

文章编号: 1000-4750(2008)05-0022-05

受移动热源作用的两端固定杆的 广义热-弹耦合问题

*何天虎, 曹 丽, 周又和

(兰州大学力学系, 甘肃, 兰州 730000)

摘 要: 基于带有一个热松弛时间的 Lord-Shulman 广义热弹性理论, 研究了受移动热源作用的两端固定的均质各向同性杆的热-弹动态响应。该文给出了杆的广义热-弹耦合的控制方程, 借助拉普拉斯积分变换及其数值反变换对控制方程进行了求解。计算得到了杆内温度、应力及位移的分布规律, 从其分布图上可以看出, 温度、应力及位移随移动热源速度的增大而减小。

关键词: 热松弛时间; 广义热弹性理论; 热-弹耦合; 拉普拉斯积分变换; 双曲线型热传导

中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

GENERALIZED THERMOELASTIC COUPLED PROBLEM OF A ROD FIXED AT BOTH ENDS AND SUBJECTED TO A MOVING HEAT SOURCE

*HE Tian-hu, CAO Li, ZHOU You-he

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000, China)

Abstract: Based on the Lord and Shulman generalized thermo-elastic theory with one relaxation time, the dynamic thermal and elastic responses of an isotropic rod fixed at both ends and subjected to a moving heat source are investigated. The generalized thermoelastic coupled governing equations for the rod are formulated. By means of Laplace transformation and numerical Laplace inversion, the governing equations are solved. The numerical calculation for the stress, displacement and temperature within the rod is carried out and displayed graphically. The effect of moving heat source speed on the temperature, stress and temperature is studied. It is found from the distributions that the temperature, thermally induced displacement and stress of the rod are found to decrease at large source speed.

Key words: thermal relaxation time; generalized thermoelasticity theory; thermoelastic coupled; Laplace transformation; hyperbolic heat conduction

在经典热弹性理论中, 热在介质中是以无限大的速度进行传播的, 这与实验观测不相符。为了弥补经典热弹性理论的不足, 学者们发展了广义的热弹性理论, 广义热弹性理论能描述固体中的热以有

限的波速在介质中进行传播。目前, 主要有两种不同的广义热弹性理论: 一是 Lord 和 Shulman^[1](L-S) 广义热弹性理论; 二是 Green 和 Lindsay^[2](G-L) 广义热弹性理论。

收稿日期: 2006-10-21; 修改日期: 2007-07-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(10602021, 10472039); 中国博士后科学基金项目(20060400209)

作者简介: *何天虎(1973—), 男, 甘肃人, 副教授, 博士, 从事多物理场耦合、电磁固体力学研究(E-mail: heth@lut.cn);

曹 丽(1982—), 女, 辽宁人, 硕士生, 从事磁热弹多场耦合研究(E-mail: doudou0411@sohu.com);

周又和(1957—), 男, 湖北人, 教授, 博士, 院长, 长江学者, 中国力学学会甘肃分会理事长, 从事电磁固体力学、环境力学研究(E-mail: zhouyh@lzu.edu.cn).

由于移动热源在诸如冷作退火、脉冲激光切割及焊接、合金表面硬化及脆性材料加工等工程领域的广泛应用,利用经典或广义的热弹性理论,学者们已做了大量工作来研究受移动热源作用的弹性介质的温度响应及其变形和应力状态^[3-10]。其中文献[7]基于修正的热传导方程,研究了受移动热源作用的两端固定的有限长杆的动态响应问题。文中借助拉普拉斯变换首先从热传导方程直接求解得到了温度的表达式,而后将之代入本构方程得到了应力的表达式,方程的求解未体现各物理量的耦合。

在本文中,基于 L-S 理论,研究了两端固定的有限长均质各向同性杆受移动热源作用时的动态响应。本文与文献[7]最大的不同在于,本文考虑了各物理量的耦合,得到的是热-弹耦合的控制方程,对控制方程的求解过程也完全不同于文献[7]。

