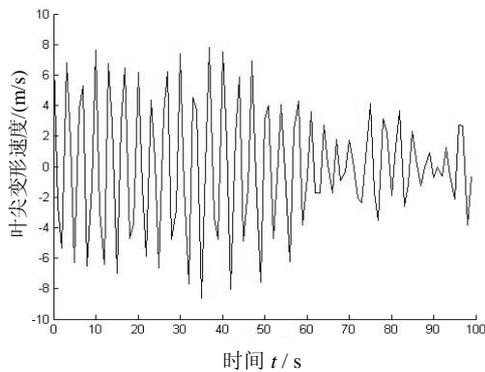
(d) 风轮的气动扭矩



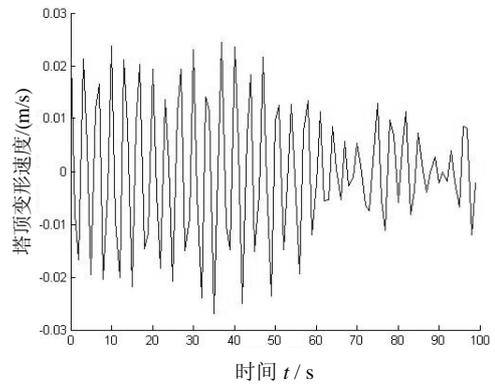
(a) 叶尖处的变形量



(e) 塔架顶端处的变形量



(b) 叶尖变形速度



(f) 塔架顶端处变形速度

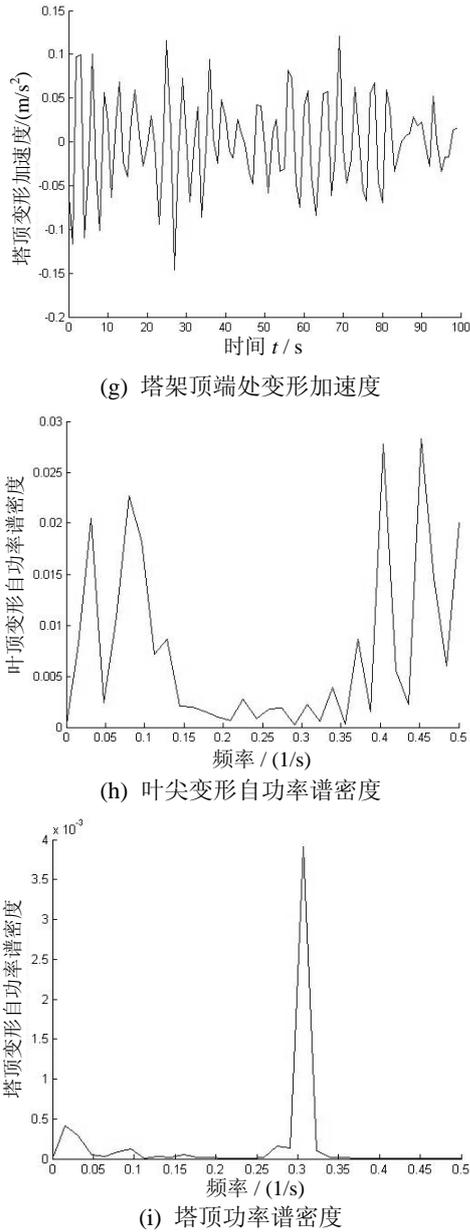


图 5 风力机振动特性

Fig.5 Vibration of the wind turbine

从图 5 可以看出，在极端风速下叶尖的振动较大，而塔架顶端(机舱处)的振动相对较小。

该计算数据同实验测试数据比较结果见表 2，从表 2 可以看出，计算结果是很接近的。该实验数据来自国内某风力发电机组设计制造公司。

表 2 风力机振动分析结果比较

Table 2 Comparison between calculated and experimental results

	计算结果			实验测试数据		
	变形量/ m	变形速度/ (m/s)	变形 加速度/(m/s ²)	变形量/ m	变形速度/ (m/s)	变形 加速度/(m/s ²)
叶尖	0.8	8	187	0.71	9.4	201
塔架	0.03	0.01	12	0.05	0.0075	17

