

文章编号: 1000-4750(2006)Sup.I-0128-06

混凝土桥梁损伤识别的理论与试验研究

*赵启林, 李志刚, 陈浩森

(解放军理工大学工程兵工程学院, 南京 210007)

摘 要: 针对目前桥梁损伤识别理论受到测量误差、环境随机因素与模型误差等影响识别精度低的缺点, 利用数理统计与随机分析的基本理论, 提出进行混凝土桥梁裂缝等损伤识别的新理论方法; 该方法首先寻找监测响应量的主要影响因素作为原因量, 其次建立原因量与响应量的统计模型, 最后利用预测模型进行判别是否发生损伤; 利用该方法可以有效地考虑环境随机因素、测量误差等不确定因数, 避免结构分析的计算模型误差, 因而可以有效地提高进行损伤识别的精度; 两根钢筋混凝土小梁模型试验证实了本理论的正确性。

关键词: 混凝土桥梁; 损伤识别; 统计模型; 随机分析; 理论与试验研究

中图分类号: TU318 文献标识码: A

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS ON DAMAGE IDENTIFICATION OF CONCRETE BRIDGES

*ZHAO Qi-lin, LI Zhi-gang, CHEN Hao-sen

(Engineering Institute of Engineering Corps, PLA University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210007, China)

Abstract: The methods for bridge damage identification are usually of low precision due to measurement errors, random environmental factors and model errors. Fundamental theories of statistics and random analysis are used to develop a new method that identifies damages such as cracking of concrete bridges. The proposed method firstly identifies the main factors that affect the monitoring response magnitude and regards them as the major cause. A statistical model is then established to relate the magnitudes of response and cause used to predict the health of a structure. Using this method uncertainties such as random environment factors, measurement errors and so on can be effectively considered, and the calculative model error in structure analysis can also be avoided. The precision of damage identification can be effectively improved. Model tests of two concrete beams demonstrate the effectiveness of the proposed model.

Key words: concrete bridge; damage identification; statistical model; random analysis; theoretical and experimental investigations

为了便于损伤识别的实现, 结构损伤识别往往被分解为损伤出现识别、损伤位置识别、损伤性质识别与损伤程度识别四个步骤, 而损伤出现的识别往往是损伤识别的前提^[1]。目前桥梁上的损伤识别无论是基于动力信息还是基于静力信息, 无论是神

经网络方法、力学参数反分析法还是模式识别法, 其中都是利用确定性的结构分析模型在确定性的荷载条件与边界条件进行损伤识别, 这样这些方法都存在共同的缺点: 即无法考虑荷载、几何参数与力学参数的随机性, 无法考虑进行结构应变、挠度

收稿日期: 2005-05-06; 修改日期: 2005-10-27

作者简介: *赵启林(1972), 男, 江苏淮安人, 副教授, 博士, 从事桥梁工程研究(E-mail: zhaohsq1919@163.com);

李志刚(1972), 男, 四川崇州人, 副教授, 博士, 从事桥梁工程研究;

陈浩森(1981), 男, 江苏盐城人, 讲师, 硕士, 从事桥梁工程研究。

与加速度等变量测量时存在的测量误差,因而导致在实际工程中难以应用^[2,3]。其次是目前理论计算模型目前还不能完全反映实际情况,尤其是对混凝土徐变、温度效应影响的数值模拟均存在较大误差,利用这些模型对正常结构进行长期变形的预测都存在较大误差,因而利用这些理论模型更难以对混凝土桥梁可能出现的损伤进行识别。同时,尽管相关研究表明利用静力信息比利用动力信息进行损伤识别更为有效^[4],但由于可以利用自然环境激励进行结构动力特性测量,不影响交通,而静力荷载试验时影响交通,因而大量的理论与工程应用都集中在如何利用结构动力信息进行损伤识别。本文针对以上两个问题,基于数理统计与随机分析理论,提出了利用桥梁自重响应信息在不影响交通、综合考虑环境随机性和测量误差、避免结构分析模型误差的情况下进行桥梁损伤的识别。

