

文章编号: 1000-4750(2008)02-0224-06

漂浮基双臂空间机器人基于自适应遗传算法的最优非完整运动规划

*唐晓腾, 陈 力

(福州大学机械工程及自动化学院, 福州 350002)

摘 要: 讨论了漂浮基双臂空间机器人非完整运动的最优控制规划问题。以多体动力学理论为基础, 导出了载体位置、姿态均不受控制情况下, 双臂空间机器人耦合了系统动量守恒关系的系统动量矩守恒关系, 并将其转化为控制系统状态方程。由此, 将双臂空间机器人的非完整运动规划问题转化为非线性系统的控制问题。以此为基础, 利用近似优化的方法, 给出了双臂空间机器人基于自适应遗传算法的最优非完整运动规划控制算法。其优点在于, 仅需要控制双臂空间机器人机械臂的关节运动, 即可达到对载体姿态及机械臂关节位置的双重控制效果。一个平面双臂空间机器人系统的数值仿真, 验证了算法的有效性。

关键词: 漂浮基双臂空间机器人; 非完整运动规划; 最优控制; 自适应遗传算法; 关节空间

中图分类号: TP241 **文献标识码:** A

OPTIMAL NONHOLONOMIC MOTION PLANNING OF SPACE ROBOT SYSTEM WITH DUAL-ARMS USING ADAPTIVE GENETIC ALGORITHM

*TANG Xiao-teng, CHEN Li

(College of Mechanical Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: The optimal nonholonomic motion planning of free-floating space robot system with dual-arms is discussed. Base on the linear and angular momentum conservations of the system, the system state equations for control design are established, so the nonholonomic motion planning objective of attitude control of space robot system is translated as the solution for a canonical nonlinear control problem. The proposed optimal control scheme of the system is studied, and an adaptive genetic algorithm for computing approximate optimal control of the system is developed. The proposed optimal motion planning approach possesses the advantages which can obtain the desired angles of the base's attitude and arms' joints only by controlling the arms' joints motion. A planar free-floating space robot system with dual-arms is simulated to verify the proposed approach.

Key words: space robot system with dual-arms; attitude control; optimal motion planning; adaptive genetic algorithm; joint space

作为未来空间活动的重要工具, 空间机器人的重要作用已在国际空间站的组建过程中得到有效体现^[1]。其相关研究也早已受到人们的广泛关注^[2-7]。考虑到太空中姿态控制燃料的宝贵及喷气

装置的使用对相机镜头及太阳能电池板的污染效应, 使用载体位置、姿态均不受控制的自由浮动空间机器人系统非常必要。其虽然增加了系统运动学、动力学分析及控制系统设计的难度, 但也为系

收稿日期: 2006-05-29; 修改日期: 2007-03-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(10372022, 10672040); 福建省自然科学基金项目(E0410008)

作者简介: *唐晓腾(1974—), 男, 福建福州人, 博士生, 主要从事空间机器人动力学与控制研究(E-mail: Tang_xt@163.com);

陈 力(1961—), 男, 江西九江人, 教授, 博士, 博导, 主要从事空间机器人动力学与控制研究(E-mail: Chnle@fzu.edu.cn).

统运动学规划提供了可以加以利用的非完整动力学冗余度。如 Fernandes C^[8-9]等利用这一非完整动力学性质给出了空间机器人关节运动规划的最优控制算法; Nakamura Y^[10]等提出了空间机器人非完整运动规划的双向 Lyapunov 方法。本文基于上述非完整动力学性质, 讨论了双臂空间机器人系统姿态调整运动的最优控制规划问题。为此, 以多体动力学理论为基础, 导出了载体位置、姿态均不受控制情况下, 自由浮动双臂空间机器人系统的动量矩守恒关系, 并将这一关系转化为控制系统状态方程。由此将空间机器人姿态调整运动的非完整运动规划问题转换为非线性控制问题。利用近似优化的方法, 采用自适应遗传算法进行求解, 实现了一种双臂空间机器人姿态、关节协调运动的最优控制算法。其优点在于: 仅需要控制双臂空间机器人的关节运动, 即可同时获得载体姿态及机械臂关节需要的终端位置。通过对一个平面双臂空间机器人系统进行的数值仿真验证了算法的有效性。