1 基本方程

对将要用到的各物理量进行如下说明: σ_{ij} 为应力分量; ε_{ij} 为应变分量; λ_{ij} 为热模量; κ_{ij} 为热传导系数; ρ 为质量密度; t 为时间; u_i 为位移分量; c_{ijkl} 为弹性常数; Q 为热源; T_0 为参考温度; T 为变温; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$; C_E 为常体积下的比热; λ 、 μ 为拉梅常数; α_t 为线性热膨胀系数; τ 为热松弛时间; θ 为温度改变量, $\theta = T - T_0$;

当不计体力时, L-S 型广义热弹性理论的控制微分方程如下:

a) 几何方程:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

b) 本构方程:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \lambda_{ij}T \quad (2)$$

c) 运动方程:

$$\sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i \quad (3)$$

d) 能量方程:

$$\kappa_{ij}T_{,ij} = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)(\rho C_E \dot{T} + T_0 \lambda_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} - Q) \quad (4)$$

上述方程中,物理量上方的点表示对时间微分,下方的逗号表示对坐标微分。

研究两端固定的有限细长杆,取坐标轴 x 方向沿其轴向。对于一维情形,各位移分量为:

$$u_x = u(x, t) \quad u_y = u_z = 0 \quad (5)$$

由于考虑的是一维情形,对于均质各向同性

杆,方程(2)–方程(4)可简化为:

$$\sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \theta \quad (6)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\rho C_E \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - Q \right) \quad (8)$$

为了简化上述方程,引入下面的无量纲量:

$$\begin{aligned} x^* &= c_0 \eta_0 x & u^* &= c_0 \eta_0 u & t^* &= c_0^2 \eta_0 t \\ \tau^* &= c_0^2 \eta_0 \tau & \theta^* &= \frac{\theta}{T_0} & \sigma^* &= \frac{\sigma}{\mu} \end{aligned} \quad (9)$$

$$Q^* = \frac{Q}{\kappa T_0 c_0^2 \eta_0^2} \quad c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \eta_0 = \frac{\rho C_E}{\kappa}$$

对方程(6)–方程(8)进行无量纲化,为了简便,去掉符号右上方的星号,无量纲化后的方程为:

$$\sigma = \beta^2 \frac{\partial u}{\partial x} - b \theta \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{b}{\beta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + g \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - Q \right) \quad (12)$$

式中, $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$, $b = \gamma T_0/\mu$, $g = \gamma/\rho C_E$ 。

为使问题成为定解问题,假定杆初始自由,有初始温度 T_0 且保持不变,则得到如下的初始条件:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \dot{u}(x, 0) = 0, \\ \theta(x, 0) &= \dot{\theta}(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

假定杆两端固定,杆端绝热,则可得到下面的边界条件(其中 l 为杆的无量纲的长度):

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

杆受到移动热源的作用,热源沿 x 轴正向且以一速度常量 v 移动,取无量纲形式的移动热源如下:

$$Q = Q_0 \delta(x - vt) \quad (15)$$

式中: Q_0 是常量; δ 是狄拉克(Dirac)函数。

应用下面的拉普拉斯变换公式:

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ \text{Re}(p) &> 0 \end{aligned} \quad (16)$$

对式(10)–式(12)进行拉普拉斯变换,得到:

$$\bar{\sigma} = \beta^2 \frac{d\bar{u}}{dx} - b\bar{\theta} \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{b}{\beta^2} \frac{d\bar{\theta}}{dx} = p^2 \bar{u} \quad (18)$$

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} = (1 + \tau p) \left(p\bar{\theta} + g p \frac{d\bar{u}}{dx} - w e^{-(p/\nu)x} \right) \quad (19)$$

式中, $w = Q_0/\nu$ 。

对边界条件(14)进行拉普拉斯变换, 可得:

$$\begin{aligned} \bar{u}(0, p) = \bar{u}(l, p) = 0 \\ \frac{d\bar{\theta}(0, p)}{dx} = \frac{d\bar{\theta}(l, p)}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

2 拉氏域中问题的求解

从式(18)和式(19)中消去 $\bar{\theta}$, 得到 $\bar{u}$ 满足的微分方程:

$$\frac{d^4\bar{u}}{dx^4} - m_1 \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + m_2\bar{u} = m_3 e^{-(p/\nu)x} \quad (21)$$