6 结论

本文将仿真技术应用于风力发电机结构动力学分析，研究了风力发电机结构动力学仿真分析模型的建立方法。并对某失速型 600kW 风力发电机进行结构动力学分析，研究表明，该方法能较好的模拟风力发电机组的结构动力学性能。在风力机振动性能的研究中应用联合仿真技术，可以准确、实时地分析风力机的振动情况。本文以某型风力机为仿真对象，通过仿真并与实验测试数据对比，表明此本文的方法是有效的，为我国风力机产品的更新换代及优化设计进行了有益的探索。并得出以下结论：

(1) 由于叶片是一个柔性构件，风力机在工作中，尤其是在极端风况时叶尖处的变形速度、变形加速度是很大的，该处振动较剧烈。同时叶片上的气动载荷和叶片的运动是耦合的，因此叶尖处的振动加速度也是一个变化的量，该振动加速度是和叶片变形、叶片旋转运动耦合的。

(2) 风力机叶片处受到来自叶片的载荷，叶片的载荷随转速是一个周期性变化的过程，因此作用在塔顶处的位移、速度、加速度是一个周期变化的，由于塔架本身刚度较大，因此其振动相对叶片来说是很小的。

参考文献:

- [1] 陈彦. 大型水平轴风力机结构动力响应与稳定性研究 [D]. 北京: 清华大学, 1999.
Chen Yan. Study of structural dynamics response and stability of a horizontal axis wind turbine [D]. Beijing: Tsinghua University, 1999. (in Chinese)
- [2] 窦秀荣. 水平轴风力机气动性能及结构动力学特性研究[D]. 山东: 山东工业大学, 1995.
Dou Xiurong. Study of the aerodynamic performance and the structural dynamics behavior of a horizontal axis wind turbine [D]. Shandong: Shandong Industry University, 1995. (in Chinese)
- [3] Khan M J, Iqbal M T. Dynamic modeling and simulation of a small wind-fuel cell hybrid energy system [J]. Renewable Energy, 2005, 30(3): 421—439.
- [4] Tapia A, Tapia G. Modeling and control of a wind turbine driven doubly fed induction generator [J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2003, 18(2): 194—204.
- [5] Buhl Jr L. A new empirical relationship between thrust coefficient and induction factor for the turbulent windmill state [R]. Technical report NREL/TP-500-36834—August 2005.
- [6] Laino D J, Hansen A C. Current efforts towards improved

