文章编号：1000-4750(2005)Sup.-0001-06

杆系结构自由振动精确求解的理论和算法

*袁　驷 [1]，叶康生 [1]，F. W. Williams [2]，D. Kennedy [2]

(1. 清华大学土木工程系，北京，100084; 2. Cardiff University, Cardiff, UK)

摘　要：杆系结构的自由振动特性对结构的抗震设计至关重要。与常规有限元方法采用近似形函数将原问题化为线性特征值问题不同，本文的精确方法从杆件精确的形函数出发获得精确的动力刚度，将原问题化为非线性特征值问题。已有的 Wittrick-Willliams 算法很好地解决了该问题的频率求解。在此基础上，进一步提出了求解该非线性问题的导护型 Newton 法格式，并优化了各个算法环节。该法能同时求出频率和振型，求解结果精确可靠且具有二阶收敛速度，是一种快速精确、可靠实用的工程计算方法。

关键词：动力刚度矩阵；频率；振型；牛顿法；Wittrick-Williams 算法；杆系结构

中图分类号：TU311.3　　**文献标识码**：A

THEORY AND ALGORITHM OF THE EXACT METHOD FOR FREE VIBRATION PROBLEMS OF SKELETAL STRUCTURES

*YUAN Si [1], YE Kang-sheng [1] , F. W. Williams [2] , D. Kennedy [2]

(1. Tsinghua University, Beijing, 100084, China; 2. Cardiff University, Cardiff, UK)

Abstract: The solution of free vibration problem of skeletal structures provides important data for engineering design. This paper surveys a new exact method which uses exact dynamic stiffnesses and therefore results in a nonlinear eigenvalue problem in contrast to the traditional finite element method which reduces the problem into a linear algebraic eigenvalue problem by using approximate shape functions. The well-established Wittrick-Williams algorithm can be used to calculate the frequencies of the nonlinear problem elegantly. Recently the authors presented a new Newton-type method for this nonlinear eigenvalue problem, incorperating many optimum techniques. The recursive use of the proposed method employs the Wittrick-Williams algorithm to guide and guard each Newton correction and therefore gives secure second order convergence on both natural frequencies and mode vectors. Numerical examples show that this method is not only exact and reliable but also very economical and efficient, and therefore is well applicable to large-scale engineering problems.

Key words: dynamic stiffness matrix; natural frequencies; vibration modes; Newton's method; Wittrick--Williams algorithm; skeletal structures.

结构的自由振动分析给出结构的自振频率和振型，它们反映了结构的动力特性，在工程实践中是结构抗震设计的重要基础。杆系结构是无限自由度问题，即使是单根杆件，其自由振动分析也属于常微分方程特征值问题，作精确分析求解一般比较困难。在传统的分析求解方法中，最常用的是有限

基金项目：国家杰出青年科学基金(59525813)；教育部博士点基金(20020003045)；英国 EPSRC(G05437/01)资助项目

作者简介：*袁　驷(1953)，男，北京人，教育部长江学者特聘教授，博士，院长，中国土木工程学会副理事长，中国力学学会结构工程专业委员会主任，从事结构工程研究(E-mail: yuans@tsinghua.edu.cn)；

叶康生(1972)，男，江苏人，讲师，博士，从事结构工程研究(E-mail: yeks@tsinghua.edu.cn)；

F. W. Williams，英国加的夫(Cardiff)大学教授，英国皇家工程院院士，从事计算力学研究；

D. Kennedy，英国加的夫(Cardiff)大学高级讲师，从事计算力学研究。

元法。常规的有限元法采用低阶多项式(如沿用静力分析中梁单元的三次多项式)作单元上的形函数，可方便地用于结构体系。与静力问题不同，多项式形函数对于自由振动问题只是近似的，而这种近似性也为该法带来了一些不便和局限，例如：

(1) 对于两端固定的杆件，仅用一个单元的话，刚度矩阵退化为零行零列，无法求解；

(2) 要提高解答精度，即便是单根杆件，也必须加密单元，且精度要求越高，单元网格就要越密，计算量也随之增加；

(3) 要计算高阶振型，即便是单根杆件，也需要足够多的单元，且阶数越高，需要单元就越多，计算量也随之增长；

(4) N 个结点位移的计算模型，最多能给出 N 个频率和振型，且高阶的结果质量低劣；

(5) 实际工程分析中，为了获得足够精度的解答，常常不得不为静力分析和自由振动分析建立不同的有限元计算模型。

然而，杆系结构自由振动的精确分析求解并非没有可能，近年来就逐步发展起来了一种精确单元方法 —— 动力刚度法[1~5]。该法将杆件看作无限自由度体系来导出精确的单元动力刚度矩阵，再进一步集成为整体动力刚度矩阵和方程，最后归结为求解一个非线性特征值问题，得到所需要的自振频率和振型。