1 系统动力学方程

如图 1 所示, 设平面双臂空间机器人系统由自由浮动的载体 B_0 及机械臂 B_1 、 B_2 、 B_3 和 B_4 组成, 各部分间均以转动铰联结, 系统总质心为 C 。建立平动的惯性坐标系 ($O-XY$), 并以各分体质心 C_i 为基点建立连体基坐标系 ($C_i-X_iY_i$); 其中 X_i 轴线方向沿各分体 B_i 前后铰点的连线方向。设各分体的质量和中心惯量张量分别为 m_i 、 J_i , 各分体质心 c_i 相对于总质心 C 及惯性坐标系原点 O 的矢径分别为 ρ_i 、 r_i ; 总质心 C 到惯性坐标系原点 O 的矢径为 r_c , 即有: $r_i = r_c + \rho_i$ 。

以载体姿态角以及机械臂之间的相对转角 θ_0 、 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 作为系统广义坐标, 各分体相对惯性坐标系的转动角速度为 ω_i , 则有:

$$\omega_i = \dot{\theta}_0 + \sum_{j=1}^4 p_j \dot{\theta}_j \quad (1)$$

其中 p_j 为各转动铰轴的基矢量。

由于空间机器人系统为无外力作用的自由漂浮无根多体系统, 忽略微弱的重力梯度, 系统相对惯性坐标系的动量及动量矩保持为常量。不失一般性, 设系统的初始动量、动量矩为零。则相对于平动的惯性坐标系 ($O-XY$), 系统总质心 C 保持静止不动, 即系统相对总质心 C 的动量矩为零, 则有^[11]:

$$L_C = \sum_{i=0}^4 (J_i \cdot \omega_i + m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i) = 0 \quad (2)$$

整理后, 式(2)可简化为:

$$\sum_{i=0}^4 I_i \cdot \omega_i = 0 \quad (3)$$

其中, $I_i = J_i + m_i[(\rho_i \cdot \rho_i)E - \rho_i \rho_i]$ 为各分体 B_i 相对总质心 C 的等效惯量张量。

将式(1)代入式(3), 最终得到:

$$\dot{\theta}_0 = K[\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4]^T \quad (4)$$

其中 $K = (K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4)$ 为 θ_i 的函数。

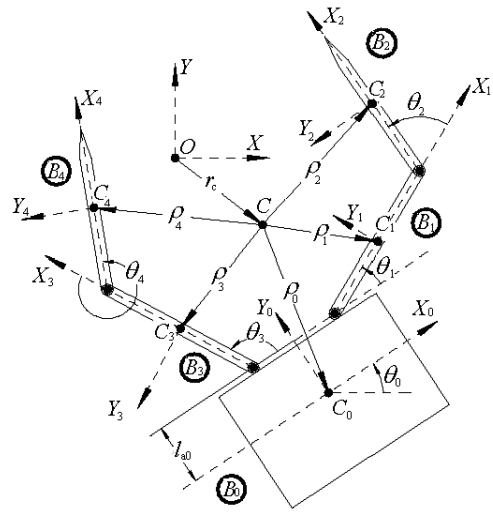


图 1 双臂空间机器人系统

Fig.1 A planar space robot system with dual-arms

2 控制系统状态方程

为了控制系统设计的需要, 我们需将式(4)所表示的系统动力学方程转化为系统控制方程。为此, 定义 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 、 $\dot{\theta}_3$ 、 $\dot{\theta}_4$ 为系统的控制输入:

$$u(t) = (\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4)^T = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T.$$