1 损伤发生识别的基本思路

该方法主要是基于数理统计与随机分析理论提出的,基本思路是:首先根据桥梁运营初期,结构完好状态下采集得到的大量结构环境变量与响应变量的大量样本,采用统计方法建立环境变量与响应变量之间的函数关系,目前根据样本建立函数关系的方法主要有逐步线性回归与神经网络法等;在结构是否异常识别阶段,将实测环境量代入以上函数,得到计算响应量,而后计算实测响应量与计算量的差值,将这个差值与事先拟订的标准进行比较,当超出标准范围,则认为结构有异常,否则认为结构正常。对混凝土桥梁而言其基本过程如下:

(1) 分析结构工作性态和力学机理,寻找监测响应量的主要影响因素作为原因量。对于混凝土桥梁除结构自身特性,影响结构响应的有众多的环境因素,包括荷载、温度、时间、风与湿度等。在实际应用中通行荷载往往难以确定,并对桥梁响应有决定性的影响。而混凝土桥梁的自重往往可占设计荷载的 70%~80%,并在使用期内基本不变化,于是可以在结构建设初期在桥梁内部设置进行结构响应测量的传感器,采集由于结构自重导致的结构响应,在结构运行期可以利用荷载通行间隙快速进行自重下结构响应采集,这样荷载这个影响因子可以作为一个固定值而不加以考虑;对于混凝土桥梁,时间与温度都是结构响应的重要影响因素;而风荷载引起的震动将主要取决于结构的刚度,在一

些跨度较小、刚度的混凝土桥梁可以不予以考虑,或在桥梁现场设置风速与风向的测量仪器;湿度对结构的响应需要进一步地研究加以确定,后面的试验将说明其对结构响应没有什么影响。

(2) 建立原因量与响应量的统计模型。建立从原因量(荷载、温度、时间、风力、湿度)到响应量(应变、挠度)的统计模型就是利用大量实测数据对建立完好结构从原因量到响应量的预测函数:

$$\{U\} = \{F[K, T, t, P, \dots]\} \quad (1)$$

式中: $\{U\}$ 表示测点位移或应变列阵; F 表示从输入到输出的影射函数; K 表示结构自身性能的参数; T 表示混凝土内部温度因子; t 表示时间变量; P 是荷载。这个函数在一定程度上反映了桥梁系统的力学机理,即从桥梁输入(荷载、温度与时间等)到响应量(位移、应变)的内在关系,因而可以在原因量已知的情况下预测桥梁的响应。

(3) 利用预测模型进行结构是否发生损伤的识别。在桥梁运营期将实测环境变量代入预测函数(1),从而有结构响应计算值 $\{U_{\text{计}}\}$ 。如果

$$\|\{U_{\text{计}}\} - \{U_{\text{测}}\}\| \leq \varepsilon \quad (2)$$

说明利用完好结构的预测函数预测值与实测值接近,结构正常,如

$$\|\{U_{\text{计}}\} - \{U_{\text{测}}\}\| > \varepsilon \quad (3)$$

说明实测结构响应偏离完好结构预测函数(1)预测的数值,说明结构形态发生变化,结构异常。 ε 是事先规定的判别标准。

该方法的优点主要体现在以下几个方面:一是利用现场桥梁使用初期的实测数据建立结构输入变量到响应变量的函数表达式,可以综合考虑温度、时间等多种因数对响应的影响,同时也可以避免结构分析模型导致的计算误差;第二利用数理统计理论建立的判别标准 ε 将综合考虑了测量等随机因数,因而识别的可信性将大幅度提高。在该方法中有两个关键问题需要解决:一是合理的、可以用于预测的统计预测模型(1)的建立;第二就是综合考虑随机因数与测量误差的判别标准 ε 。下面将重点讨论这两个问题。

2 统计模型(1)的建立

统计模型的建立有多种方法:逐步回归统计法与神经网络法是经常使用的两种方法,逐步回归法可以自动进行变量的筛选,并且有明确的显式函数,无论是内插还是外推的效果均比较合适,适合

力学机理清晰,非线性程度不高的问题;而神经网络不需要明确问题的力学机理就可以学习系统复杂的内在关系,因而特别适合那些力学机理不明确并非线性程度强的问题。本文对这两种方法在混凝土桥梁的监控都进行了探讨。

2.1 多元回归统计模型^[5]