动力刚度法是一种精确算法，其解答在杆件上逐点满足控制微分方程，在结点处满足所有的平衡条件和位移协调(或约束)条件。因此同静力问题刚度法一样，一个杆件只用一个单元即可，一般无需人为地在杆件内部再增设结点、加密单元。对于一种精确方法，在实施中有三个关键问题：

(1) 建立精确的单元动力刚度矩阵；

(2) 前 n 阶自振频率的精确求解(不失根)；

(3) 前 n 阶振型的精确求解(包括重频率的振型)。

另外，尽管是精确算法，若要实用的话，求解的速度不宜过慢，否则优势就不明显。事实上，随着研究的进展，这一方法已经发展到了不但精确而且实用的水平，可以说是一种快速精确的工程方法。

本文对这一新型的精确单元方法(动力刚度法)的研究现状和进展作一综述性的介绍，以平面结构为例，重点讨论以上三个关键问题，特别着重展示其中的难点问题和动力特征。

1 单元动力刚度矩阵

平面杆系结构的自由振动分为轴向和横向振动。以常截面杆件轴向振动为例，其控制微分方程可表示为[1][6]

$$\frac{d^2u(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}+\nu^2u(\xi)=0,\quad 0<\xi<1,\quad \xi=x/l,\qquad \nu=\omega l\sqrt{\frac{\overline{m}}{EA}} \tag{1}$$

其中，u 为轴向振幅函数，$\overline{m}$ 为均布质量，EA 为截面抗拉刚度，ω 为自振频率，l 为杆件长度，ξ 为局部坐标。这是一个以 ν^2 为特征值，以 u 为特征函数的常微分方程特征值问题。对于常截面的情况，解析解不难得到，也很容易用解析解构造出单元动力刚度方程如下：

$$\begin{pmatrix}\overline{F}_{x1}\\ \overline{F}_{x2}\end{pmatrix}=\frac{\nu EA}{l\sin\nu}\begin{pmatrix}\cos\nu & -1\\ -1 & \cos\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{pmatrix} \tag{2}$$

或 $\overline{\boldsymbol{F}}^e=\overline{\boldsymbol{k}}^e(\omega)\overline{\boldsymbol{d}}^e$

轴向振动虽然简单，但却不乏精确单元所固有的特性，例如：

(1) 与静力问题不同，动力刚度矩阵 $\overline{\boldsymbol{k}}^e$ 是频率 ω(或频率参数 ν)的超越函数；

(2) 当 $\omega\to 0$ (或 $\nu\to 0$)时，动力刚度矩阵趋向于静力刚度矩阵；

(3) 单元刚度矩阵不是奇异的：$\left|\overline{\boldsymbol{k}}^e\right|=-(\nu EA/l)^2$；

(4) 单元刚度矩阵 $\overline{\boldsymbol{k}}^e$ 对应的是两端自由的杆件，如果用 $\left|\overline{\boldsymbol{k}}^e\right|=0$ 的常规办法求两端自由杆件的自振频率，则除了平凡解 $\omega=0$ 外一无所获。亦即，精确的频率值并不一定使相应的刚度矩阵奇异，表明常规的方法并不总是有效的；

(5) 当频率参数 $\nu=k\pi\ (k=1,2,...)$ 时，因 $\sin\nu=0$，$\overline{\boldsymbol{k}}^e$ 中的刚度系数为无穷大($\overline{k}_{ij}=\infty$)，此时单元刚度矩阵中的刚度系数没有定义；

(6) 令刚度系数奇异的 $\sin\nu=0$ 对应的是两端固定杆件的频率方程，亦即若频率为固端频率(记为 ω_F 和 ν_F)时，单元刚度矩阵各系数成为奇异；

(7) $\sin\nu=0$ 不仅为固端杆件的频率方程，同时也是两端自由杆件的频率方程，亦即固端频率和自由杆频率相同；

(8) 自由杆频率不应该也无法从 $\left|\overline{\boldsymbol{k}}^e\right|=0$ 得出，

而应该根据控制微分方程的解析解所满足的边界条件来导出；

(9) 上述表明，仅由刚度矩阵难以求出所有的频率。

对于等截面横向振动，单元动力刚度矩阵也可以以显式给出，可参见相应的文献[1,3,6]。将轴向和横向振动综合考虑，即可建立一般平面杆系结构的单元刚度矩阵[1,3,6]。