式中:

$$\begin{aligned} m_1 &= (1 + gb/\beta^2)(1 + \tau p)p + p^2, \\ m_2 &= p^3(1 + \tau p), m_3 = bwp(1 + \tau p)/\beta^2\nu. \end{aligned}$$

方程(21)的通解为:

$$\bar{u} = C_1 e^{-k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} + C_3 e^{-k_2 x} + C_4 e^{k_2 x} + C_5 e^{-(p/\nu)x} \quad (22)$$

式中, $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是 p 的参变量, 且 $C_5 = m_3/[(p/\nu)^4 - m_1(p/\nu)^2 + m_2]$ 。 k_1 和 k_2 是如下特征方程的根:

$$k^4 - m_1 k^2 + m_2 = 0 \quad (23)$$

由式(23), 可得 k_1 和 k_2 为:

$$k_1 = \sqrt{\frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}}, k_2 = \sqrt{\frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}} \quad (24)$$

从式(18)和式(19)中消去 $\bar{u}$, 得到 $\bar{\theta}$ 满足的微分方程:

$$\frac{d^4\bar{\theta}}{dx^4} - m_1 \frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} + m_2\bar{\theta} = m_4 e^{-(p/\nu)x} \quad (25)$$

式中, $m_4 = wp^2(1 + \tau p)(1 - 1/\nu^2)$ 。

方程(25)的通解为:

$$\bar{\theta} = C_{11} e^{-k_1 x} + C_{22} e^{k_1 x} + C_{33} e^{-k_2 x} + C_{44} e^{k_2 x} + C_{55} e^{-(p/\nu)x} \quad (26)$$

式中, $C_{ii} (i=1, 2, 3, 4)$ 是 p 的参变量。

把式(22)和式(26)代入式(18)中, 得:

$$\begin{aligned} C_{11} &= -A_1 C_1, C_{22} = A_1 C_2, C_{33} = -A_2 C_3, \\ C_{44} &= A_2 C_4, C_{55} = \frac{\beta^2 p(\nu^2 - 1)}{b\nu} C_5 \end{aligned} \quad (27)$$

式中, $A_i = \frac{\beta^2(k_i^2 - p^2)}{bk_i} \quad (i=1, 2)$

把式(22)和式(26)代入边界条件(14)中, 联立求得

$C_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} C_1 &= B_2 D_1 C_5, C_2 = -B_2 D_2 C_5, \\ C_3 &= -B_1 D_3 C_5, C_4 = B_1 D_4 C_5 \end{aligned} \quad (28)$$

式中: $B_i = \frac{k_i^2 - p^2/\nu^2}{k_1^2 - k_2^2} \quad (i=1, 2)$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{e^{k_1 l} - e^{-l}}{e^{k_1 l} - e^{-k_1 l}}, D_2 = -\frac{e^{-k_1 l} - e^{-(p/\nu)l}}{e^{k_1 l} - e^{-k_1 l}} \\ D_3 &= -\frac{e^{k_2 l} - e^{-(p/\nu)l}}{e^{k_2 l} - e^{-k_2 l}}, D_4 = \frac{e^{-k_2 l} - e^{-(p/\nu)l}}{e^{k_2 l} - e^{-k_2 l}} \end{aligned}$$

把 $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ 代入式(22)中, 得到:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= B_2 D_1 C_5 e^{-k_1 x} - B_2 D_2 C_5 e^{k_1 x} - B_1 D_3 C_5 e^{-k_2 x} + \\ &B_1 D_4 C_5 e^{k_2 x} + C_5 e^{-(p/\nu)x} \end{aligned} \quad (29)$$

由式(27)及式(26), 可得 $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= -A_1 B_2 D_1 C_5 e^{-k_1 x} - A_1 B_2 D_2 C_5 e^{k_1 x} + A_2 B_1 D_3 C_5 e^{-k_2 x} + \\ &A_2 B_1 D_4 C_5 e^{k_2 x} + \frac{\beta^2 p(\nu^2 - 1)}{b\nu} C_5 e^{-(p/\nu)x} \end{aligned} \quad (30)$$