逐步回归算法的基本思想是在所考虑的全部因子中,按其对应预报量 y 作用的显著程度大小,先挑选一个最重要因子,建立只包含这个因子的回归方程;接着进行显著性检验,若不显著,可认为所有的自变量因子对因变量都不显著,需重新分析该问题;若显著,继续对其他因子计算偏回归平方和,引入下一个显著性的因子,建立具有两个因子的回归方程;从此之后,逐步回归的每一步(引入一个因子或从回归方程中剔除一个因子都算作一步)前后都要作显著性检验,即反复进行两个步骤:第一,对已在回归方程中的因子作显著性检验,显著者保留,把最不显著的那个因子从方程中剔除掉;第二,对不在回归方程中的其余因子,挑选最重要的那一个进入回归方程,直至最后回归方程中再也不能剔除任一因子,同时也不能再引入因子为止,保证最后所得回归方程中所有因子都为显著因子,同时给出各个因子的待定系数。由于该方法是成熟的数学方法,本文就不加以详细阐述,可以参考相关文献。

2.2 神经网络统计模型

理论上已经证明:具有偏差和至少一个 S 型隐含层加上一个线性输出层的 BP 网络,能够逼近任何的有理函数^[6]。这样就为前向神经网络在函数逼近与数据拟合中的应用提供了坚固的理论基础,同时也在许多领域中得到应用:如在力学参数反分析中,一般利用 BP 网络建立从测点位移到力学参数的函数关系,而后以实际测量的位移作为网络输入,计算得到材料的力学参数。在这些应用中实际都是利用 BP 网络学习从大量数据中学习获取输入变量到输出变量隐含的数据关系,而后利用这种隐含的数据关系进行预报。因此,该方法也毫无疑问的可以用于建立从桥梁输入(荷载、温度与时间等)到桥梁响应的函数关系,并将这种函数关系应用于输入已知的情况下预报桥梁的响应。其相关原理与算法可以参见文献[7]。

3 判别标准的确定

在建立从桥梁输入变量到桥梁输出变量的函

数关系后^[8],如果系统没有发生损伤、用于建立预测模型的样本和用于预测的数据均没有测量误差与模型误差,则将实测得到的桥梁输入代入预测模型中,计算得到的桥梁输出与实际测量得到的桥梁响应应该严格满足下式^[9]:

$$\| \{U_{\text{计}}\} - \{U_{\text{测}}\} \| = 0 \quad (4)$$

如果桥梁结构发生损伤则有下列式成立:

$$\| \{U_{\text{计}}\} - \{U_{\text{测}}\} \| \neq 0 \quad (5)$$

这样可以方便的进行桥梁是否发生损伤的识别。

但是实际上该思路是不可行的,因为在实际问题中模型误差与测量误差是不可避免的,在许多情况下即使桥梁不发生任何损伤,式(5)也会成立,因而造成大量的误报^[10]。由数理统计的基本知识可以知道:基于最小二乘法建立的统计模型只要满足四个高斯假设条件以及残差正态分布条件,那么得到的回归统计模型是最佳无偏估计,该模型就可以用于样本的整体估计与预测。无论是逐步线性回归法还是神经网络法实质上都是建立在最小二乘法基础上的,而且逐步回归得到的统计模型是对这些假设条件都经过严格地检验,因此可以用于预测,对神经网络则没有经过这些严格检验,它的结果能否应用于预测应该进行进一步检验,但是幸运的是:根据中心极限原理,如果 e 代表多种误差来源,无论那些误差分布如何,随样本数目的增加, e 分布将趋于正态分布^[5]。因此对于桥梁监测这样大量学习样本问题,那些假设条件也很容易满足,这一点在我们的试验中也得到证实。

这样无论是利用那种手段建立统计模型,它都有如下特点:一是可以利用该模型推断系统的整体情况;二是无论是学习过程还是推断过程,只要系统没有发生变化,样本残差 e 将满足以零为均值的正态分布,见图 1。