2 整体动力刚度方程

建立了精确的单元动力刚度矩阵，可以按照常规的方法集成为如下形式的整体动力刚度方程：

$$\boldsymbol{K}(\omega)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{K}$ 是整体动力刚度矩阵(简称整体刚度矩阵)；$\boldsymbol{D}$ 是整体振型的结点位移向量，简称为振型向量，注意整体动力刚度矩阵 $\boldsymbol{K}(\omega)$ 是频率的函数。式(3)是一个齐次方程组，为了求得非平凡解，自然要求：

$$\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|=0 \tag{4}$$

按照常规的概念，人们期望从上式可以求得所有各阶的频率 ω_k，亦即结构的真实频率 ω_k 为 $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|$ 的零点。然而，对于精确的动力刚度法，情况并不象常规概念那么单纯。

为了明确起见，考虑一个具体的例子。图 1 所示为一个轴向振动的杆件，特意按图示分为两个单元。简单地设 $\bar{m}=EA=l=1$，则易得整体刚度矩阵如下：

$$\boldsymbol{K}(\omega)=\omega\begin{bmatrix}\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}+\dfrac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega} & \dfrac{-1}{\sin 2\omega}\\ \dfrac{-1}{\sin 2\omega} & \dfrac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega}\end{bmatrix} \tag{5}$$

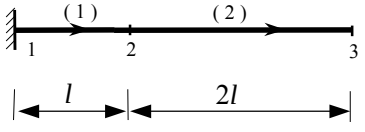

图 1 杆件轴向振动

Fig.1 Axial vibration

由此不难写出 $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|$ 的表达式。这一问题的精确解为：

$$\omega=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \cdots \tag{6}$$

若将各个频率代入 $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|$ 中，有：

$$\begin{aligned}&\left|\boldsymbol{K}(\pi/6)\right|=0,\quad \left|\boldsymbol{K}(\pi/2)\right|=-\pi^2/8,\\ &\left|\boldsymbol{K}(5\pi/6)\right|=0,\cdots\end{aligned} \tag{7}$$

由此看出，精确频率并不一定是 $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|$ 的零点。

一般来讲，整体动力刚度方程有如下的性质：

(1) 整体刚度方程是用位移表示的动力平衡方程；

(2) 用 Gauss 消元法将 $\boldsymbol{K}$ 消成上三角阵(记为 $\boldsymbol{K}^{\Delta}$)后，对根的数目和数值无影响；

(3) 当 $\omega\to 0$ 时，动力问题的整体刚度矩阵趋于静力问题的整体刚度矩阵；

(4) 特征方程 $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|=0$ 为超越方程，有无穷多个根(频率)；

(5) 对于精确的频率 ω_k，$\left|\boldsymbol{K}(\omega_k)\right|$ 可以等于 0，等于 ∞，也可以等于非零的有限值[7]，因此 $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|=0$ 并不能给出所有的频率；

(6) 当结构频率与某个单元的固端频率 ω_F 相同时，$\boldsymbol{K}$ 中出现无穷大元素，即若 $\omega=\omega_F$，某些 $K_{ij}=\infty$；此时，由于固端频率 $\omega_F=\omega$ 的单元的刚度矩阵是无效的，因此集成后整体刚度矩阵也是无意义的；

(7) $\left|\boldsymbol{K}(\omega)\right|$ 不仅在零点变号，还可能在 ∞ 点变号(见图 2)，因此根据正负号来判断零点和求零点的方法难以应用；

(8) 可能存在 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$ 的振型，即该振型没有结点位移，只有单元内部的振动(如图 3)；这一点表明，如果只求非平凡解 $\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{0}$ 的频率，则可能会丢根。