定义 $x = (\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4)^T$ 为系统状态变量及控制输出变量。由式(4), 系统状态方程可写作:

$$\dot{x} = K^*(x)u(t) \quad (5)$$

其中 $K^*(x) = \begin{bmatrix} K \\ E \end{bmatrix}$ (E 为 4×4 单位矩阵)。

很多文献[8-10]讨论、证明了如式(5)所示的控制系统满足能控性条件, 在此我们就不做更多的讨论、说明了。

由此, 双臂空间机器人系统的非完整运动规划问题, 已转化为形如式(5)所示的非线性控制系统状态方程的求解问题。这样, 对于给定的双臂空间机器人系统的两个位形, 即初始位形 x_0 和终了位形

$\mathbf{x}_f$; 通过选取不同的优化指标, 寻找相应的最优控制输入 $\mathbf{u}(t)$, 得到从 $\mathbf{x}_0$ 到 $\mathbf{x}_f$ 的相应最优轨线, 从而实现基于最优控制的双臂空间机器人系统的非完整运动规划。

3 最优控制的近似优化方法

3.1 状态方程的线性近似

针对系统状态方程(5)的非线性性质, 考虑到 $\mathbf{u}(t)$ 为希尔伯特空间 L_2 的可测向量函数, 采用傅里叶向量 $\{a_i(t)\}_{i=1}^N$ 来进行线性近似。令 $\Phi = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)]$, 则有:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \alpha_i = \Phi \alpha \quad (6)$$

经过以上变换, 控制变量从 $\mathbf{u}$ 转变为 α , 得到线性近似的系统状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = K^* \Phi \alpha_n, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7)$$

3.2 指标函数的确定

根据最小能量控制原理, 以机械臂关节耗散能最小作为控制指标, 性能指标函数为:

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{u}) dt \quad (8)$$

由于系统是能控的, 则对于双臂空间机器人系统可以通过寻找容许控制 $\mathbf{u}(t) \in L_2$, 使系统式(7)从已知的起始状态 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 转移到终了状态 $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_f$, 并保证性能指标——机械臂关节耗散能式(8)取最小值。

考虑起始和终止状态的约束条件, 将指标函数 $J(u)$ 增广为:

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \lambda \|\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_f\|^2 \quad (9)$$

其中 λ 为罚因子。

可以证明, 当 N 、 λ 趋向于无穷时, 式(9)与式(8)有相同的最优解^[2]。其中, $\mathbf{x}(T)$ 为式(7)由控制输入 $\Phi(t)$ 在 $t=T$ 时的解, 是 $\alpha \in R^N$ 的函数, 可以重写为 $f(\alpha) = \mathbf{x}(T)$ 。给定 N 和 λ , 则式(9)可写为如下最终形式的目标函数:

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \lambda \|f(\alpha) - \mathbf{x}_f\|^2 \quad (10)$$

于是在状态方程(5)下寻找控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 使方程(8)最小的问题转化为在状态方程(7)下, 寻找 α 使指标函数式(10)为最小。

首先通过采用无约束算法对变换后的系统求得最优控制 α , 然后将 α 代入方程(6), 就可以得到

状态方程(5)的最优控制 $\mathbf{u}(t)$ 。

遗传算法的思想源于生物进化的“优胜劣汰”的自然规律, 它研究的对象不要求连续, 也不要求可微, 特别适合于非凸空间中复杂的优化问题。下面, 我们采用基于实数编码的自适应遗传算法进行系统最优控制的求解。

4 实数编码的自适应遗传算法

本文采用自适应遗传算子和自适应选取初始区间等技术, 设计了基于实数编码的自适应遗传算法, 求解空间机器人系统非完整运动规划问题。

4.1 染色体编码以及群体

为了提高效率, 我们采用 $[-2.048, 2.048]$ 区间的实数编码。通过在区间内随机生成 n 个实数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 为初始群体, 其中 n 为编码长度。仿真中编码长度取 20。染色体群体大小为 50。

4.2 适应度函数

适应度函数取为:

$$F_i = J_n - J_i + \varepsilon(J_n + J_1), \quad i=1, 2, \dots, n。$$

其中: J_i 为对应于各个染色体的目标函数; J_n 是目标函数的极大值, J_1 为极小值; ε 为控制参数, 建议取为 0.01—0.02 之间。显然, 由于目标函数的极大极小值随着群体变化而变化, 由此导出的遗传算子具备了自适应性, 从而加速了收敛。