由式(29)、式(30)及式(17), 可得:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= -\beta^2 p^2 B_2 D_1 C_5 e^{-k_1 x} - \beta^2 p^2 B_2 D_2 C_5 e^{k_1 x} + \\ &\beta^2 p^2 B_1 D_3 C_5 e^{-k_2 x} + \beta^2 p^2 B_1 D_4 C_5 e^{k_2 x} - \\ &\beta^2 p\nu C_5 e^{-(p/\nu)x} \end{aligned} \quad (31)$$

3 数值反变换

为了求得物理域中温度、位移和应力分布, 需对 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{u}$ 和 $\bar{\sigma}$ 进行拉普拉斯反变换。但由于所求得的 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{u}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的表达式十分复杂, 因此, 有必要采用 Riemann-sum^[11]方法来对其进行数值反变换。借助这种方法, 任何在拉普拉斯域中的函数 $\bar{f}(x, p)$ 都可以变换到时间域, 其公式如下:

$$f(x, t) = \frac{e^{\beta t}}{t} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(x, \beta) + \text{Re} \sum_{n=1}^N \bar{f} \left(x, \beta + \frac{i n \pi}{t} \right) (-1)^n \right] \quad (32)$$

式中: Re 指实部; i 是虚数单位; $\beta t \approx 4.7$ ^[11]。

4 算例及讨论

根据式(32), 借助拉普拉斯数值反变换可以得到杆中的无量纲温度、位移和应力。在计算中, 选择铜质材料进行数值计算, 其性能参数如下:

$$\begin{aligned} \lambda &= 7.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ \alpha_t &= 1.78 \times 10^{-5} / \text{K}, C_E = 383.1 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, \\ \rho &= 8954 \text{ kg/m}^3, T_0 = 293 \text{ K} \end{aligned}$$

计算中用到的其它参数如下:

$$Q_0 = 10, \quad \tau = 0.05, \quad l = 10$$

数值计算分别考虑两种不同的情形, 其一是热源速度不变, 所考虑时刻改变时各物理量的变化规律; 其二是所考虑时刻不变, 而热源速度改变时各物理量的变化规律, 并且考虑不同 τ 值对各物理量的影响, 计算得到的各物理量的分布规律见图 1—图 6。

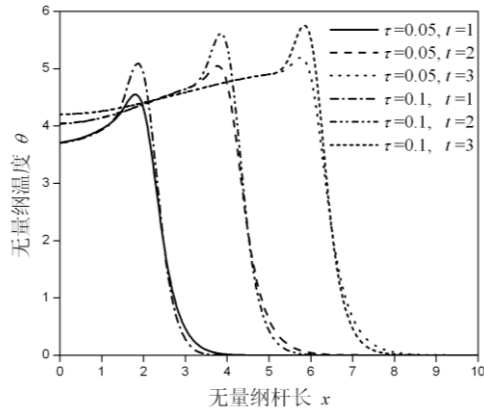


图 1 无量纲温度 θ 在热源速度 $v=2$ 时的变化规律
Fig.1 Non-dimensional temperature distributions at $v=2$

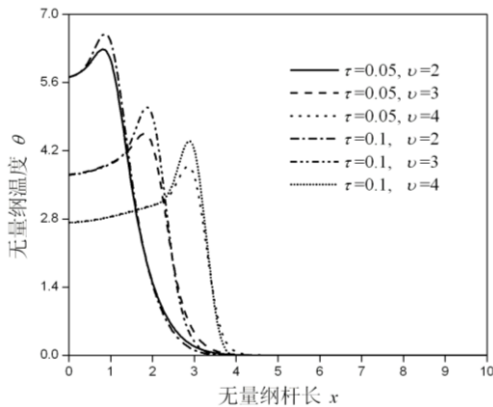


图 2 无量纲温度 θ 在时间 $t=1$ 时的变化规律
Fig.2 Non-dimensional temperature distributions at $t=1$