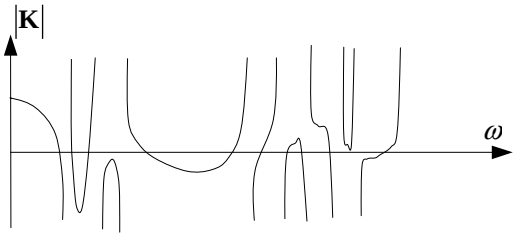

图 2 $|K|$ 和 ω 的关系

Fig.2 $|K|$ versus ω

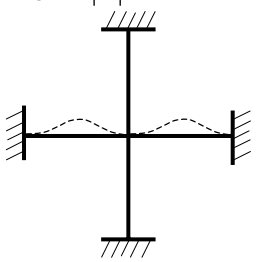

图 3 一种固端振型

Fig.3 A fixed-end mode

由以上讨论可以看出，若要求得精确的频率和振型，需要一个可靠的算法，能够依序求出前 n 个

根而不失根，而且能够处理 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{0}$ 两种情况。

3 频率计算— Wittrick-Williams算法

Wittrick 和 Williams 在 20 世纪 70 年代初便对动力刚度法计算频率问题提出了一个非常精致而深刻的算法定理，称为 Wittrick-Williams 算法[1][2]，以下简称 WW 算法。WW 算法并不直接计算频率，本质上它是一种计数方法。按照 WW 算法，在结构的所有频率中，低于某个给定值 ω^* 的频率的个数 J 由下式给出：

$$J(\omega^*)=J_0(\omega^*)+s\{\boldsymbol{K}(\omega^*)\} \tag{8}$$

其中 J_0 是所有低于 ω^* 的单元固端频率 ω_F 的数目总和，$s\{\cdot\}$ 代表负号的计数，$s\{\boldsymbol{K}(\omega^*)\}$ 代表用普通 Gauss 消元法将 $\boldsymbol{K}(\omega^*)$ 消成上三角阵 $\boldsymbol{K}^{\Delta}(\omega^*)$ 后(或 $\boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{L}^T$ 分解中的对角阵 $\overline{\boldsymbol{D}}$)，主对角线上负元素的个数。记 $J_K=s\{\boldsymbol{K}(\omega^*)\}$，则式(8)也可写成：

$$J=J_0+J_K \tag{9}$$

注意，J、J_0 和 J_K 的取值都是 ω^* 的整数函数。式(9)的计数 J 由 J_0 和 J_K 两部分组成，其中 J_0 是各个单元固端频率的贡献，J_K 则由结构整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 来贡献。

从实施上来看，J_K 的计算(常规的 Gauss 消元)并无任何新的困难，而 J_0 的计算则要困难得多；因为计算单个杆件在固端条件下低于 ω^* 的频率个数本身就是一个富有挑战性的课题。但是，对于工程中常用的等截面杆件，无论是轴向还是横向振动，J_0 的计算公式已经获得，而且并不复杂，很实用[1][3]。

用 WW 算法计算结构频率时，最简单的方法是二分法，步骤大致如下。设欲求结构的第 k 阶频率 ω_k，只需不断调整 ω_l 和 ω_u，使得

$$J(\omega_l)\le k-1 \quad 和 \quad k\le J(\omega_u) \tag{10}$$

则找到了 ω_k 的一个上界 ω_u 和一个下界 ω_l，即 $\omega_k\in(\omega_l,\omega_u)$，其中 (ω_l,ω_u) 称为 ω_k 的频率区间。然后采用二分法，直至频率区间满足

$$\omega_u-\omega_l\le \mathrm{Tol}\cdot(1+\omega_u) \tag{11}$$

则可停止计算。上式中，Tol 是用户事先给定的、希望解答满足的误差限。

基于 WW 计数法的频率计算方法有以下一些特点：

(1) 方法简单、方便；

(2) 结果可以达到计算机允许的任意精度；

(3) 不丢根，单根、重根均可处理；

(4) 可以直接求第 k 阶频率，或第 k 阶至第 $k+n$ 阶的频率；

(5) 方法为精确方法，一个杆件一个单元即可；

(6) 普通的 $\boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{L}^T$ 分解或Gauss消元法即可(不必选主元)；

(7) 只须作分解或前消去，无须回代过程；

(8) 保留 $\boldsymbol{K}$ 的带状稀疏性；

(9) 由于 J_K 的计算只需要 $\boldsymbol{K}^{\Delta}$ 对角线上负号元素的个数，而不要数值，因此对数值误差不敏感；万一 $\mathbf{K}$ 奇异，只需稍调整一下频率值即可。

但是，二分法最大的不足是收敛速度慢，只有线性的收敛速率。这一点，在后面介绍的方法中将会得到很大的改进。

4 振型计算 — 导护型Newton法

WW 算法可以方便地得到精确的结构自振频率，但是多年来，其振型的计算一直滞后[8]，始终缺少一个和频率计算相称的高效、可靠、精确的计算方法，直到本文的四位作者开始紧密合作研究之后，提出了一个高效可靠的导护型 Newton 法[4][5]，使得多年空缺的振型的精确计算问题得到了很好的解决。下面，对这一方法作一简介。