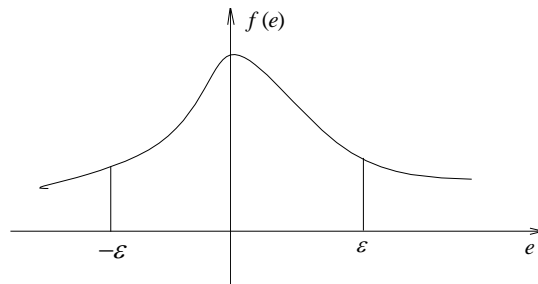


图 1 误差 e 的正态分布

Fig.1 Normal distribution of error

利用统计模型误差所具有的这些特点以及统计理论中小概率事件的定义,便可以方便的定义判别标准 ε 。对服从正态分布的计算值与实测值的误差值,取显著性水平 α ,则 $P_{\alpha}=\alpha$ 为小概率,在统计学中认为是不可能发生的,如果发生则认为异常。根据显著性水平 α 及残差分布规律查表定出 n 值,则置信区间为:

$$[\hat{Y} - nS, \hat{Y} + nS] \quad (6)$$

其中 \hat{Y} 为模型计算值, S 为标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2}$ 。

如果实际测量值落在区间(6)内,则认为测值正常,反之视作异常,应检查测值可靠性。则判别标准可以由下式确定:

$$\varepsilon = nS \quad (7)$$



图2 完好结构长期监测图

Fig.2 Long-time monitoring of a healthy structure



图3 损伤结构的监测

Fig.3 Monitoring of a damaged structure

4 小梁实验验证

为验证本文方法的正确性,我们制备两根钢筋混凝土小梁,小梁的具体几何、力学参数见文献[9],在小梁中埋设了进行应变测量的光纤传感器与温度传感器各1个,具体位置见文献[9]。在两根梁养护35天后,在梁体完好状态下施加4.1kN/m的均布荷载来模拟结构自重(图2),进行了配重情况下3个月的应变、温度、湿度与挠度采集,在三个月中每天早中晚各采集数据一次。三个月后人为在梁体跨中制造2cm裂缝,并将梁恢复到与完好结构相同

的支撑与加载状态,继续进行了10天的跟踪监测(图3)。

4.1 基于神经网络统计模型的损伤识别

在数据处理阶段,用4-40-1的神经网络对3个月内完好结构的数据进行学习,建立统计模型。在该模型中,网络输入是环境温度、环境湿度、时间与混凝土内部温度,网络是混凝土的应变。经过6万次的学习后得到残余误差 e 的分布见图4、图5,学习阶段的计算值与实际值误差统计特性见表1。为简洁起见,本文表2列出利用2#梁完好状态下实测值识别的结果;表3则列出利用2#梁在产生2cm裂缝后监测值进行识别后的结果。

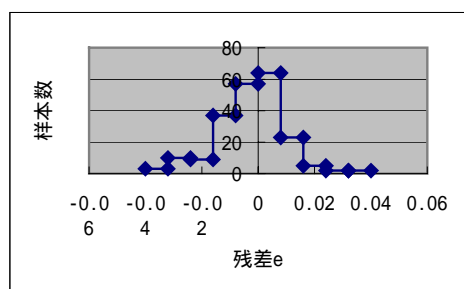


图4 1#梁残差分布

Fig.4 Distribution of residual error of Beam 1#

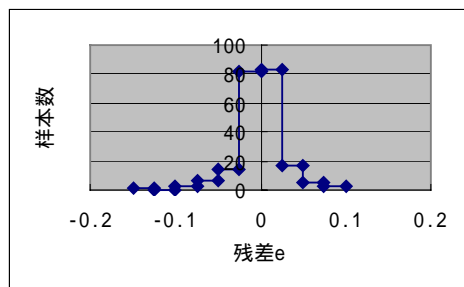


图5 2#梁残差分布

Fig.5 Distribution of error of beam 2#

表1 统计特性

Table 1 Statistical properties

	学习阶段的统计特性		预测阶段的统计特性	
	标准差	均值	完好结构的均值	损伤结构的均值
1#梁	0.0737	-0.00226	\	-0.118
2#梁	0.02925	0.000468	0.00616	-0.137