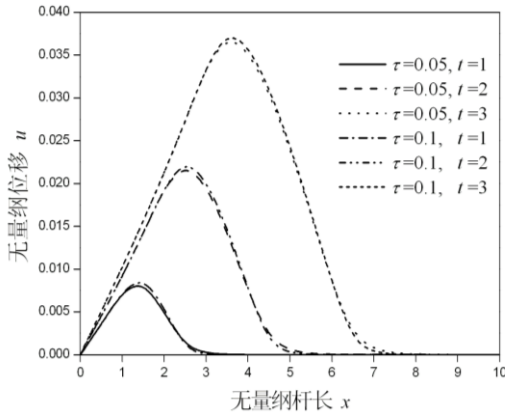


图 3 无量纲位移 u 在热源速度 $v=2$ 时的变化规律
Fig.3 Non-dimensional displacement distributions at $v=2$

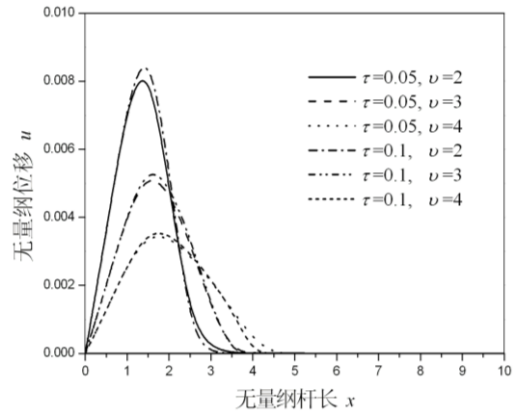


图 4 无量纲位移 u 在时间 $t=1$ 时的变化规律
Fig.4 Non-dimensional displacement distributions at $t=1$

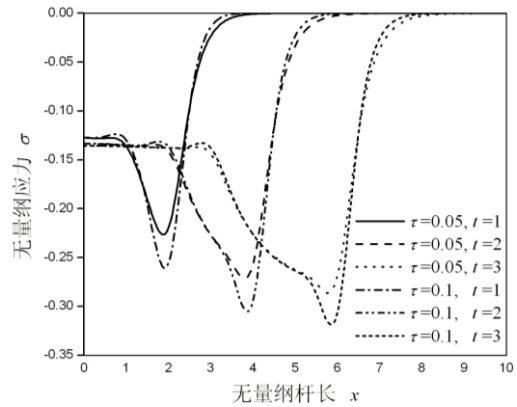


图 5 无量纲应力 σ 在热源速度 $v=2$ 时的变化规律
Fig.5 Non-dimensional stress distributions at $v=2$

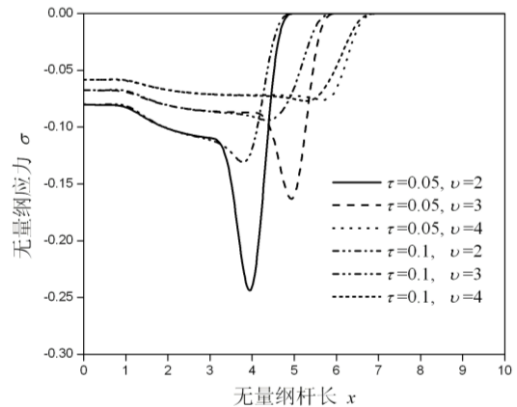


图 6 无量纲应力 σ 在时间 $t=1$ 时的变化规律
Fig.6 Non-dimensional stress distributions at $t=1$

图 1 给出了第一种情形下杆中无量纲温度的分布规律。从图 1 看到, 随着时间的增大杆中的温度也在增大; 在 $x=2$, $x=4$, $x=6$ 处温度分别达到它们的峰值, 由式(15)可以看出, 热源在时刻 t 移动到了杆中的 $x=vt$ 处, 由狄拉克函数的性质可以知道, 在 $x=vt$ 处热源释放出的热量最大, 从而导致此处的温度变得更大。