尽管整体刚度方程如式(3)给出，但是如前所述，满足式(3)的解并不完备，原因主要来自于单元固端频率的影响。只要存在某单元的固端频率 $\omega_l<\omega_F<\omega_u$，则 $\boldsymbol{K}(\omega)$ 在频率区间 (ω_l,ω_u) 内就会有无穷大元素出现，而 $|\boldsymbol{K}|$ 也会因此出现奇异。为了消除固端频率带来的种种困难，我们提出了一种内部结点法[5]，即对于存在固端频率 $\omega_l<\omega_F<\omega_u$ 的单元，在单元内部插入一个结点，使得两个子单元的固端频率都在 (ω_l,ω_u) 以外。这样，$\boldsymbol{K}(\omega)$ 在 (ω_l,ω_u) 上连续可微，不再具有奇异性了，也就可以直接从 $\boldsymbol{K}(\omega)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$ 计算 (ω_l,ω_u) 内的频率所对应的振型向量 $\boldsymbol{D}$ 了。

为了高效、精确地计算振型向量 $\boldsymbol{D}$，将 Newton 法应用于非线性方程 $\boldsymbol{K}(\omega)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$。记 $\lambda=\omega^2$，首先将 $\boldsymbol{K}(\lambda_k)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$ 关于 λ_k 的近似值 $\lambda_a\in(\lambda_l,\lambda_u)$ 展开

$$\boldsymbol{K}(\lambda_k)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{D}+(\lambda_k-\lambda_a)\boldsymbol{K}'_a\boldsymbol{D}+O((\lambda_k-\lambda_a)^2) \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{K}_a=\boldsymbol{K}(\lambda_a)$，$\boldsymbol{K}'_a=d\boldsymbol{K}(\lambda_a)/d\lambda$。注意到 $\boldsymbol{K}(\lambda_k)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$，忽略二阶及高阶微量，便得到

$$\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{D}=\mu\boldsymbol{K}'_a\boldsymbol{D} \qquad 其中 \quad \mu=\lambda_a-\lambda_k \tag{13}$$

这是一个典型的以 $(\mu,\boldsymbol{D})$ 为解的广义矩阵特征值问

题，求解此问题的一个自然合理的方法就是线性矩阵特征值问题中常用的逆幂迭代法[9]，该法确保收敛到绝对值最小的特征对 $(\mu, \boldsymbol{D})$。得到 $(\mu, \boldsymbol{D})$ 解后，利用式(13)进一步实施外插法，获得精度更高的频率：

$$\lambda_\mu = \lambda_a - \mu \quad 或 \quad \omega_\mu = \sqrt{\lambda_a - \mu} \qquad (14)$$

由此得到的 λ_μ 比 λ_a 更为接近精确解 λ_k，对 λ_a 有大幅度的改进。取 λ_μ 为新的 λ_a，再用逆幂迭代法解式(13)并得到新的 $(\mu, \boldsymbol{D})$ 以及新的 λ_μ，如此继续迭代下去。

熟知，Newton 法是局部收敛的方法，要求 λ_a 足够接近 λ_k 才能保证收敛。利用 WW 算法，可以对上述的 Newton 法迭代过程进行引导和保护，确保迭代收敛。实施时，首先用基于 WW 计数法的二分法粗略地找到一个频率区间 (ω_l, ω_u)，然后将 λ_a 的初值取为频率区间的中点；在随后的 Newton 迭代中，对于 λ_a 的每一个新值，逆幂迭代都要对 $\boldsymbol{K}_a = \boldsymbol{K}(\lambda_a)$ 进行 Gauss 消元(见式(13))，此时可以顺便计算 $J = J_K(\lambda_a)$，从而得知 λ_a 是一个新的上界还是下界，并用 λ_a 更新频率区间 (ω_l, ω_u)；若发生新的 λ_a 不在频率区间 (ω_l, ω_u) 内的情况，则采取保护措施，将 λ_a 重置于当前 (ω_l, ω_u) 的中点。可以看出，应用 WW 计数法不断地更新频率区间(精确解的上下界)，对 Newton 迭代具有独特的引导和保护作用，所以称为导护型 Newton 法(guided and guarded Newton's method)[4]；该法可以确保快速可靠地收敛到精确解。文[4]中给出了本法完整的算法步骤，文[5]则给出了该法用差商代替刚度矩阵导数时的算法格式。