由图4,图5可见:经过神经网络训练后误差分布基本符合正态分布的假定,本文的理论基础是可信的。

4.2 基于逐步回归统计模型的损伤识别

将室内温度、湿度、混凝土内部温度、时间作为待选变量,混凝土应变作为因变量,其中应变变量

在逐步回归中选择最高拟合次数为 2 次，用自编逐步回归程序建立 1#梁的统计模型如下：对混凝土应变产生影响的决定性因数是混凝土内部的温度变化，有以下统计模型

$$y=0.754x+0.1896x^2-0.001766 \tag{8}$$

式中： x 表示内部温度传感器波长相对变化值； y 是内部混凝土应变传感器波长相对变化值。而后用 10 个未参加学习的完好结构样本对结构是否损伤进行了识别，识别结果见表 4；20 个跨中有 2cm 裂缝的样本对结构是否发生损伤进行了识别，识别结果见表 5。

表 2 2#梁完好状态下的识别

Table 2 Identification of beam 2 in good condition

实际测量值	预测数值	差	置信区间 $\varepsilon = 2S$	识别结果
0.363879	0.390197	0.026318	[0.332,0.449]	正常
0.569947	0.577962	0.008015	[0.519,0.636]	正常
0.563974	0.568379	0.004405	[0.510,0.627]	正常
0.67746	0.669952	-0.00751	[0.611,0.728]	正常
0.444514	0.46753	0.023015	[0.409,0.526]	正常
0.513203	0.518791	0.005588	[0.460,0.577]	正常
0.390758	0.400935	0.010177	[0.342,0.459]	正常
0.510217	0.496992	-0.01323	[0.438,0.555]	正常
0.486325	0.438354	-0.04797	[0.380,0.497]	正常
0.67746	0.649691	-0.02777	[0.591,0.708]	正常
0.632663	0.624606	-0.00806	[0.566,0.683]	正常
0.805879	0.758921	-0.04696	[0.7,0.817]	正常

表 3 2#梁损伤状态下的识别

Table 3 Identification of beam 2 in damage condition

实际测量值	预测数值	差	置信区间 $\varepsilon = 2S$	识别结果
0.913392	0.823793	-0.0896	[0.765,0.882]	结构异常
1.176202	0.929054	-0.24715	[0.871,0.988]	结构异常
0.952216	0.846185	-0.10603	[0.788,0.905]	结构异常
0.964162	0.868481	-0.09568	[0.810,0.927]	结构异常
0.641622	0.566831	-0.07479	[0.508,0.625]	结构异常
0.734203	0.643389	-0.09081	[0.585,0.702]	结构异常
0.695379	0.577014	-0.11836	[0.519,0.636]	结构异常
0.817825	0.695887	-0.12194	[0.637,0.754]	结构异常
0.802892	0.674057	-0.12884	[0.616,0.733]	结构异常
0.943257	0.788881	-0.15438	[0.730,0.847]	结构异常
0.877554	0.786355	-0.0912	[0.728,0.845]	结构异常
1.143351	0.919738	-0.22361	[0.861,0.978]	结构异常
1.053757	0.899931	-0.15383	[0.841,0.958]	结构异常
1.316567	0.972366	-0.3442	[0.914,1.03]	结构异常
1.155297	0.952497	-0.2028	[0.894,1.01]	结构异常
0.823798	0.772632	-0.05117	[0.625,0.920]	正常
0.555014	0.469441	-0.08557	[0.322,0.617]	正常
0.698365	0.571869	-0.1265	[0.424,0.719]	正常
0.629676	0.538535	-0.09114	[0.391,0.686]	正常

注：以上结果均是在归一化后的计算结果

表 4 完好结构预测与损伤识别

Table 4 Prediction and damage identification of the healthy structure

实际测量值	预测数值	差	置信区间 $\varepsilon = 2S$	识别结果
0.035	0.043474	0.008474	0.02547,0.06147	正常
-0.015	-0.00177	0.013233	-0.01976,0.01623	正常
0.054	0.062324	0.008324	0.04432,0.08032	正常
0.052	0.057046	0.005046	0.039048,0.07504	正常
0.09	0.089469	-0.00053	0.07147,0.1074	正常
0.012	0.023116	0.011116	0.005117,0.04111	正常
0.035	0.041212	0.006212	0.02321,0.05920	正常
-0.006	0.002757	0.008757	-0.01524,0.02075	正常
0.034	0.03518	0.00118	0.01718,0.05317	正常
0.026	0.015575	-0.01042	-0.002422,0.03357	正常
0.09	0.085699	-0.0043	0.06770,0.1036	正常
0.075	0.078913	0.003913	0.06091,0.09691	正常