4.3 遗传算子

遗传算子由选择、杂交和变异三部分组成。

1) 选择算子。

选择算子体现了进化进程中“适者生存”法则。在这里, 群体中每一个染色体被选中的概率取为:

$$p_s(i) = F_i / \sum_{j=1}^N F_j。$$

由于选择概率是随着群体的变化而变化的, 因此具备了自适应性。

2) 杂交算子。

杂交算子体现了生物遗传中染色体交换基因的过程。这里采用区间 $[0, 1]$ 中的随机数 $p_c(i)$ 作为各个染色体的杂交概率。

3) 变异算子。

变异算子实现了生物在进化过程中基因突变的原理, 在遗传算法中发挥着非常重要的作用。各个染色体的变异概率取为 $p_m(i) = 1 - p_s(i)$ 。由于 $p_m(i)$ 是随着每代群体而变化着的, 因此也具备了自适应性。

通过采用上述的实数编码的自适应遗传算法, 我们获得了在任意初始与终止位形 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ 下的最优解。

5 系统数值仿真

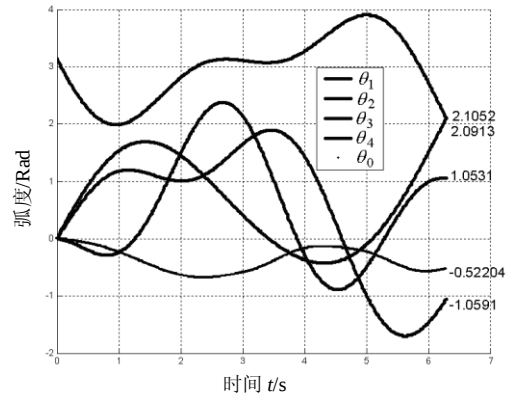
为了证实上述近似优化方法对双臂空间机器人系统非完整运动规划应用的有效性, 利用上述算法进行系统数值仿真。

仿真时, 系统结构如图 1 所示。设各分体的几何长度分别为: $L_0 = 2\text{m}$, $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 2\text{m}$, $l_a = 0.2\text{m}$; 各分体的质量: $m_0 = 40\text{kg}$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 4\text{kg}$; 中心惯量张量: $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 1.25\text{kg} \cdot \text{m}^2$, $J_0 = 6.67\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。系统运动时间设定为 2π , 即 $T = 2\pi$; 迭代误差精度设定为 10^{-3} 。

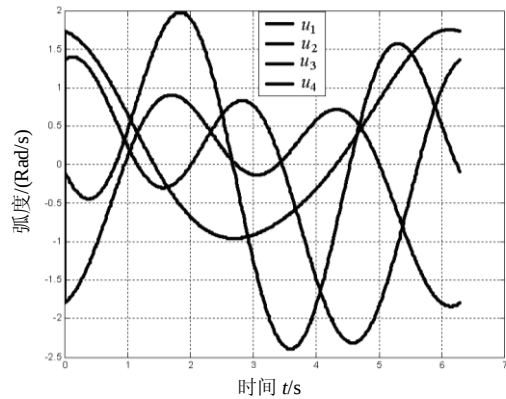
在后面的四个仿真算例中, 均采用如下的傅里叶正交基矢量对 $\mathbf{u}(t)$ 做优化拟合:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_4 &= \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_9 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_{14} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_{16} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{17} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \quad \alpha_{18} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \\ \alpha_{19} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad \alpha_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos(2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