图 2 给出了第二种情形下杆中的无量纲温度分

布规律。从图 2 看到, 随着移动热源速度的增加, 杆中的温度在下降。这是由于在相同的时间段内, 热源释放出相同的热量, 然而随着热源速度的增加, 每单位长度释放的热量密度降低, 因此, 随着热源速度的增加, 在热扰动区域的各个位置所吸收的热量减少, 从而导致了杆中温度降低。图 3 和图 4 分别给出了两种情形下杆中无量纲位移的分布规律。从图 3 看到, 随着时间的增加位移也在增加。这表明随着时间的增加, 杆中的热扰动区域也在扩大。由于受移动热源作用, 杆发生热膨胀变形, 随着时间的增加, 热膨胀变形也在积聚, 因此, 位移增加。从图 4 可观察到, 随着移动热源速度的增加位移值减小, 这是由于速度的增加导致了杆中每单位长度所吸收的热量减少, 膨胀变形变小, 从而杆中的位移减小。从图 3 和图 4 可知, 在 $x = 0$ 和 $x = 10$ 处位移值为零, 这与两端固定杆的边界条件相符。

图 5 和图 6 分别给出了两种情形下杆中无量纲应力的分布规律。从图 5 看到, 在杆中产生压应力, 随着时间的增加应力绝对值也在增加。这是由于杆两端固定, 热膨胀变形受限制, 因此在杆中产生了压应力, 变形越大, 杆中的压应力的绝对值也越大。

从图 6 看到, 随着热源速度的增加杆中压应力的绝对值减小, 类似的理由如前所述。从图 1—图 6 中可以看到, 如果所考虑时刻 t 给定, 无量纲的温度、位移和应力的非零值仅在一个有限的区域内, 在这区域以外都为零, 这与经典的热传导理论是完全不同的, 它说明热是以波的形式以有限的速度、而不是以无限的速度在介质中进行传播的。

5 结论

基于 L-S 广义热弹性理论, 文中给出了杆的广义热-弹耦合控制方程, 借助拉普拉斯变换及其数值反变换对控制方程进行了求解。计算得到了杆内无量纲温度、应力及位移的分布规律。从图 1—图 6 可以得出以下结论

(1) 当所考虑时刻给定时, 无量纲温度、位移和应力的非零值只在一个有限的区域内, 超出这个区域, 其值都为零, 这与经典的热传导理论是完全不同的, 它说明热是以波的形式以有限的速度、而不是以无限的速度在介质中进行传播。

(2) 当时刻 t 给定时, 在 $x = vt$ 处, 无量纲温度达到峰值。

(3) 无量纲温度、位移和应力随着移动热源速度的增加而减少。

(4) 不同 τ 值对无量纲温度、位移和应力将会产生一定的影响, 但并不影响温度、位移、应力的变化趋势。

参考文献:

- [1] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1967, 15: 299—309.
- [2] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity [J]. *Journal of Elasticity*, 1972, 2(1): 1—7.
- [3] Malinowski L. Relaxation heat conduction and generation: An analysis of the semi-infinite body case by method of Laplace transforms [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1996, 39(7): 1543—1549.
- [4] Kidawa-kukla J. Vibration of a beam induced by harmonic motion of a heat source [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 205: 213—222.
- [5] Abd-alla A M. On a generalized thermoelastic interaction in an unbounded body due to a line heat source [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1999, 100: 285—295.
- [6] Sherief H H, Megahed F A. A two dimensional thermoelasticity problem for a half space subjected to heat sources [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36: 1369—1382.
- [7] Al-hunuti N S, Al-nimr M A, Naji M. Dynamic response of a rod due to a moving heat source under the hyperbolic heat conduction model [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242(4): 629—640.
- [8] Torii S, Yang W J. Heat transfer mechanisms in thin film with laser heat source [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005, 48: 537—544.
- [9] Lewandowska M, Malinowski L. An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides [J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2006, 33: 61—69.
- [10] Araya G, Gutierrez G. Analytical solution for a transient, three-dimensional temperature distribution due to a moving laser beam [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49: 4124—4131.
- [11] Tzou D. Macro-to-microscale heat transfer [M]. Washington, D C: Taylor and Francis, 1997.