表 5 损伤结构的预测与损伤识别

Table 5 Prediction and damage identification of the damaged structure

实际测量值	预测数值	差	置信区间 $\varepsilon = 2S$	识别结果
0.169	0.148282	-0.02072	0.130,0.166	结构异常
0.257	0.20785	-0.04915	0.189,0.225	结构异常
0.182	0.148282	-0.03372	0.130,0.166	结构异常
0.186	0.150544	-0.03546	0.132,0.168	结构异常
0.078	0.059308	-0.01869	0.0413,0.0773	结构异常
0.109	0.084191	-0.02481	0.0661,0.102	结构异常
0.096	0.064587	-0.03141	0.0465,0.0825	结构异常
0.137	0.098517	-0.03848	0.0805,0.116	结构异常
0.132	0.099271	-0.03273	0.0812,0.117	结构异常
0.179	0.136972	-0.04203	0.119,0.155	结构异常
0.157	0.125662	-0.03134	0.107,0.143	结构异常
0.246	0.198047	-0.04795	0.180,0.216	结构异常
0.216	0.179951	-0.03605	0.162,0.198	结构异常
0.304	0.255352	-0.04865	0.237,0.273	结构异常
0.25	0.214636	-0.03536	0.197,0.233	结构异常
0.139	0.118122	-0.02088	0.100,0.136	结构异常
0.049	0.026886	-0.02211	0.0089,0.0449	结构异常
0.097	0.063078	-0.03392	0.0451,0.0811	结构异常
0.074	0.048752	-0.02525	0.0307,0.0667	结构异常

从表 4，表 5 可见：利用逐步回归统计模型能够对结构是否发生损伤进行准确的识别，而且识别精度高于神经网络模型。这是由于神经网络模型是学习数据间的关系，不能进行无关变量剔除，外推能力差导致的。

5 结语

通过本文的研究可以发现：利用现场监测数据建立完好结构统计模型可以有效地避免结构分析模型导致的模型误差，利用数理统计理论建立判别

准则 ε 综合考虑了测量误差、随机因数,因而该方法可以有效地识别结构损伤的出现,有望解决目前损伤识别理论难以应用的现状。

参考文献:

- [1] 张启伟, 史家均, 项海帆. 大型桥梁结构损伤识别方法研究[J]. 上海市政工程, 1998, 48(2): 1~6.
Zhang Qiwei, Shi Jiajun, Xiang Haifan. The research of damage identification method of large-scale bridge structure [J]. Shanghai Municipal Engineering, 1998, 48(2): 1~6. (in Chinese)
- [2] 刘效尧, 蔡键, 刘辉. 桥梁损伤诊断[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
Liu Xiaoyao, Cai Jian, Liu Hui. The damage diagnosis of bridges [M]. Beijing: China Communications Press, 2002. (in Chinese)
- [3] 董聪, 范立础, 陈肇元. 结构智能健康诊断的理论与方法[J]. 中国铁道科学, 2002, 23(1): 11~24.
Dong Cong, Fan Lichu, Chen Zhaoyuan. Theory and methods of intelligent structural health diagnosis [J]. China Railway Science, 2002, 23(1): 11~24. (in Chinese)
- [4] 崔飞, 袁万城, 史家均. 基于静态应变及位移测量的结构损伤识别法[J]. 同济大学学报, 2000, (1): 5~8.
Cui Fei, Yuan Wancheng, Shi Jiajun. Damage detection of structures based on static response [J]. Journal of Tongji University, 2000, (1): 5~8. (in Chinese)
- [5] 郭志刚. 社会统计分析方法—SPSS 软件应用[M]. 北

京: 中国人民大学出版社, 1999.