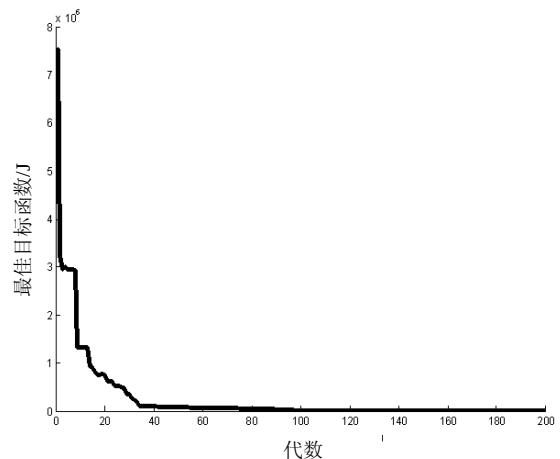
算例 1. 令系统从初始位形 $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$, 运动到终止位形 $\mathbf{x}(T) = [-\pi/6 \ 2\pi/3 \ \pi/3 \ 2\pi/3 \ -\pi/3]^T$, 图 2(a)为利用上述算法得到的载体姿态角及机械臂关节角的优化轨迹; 图 2(b)为相应的机械臂关节最优控制输入规律; 图 2(c)为目标函数。



(a) 空间机器人系统优化轨迹



(b) 空间机器人系统最优控制输入



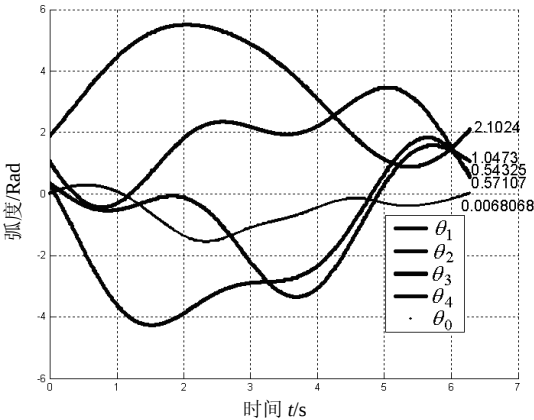
(c) 目标函数

图 2 算例 1

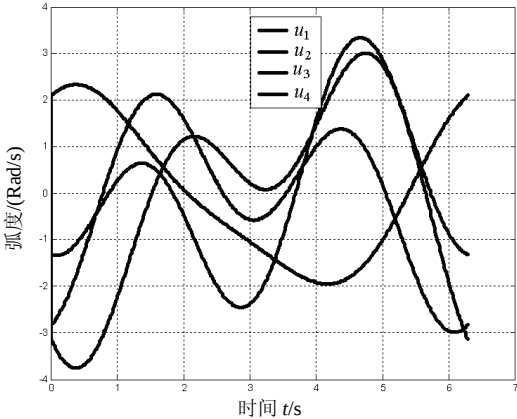
Fig.2 Example 1

算例 2. 令系统从初始位形态 $\mathbf{x}(0) = [0 \ \pi/3 \ \pi/9 \ 3\pi/5 \ \pi/10]^T$ 转移到终止状态 $\mathbf{x}(T) = [0 \ \pi/6 \ \pi/3$

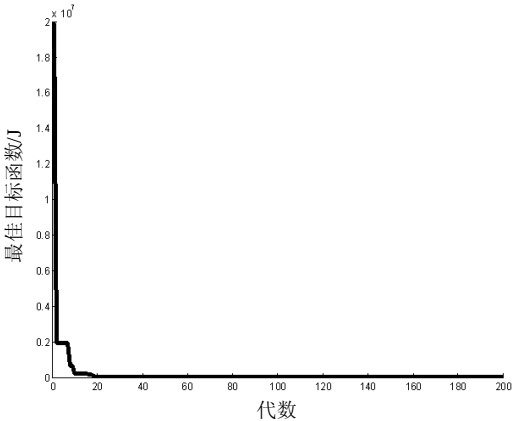
$2\pi/3 \ \pi/6]^T$ 。图 3(a)为利用上述算法得到的载体姿态角及机械臂关节角的优化轨迹；图 3(b)为相应的机械臂关节最优控制输入规律；图 3(c)为目标函数。