- aerodynamic modeling using the AeroDyn subroutines [C]. 2004 ASME Wind Energy Symposium, 42nd AIAA Aero. Sci. Mtg., AIAA 2004-0826.
- [7] Zhang Xinfang, Xu Daping, Liu Yibing. Predictive functional control of a doubly fed induction generator for variable speed wind turbines [C]. Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hongzhou, Zhejiang, 2004.
- [8] 谢峰, 赵吉文, 沈维蕾. 600kW 风力机塔架结构的仿真设计[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(1): 70—72.
Xie Feng, Zhao Jiwen, Shen Weilei. Simulating design of the tower structure for 600kW-wind turbine [J]. Journal of System Simulation, 2004, 16(1): 70—72. (in Chinese)
- [9] 林勇刚, 徐立, 李伟. 电液比例变桨距风力机半物理仿真试验台[J]. 中国机械工程, 2005, 16(8): 667—670.
Lin Yonggang, Xu Li, Li Wei. Semi-physical simulation test bed for electro-hydraulic proportional pitch controlled wind turbine system [J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(8): 667—670. (in Chinese)
- [10] 李德源, 叶枝全, 包能胜. 风力机旋转风轮振动模态分析[J]. 太阳能学报, 2004, 25(1): 72—77.
Li Deyuan, Ye Zhiquan, Bao Nengsheng. Vibration modal analysis of the rotating rotor of horizontal axis wind turbine [J]. Acta Energiae Solaris Sinica, 2004, 25(1): 72—77. (in Chinese)
- [11] 李德源, 叶枝全, 陈严. 风力机叶片载荷谱及疲劳寿命分析[J]. 工程力学, 2004, 21(6): 118—123.
Li Deyuan, Ye Zhiquan, Chen Yan. Load spectrum and fatigue life analysis of the blade of horizontal axis wind turbine [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(6): 118—123. (in Chinese)
- [12] 陆城, 许洪华. 风力发电用双馈感应发电机控制策略的研究[J]. 太阳能学报, 2004, 10(5): 606—611.
Lu Cheng, Xu Honghua. Study on the control strategy of doubly fed induction generators for wind energy generation [J]. Acta Energiae Solaris Sinica, 2004, 10(5): 606—611. (in Chinese)
- [13] 陈学顺, 许洪华. 双馈电机变速恒频风力发电运行方式研究[J]. 太阳能学报, 2004, 25(5): 582—586.
Chen Xueshun, Xu Honghua. Investigation of variable-speed constant frequency wind power generator operation [J]. Acta Energiae Solaris Sinica, 2004, 25(5): 582—586. (in Chinese)
- [14] 刘其辉, 贺益康, 赵仁德. 变速恒频风力发电系统最大风能追踪控制[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(20): 62—67.
Liu Qihui, He Yikang, Zhao Rende. Optimal wind energy capturing control for variable speed constant-frequency doubly-fed wind power generation system [J]. Automation of Electric Power Systems, 2003, 27(20): 62—67. (in Chinese)
- [15] 孙耀杰, 康龙云, 史维祥. 风机模拟器研究[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(3): 623—626.
Shun Yaojie, Kang Longyun, Shi Weixiang. Study of wind turbine systems simulator [J]. Journal of System Simulation, 2005, 17(3): 623—626. (in Chinese)

(上接第 27 页)

- [7] 寿楠椿, 竹学叶. 双参数地基板的分析[C]. 第三届全国计算力学大会论文集. 北京: 科学出版社, 1992: 368—371.
Shou Nanchun, Zhu Xueye. The analysis of plates on a two-parameter foundation model [C]. Proceedings of the 3rd National Conference on Computational Mechanics. Beijing: Science Press, 1992: 368—371. (in Chinese)
- [8] 竹学叶, 寿楠椿. 双参数弹性地基板研究综述[J]. 建筑结构, 1994(11): 28—31.
Zhu Xueye, Shou Nanchun. A summary of study of plates on a two-parameter foundation model [J]. Building Structure, 1994(11): 28—31. (in Chinese)
- [9] 王春玲, 黄义. 弹性半空间地基上四边自由矩形板的弯曲解析解[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(12): 1402—1407.
Wang Chunling, Huang Yi. An analytic solution of rectangular plates loaded vertical force on an elastic half space [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(12): 1402—1407. (in Chinese)
- [10] 严宗达. 结构力学中的富里叶级数解法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1989.
Yan Zongda. Fourier series method in structural mechanics [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1989. (in Chinese)
- [11] Davis P J, Rabinowitz P. 数值积分方法[M]. 冯振兴, 译. 北京: 高等教育出版社, 1986.
Davis P J, Rabinowitz P. Numerical integration methods [M]. Translated by Feng Zhenxing. Beijing: High Education Press, 1986. (in Chinese)
- [12] 王元汉, 邱先敏, 张佑启. 弹性地基板的等参有限元法计算[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(4): 7—11.
Wang Yuanhan, Qiu Xianmin, Zhang Youqi. Isotropic finite element computation of elastic foundation plate [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(4): 7—11. (in Chinese)