- Guo Zhigang. The application of SPSS in social statistic analysis [M]. Beijing: Renmin University of China Press, 1999. (in Chinese)
- [6] Hornik K. Approximation capability of multilayer feedforward networks [J]. Neural Networks, 1991, 4: 551~557.
- [7] 李焦成. 神经网络计算[M]. 西安: 西安电子科技大学, 1993. 37~53.
Li Jiaocheng. The calculation of neural networks [M]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology, 1993. 37~53. (in Chinese)
- [8] 李惠彬, 郑兆昌, 应怀樵. 对国内外桥梁损伤诊断几种方法的评述[J]. 工程力学, 1998, 20(1): 41~45.
Li Huibin, Zheng Zhaochang, Ying Huaqiao. Remark on methods of bridge damage diagnosis both in China and abroad [J]. Engineering Mechanics, 1998, 20(1): 41~45. (in Chinese)
- [9] 赵启林. 混凝土桥梁健康监测与损伤识别[R]. 东南大学博士后研究报告, 2004, 5.
Zhao Qilin. Health monitoring and damage detection of concrete bridge [R]. Postdoctoral Research Report of Southeast University, 2004, 5. (in Chinese)
- [10] 温利明, 黄奕辉. 神经网络用于结构损伤识别的几个关键问题研究[J]. 工业建筑, 2002, 32(8): 39~41.
Wen Liming, Huang Yihui. Study of several key problems of neural networks for damage detection [J]. Industrial Construction, 2002, 32(8): 39~41. (in Chinese)

(上接第 127 页)

参考文献:

- [1] Wong R S Y, Vecchio F J. Towards modeling of reinforced concrete members with externally bonded fiber-reinforced polymer composites [J]. ACI Structural Journal, 2003, 100(1): 47~55.
- [2] 陆新征, 冯鹏, 叶列平. 碳纤维布约束混凝土方柱轴心受压性能的有限元分析 [J]. 土木工程学报, 2003, 36(2): 46~51.
Lu Xinzheng, Feng Peng, Ye Lieping. Behavior of FRP-confined square columns under uniaxial loading [J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(2): 46~51. (in Chinese)
- [3] Arduini M, Di Tommaso A, Nanni A. Brittle failure in FRP plate and sheet bonded beams [J]. ACI Structural Journal, 1997, 94(4): 363~370.
- [4] Tedesco J W, Stallings J M, El-Mihilmy M. Finite element method analysis of a concrete bridge repaired with fiber reinforced plastic laminates [J]. Computers & Structures, 1999, 72(1~3): 379~407.
- [5] Santhakumar R., Kannabiran S, Dhanaraj R. Strengthening of reinforced concrete beams using glass fibre reinforced plastic laminates [J]. Indian Concrete Journal, 1999, 73(12): 737~740
- [6] Kachlakev D I. Finite element analysis of historic bridge strengthened with FRP laminates [D]. Ph.D. Thesis, California Polytechnic State University, 2001.
- [7] Parvin A, Granata P. Investigation on the effects of fibre composites at concrete joints [J]. Composites Part B: Engineering, 2002, 31(6~7): 499~509.
- [8] Ameli M, Ronagh H R, Bradford M A. Numerical predictions for the ultimate torque capacity of FRP

strengthened reinforced concrete beams [C]. Proceedings of 2nd Int. Conf. on FRP Composites in Civil Engineering, Adelaide, 2004.

- [9] 李忠献, 景萌, 苏标. 碳纤维布加固弯剪扭复合受力的钢筋混凝土箱梁抗扭性能的模型试验[J]. 土木工程学报, 2005, 38(12): 40~47.
Li Zhongxian, Jing Meng, Su Biao. Model experiments on torsional behavior of carbon fiber sheet strengthened RC box beams subjected to combined action of bending-shear-torsion [J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(12): 40~47. (in Chinese)
- [10] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1994.
Jiang Jianjing. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structure [M]. Xi'an: Shanxi Science and Technology Press, 1994. (in Chinese)
- [11] 吕西林, 金国芳, 吴晓涵. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.
Lu Xilin, Jin Guofang, Wu Xiaohan. Non-linear finite element analysis theory and practice in reinforced concrete structure [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1999. (in Chinese)
- [12] 过镇海. 钢筋混凝土原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
Guo Zhenhai. Principle of reinforced concrete [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999. (in Chinese)
- [13] De Lorenzis L, Miller B, Nanni A. Bond of fiber-reinforced polymer laminates to concrete [J]. ACI Materials Journal, 2001, 98(3): 256~264.
- [14] Lau K T, Dutta P K, Zhou L M. Mechanics of bonds in an FRP bonded concrete beam [J]. Composites Part B: Engineering, 2001, 32(6): 491~502.