(a) 空间机器人系统优化轨迹



(b) 空间机器人系统最优控制输入



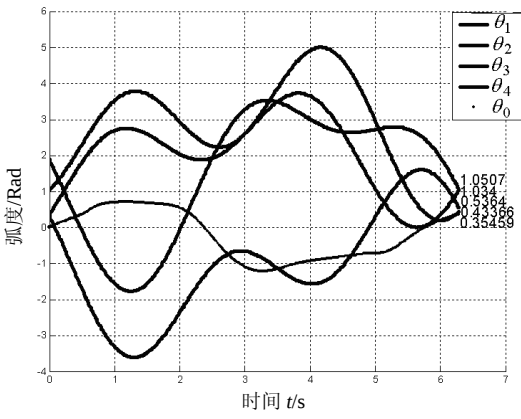
(c) 目标函数

图 3 算例 2

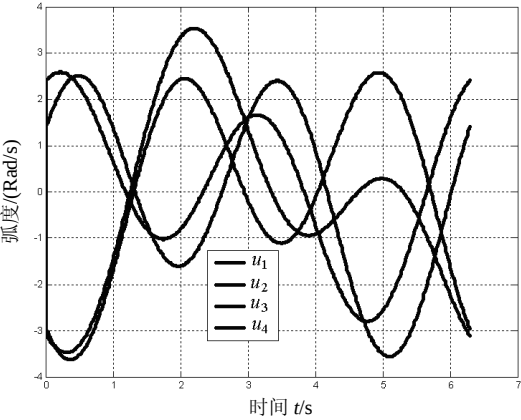
Fig.3 Example 2

算例 3. 令系统从初始位形态 $\mathbf{x}(0)=[0 \ \pi/3 \ \pi/9 \ 3\pi/5 \ \pi/10]^T$ 转移到终止状态 $\mathbf{x}(T)=[\pi/9 \ \pi/7 \ \pi/3 \ \pi/3 \ \pi/6]^T$ ，图 4(a)为利用上述算法得到的载体姿态角及机械臂关节角的优化轨迹；图 4(b)为相应的

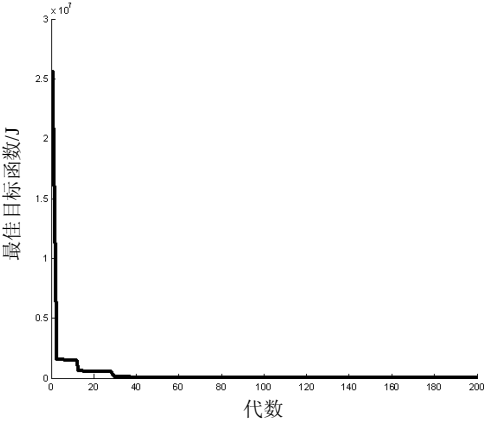
机械臂关节最优控制输入规律；图 4(c)为目标函数。



(a) 空间机器人系统优化轨迹



(b) 空间机器人系统最优控制输入



(c) 目标函数

图 4 算例 3

Fig.4 Example 3

6 结论

本文讨论了双臂空间机器人系统姿态调整运动基于自适应遗传算法的最优控制规划问题。以多体动力学理论为基础，导出了载体位置、姿态均不受控制情况下，双臂空间机器人系统的动量矩守恒关系，并将其转化为系统状态方程；由此，空间机

机器人的姿态调整运动的非完整运动规划问题就转换为非线性控制问题。利用近似优化的方法,采用自适应遗传算法进行求解,实现了一种双臂空间机器人姿态、关节协调运动的最优控制算法。其优点在于,仅需要控制双臂空间机器人的关节运动,即可同时获得载体姿态及机械臂关节需要的终了位置。通过对一个平面双臂空间机器人系统进行的数值仿真,结果表明了算法的有效性。

参考文献:

- [1] Lindsay Evans. Canadian space robotics on board the international space station [C]. 2005 CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines, and Mechatronics. Canadian Space Agency, Montreal, Canada, 2005.
- [2] Gu Y L, Xu Y S. A normal form augmentation approach to adaptive control of space robot systems [J]. *Journal of the Dynamics and Control*, 1995(5): 275—294.
- [3] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
Liu Yanzhu. Dynamics of spacecraft attitude [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995. (in Chinese)
- [4] 李俊峰, 王照林. 带空间机械臂的充液航天器姿态动力学研究[J]. *宇航学报*, 1999, 20(2): 81—86.
Li Junfeng, Wang Zhaolin. Study on attitude dynamics of a liquid filled spacecraft with manipulators [J]. *Journal of Astronautics*, 1999, 20(2): 81—86. (in Chinese)
- [5] 陈力. 带滑移铰空间机械臂惯性空间轨迹的复合自适应跟踪控制[J]. *空间科学学报*, 2003, 23(1): 60—67.
Chen Li. Composite adaptive control of space manipulator system with prismatic joint [J]. *Chinese Journal of Space Science*, 2003, 23(1): 60—67. (in Chinese)
- [6] 陈力, 刘延柱. 空间机器人姿态与末端抓手协调运动的鲁棒自适应控制[J]. *工程力学*, 2002, 19(2): 165—170.
Chen Li, Liu Yanzhu. The robust adaptive control of coordinated motion of space-based robot system [J]. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(2): 165—170. (in Chinese)
- [7] 戈新生, 陈立群, 吕杰. 空间机械臂非完整运动规划的遗传算法研究[J]. *宇航学报*, 2005, 26(3): 262—266.
Ge Xinsheng, Chen Liqun, Lu Jie. Nonholonomic motion planning of a space manipulator system using genetic algorithm [J]. *Journal of Astronautics*, 2005, 26(3): 262—266. (in Chinese)
- [8] Fernandes C, Gurvits L, Li Z. Near-optimal non-holonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(3): 450—463.
- [9] Fernandes C, Gurvits L, Li Z. Attitude control of a space platform manipulator system using internal motion [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1994, 13(4): 289—304.
- [10] Nakamura Y, Mukherjee R. Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1991, 7(4): 500—514.
- [11] 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多刚体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989. 155—164.
Liu Yanzhu, Hong Jiazhen, Yang Haixing. Dynamics of multi-body systems [M]. Beijing: Higher Education Press, 1989. 155—164. (in Chinese)

(上接第 223 页)

- [6] 刘向君, 叶仲斌, 王国华. 流体流动和岩石变形耦合对井壁稳定性的影响[J]. *西南石油学院学报*, 2002, 24(2): 50—52.
Liu Xiangjun, Ye Zhongbin, Wang Guohua. Effects of fluid-flow and rock-deformation coupling on wellface stability [J]. *Journal of Southwest Petroleum Institute*, 2002, 24(2): 50—52. (in Chinese)
- [7] 王炳印, 蔚宝华, 邓金根. 温度及渗流对疏松砂岩储层钻井液密度窗口的影响规律研究[J]. *钻井液与完井液*, 2005, 22(4): 40—42.
Wang Bingyin, Wei Baohua, Deng Jingen. Temperature and seepage effects on safe mud window of unconsolidated sand reservoir formation [J]. *Drilling Fluid & Completion Fluid*, 2005, 22(4): 40—42. (in Chinese)
- [8] 蔚宝华, 卢晓峰, 王炳印. 高温井地层温度变化对井壁稳定性影响规律研究[J]. *钻井液与完井液*, 2004, 21(6): 15—18.
Wei Baohua, Lu Xiaofeng, Wang Bingyin. Law of temperature influence on wellbore stability in hot well [J]. *Drilling Fluid & Completion Fluid*, 2004, 21(6): 15—18. (in Chinese)
- [9] Rice J R, Cleary M P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents [J]. *Review of Geophysics and Space Physics*, 1976, 14(2): 227—241.
- [10] Noorishad J, Tsang C F. Coupled thermohydroelasticity phenomena in variably saturated fractured porous rocks-formulation and numerical solution [C]// Stephansson O, Jing L, Tsang C F. *Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Processes of Fractured Media*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1996, 93—134.
- [11] McTigue D F. Flow to a heated borehole in porous, thermoelastic rock: Analysis [J]. *Water Resource Research*, 1990, 26(8): 1763—1774.