5 算例比较

为了具体说明动力刚度法不仅精确而且实用，考虑一个 39 跨 200 层平面刚架的例子。设所有杆件具有相同的 $EI = \overline{m} = 10$，$l = 1$ 以及 $EA = 10000$。对于本例，共有 8000 个结点，整体刚度矩阵为 24000 阶。分别用本文方法和商业软件 ANSYS 计算前五阶频率和振型，取误差限 $\mathrm{Tol} = 10^{-3}$，在 Pentium III 700MHz PC 机上计算。最初，这个例子只是想用 ANSYS 校核本法的结果；但是用 ANSYS 计算时，发现 ANSYS 计算本例遇到了困难：用普通子空间迭代法未能收敛，用 Block Lanczos 法耗时 514 秒，是本法时间的近 6 倍；只有采用了与第一阶频率极为接近的移位，子空间迭代法才以与本法大致相同量级的时间获得所需的解。对于本例来讲，常规有限元在精度上并不吃亏，与精确单元的结果是一致的，但是计算时间出入很大，表明本法计算工程上规模较大的问题也是具有优势的。

表 1　39 跨 200 层平面刚架前五阶频率(rad/s)

Table 1　The first five natural frequencies of the 39×200 frame (rad/s)

阶数	本文方法	ANSYS		
		Block Lanczos 法	Subspace 法 (shift =0)	Subspace 法 (shift =$2\pi\times10^{-3}$)
1	0.011277	0.011278	频率值较小，未移位，未能收敛到所需的前 5 阶频率	0.011278
2	0.035161	0.035161		0.035161
3	0.063931	0.063931		0.063931
4	0.091100	0.091100		0.091100
5	0.118793	0.118796		0.118802
时间/s	86.00	514.29	200	73.14

6 结语

新近发展起来的杆系结构频率和振型求解的导护型 Newton 法结合了 WW 算法特性，优化了各个算法环节，是一种简单、快速、经济、精确和可靠的方法：

(1) **简单**：犹如常规有限元特征值问题，简单地归结为用逆幂迭代法求解广义矩阵特征值问题(13)，每次迭代相当于求解一个线性方程组。

(2) **快速**：几个因素都对求解速度有贡献，如：逆幂迭代只求解第一阶特征对；逆幂迭代求的特征值是移位值 μ，相当于移位的逆幂迭代；无论是振型向量还是外插后的频率，均有二阶收敛速率和精度，收敛非常快，同时放松了对初始频率区间的要求。

(3) **经济**：除了上述的快速产生经济效果外，算法可以充分利用整体刚度矩阵的对称、带状、稀疏性等特性，另外普通的 Gauss 消元也属于最经济的方法范畴。

(4) **精确**：二阶收敛性质赋予了本法高精度的特色，这也是本法最突出的特色。二阶收敛还意味着用于线性特征值问题时，可以自动地获得精确解。

(5) **可靠**：对所有类型的频率和振型都能可靠

地求出，不丢根，不漏根，确保频率和振型的精度满足用户事先指定的误差限。

本文讨论的精确动力刚度法已经在《结构力学求解器》[10]中实现，其理论基础部分已经吸收到本科教材中[6]。

参考文献：

[1] Williams F W, Wittrick W H, An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures [J]. Int. J. Mech. Sci., 1970, 12(9): 781~791.

[2] Wittrick W H, Williams F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures [J]. Q. J. Mech. Appl. Math., 1971, 24(3): 263~284.

[3] Howson W P and Williams F W. Natural frequencies of frames with axially loaded Timoshenko members [J]. J. Sound and Vibration, 1973, 26(4): 503~515.

[4] Yuan Si, Ye Kangsheng, Williams F W and Kennedy D. Recursive second order convergence method for natural frequencies and modes when using dynamic stiffness matrices [J]. Int. J. Num. Meth. Engng., 2003, 56(12): 1795~1814.

[5] Yuan Si, Ye Kangsheng and Williams F W. Second order mode-finding method in dynamic stiffness matrix methods [J]. J. Sound and Vibration, 2004, 269(3~5): 689~708.

[6] 袁驷. 程序结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
Yuan Si. Programming structural mechanics [M]. Beijing: China Higher Education Press, 2001. (in Chinese)

[7] Williams F W, Yuan Si, Ye Kangsheng, Kennedy D and Djoudi M. Towards deep and simple understanding of the transcendental eigenproblem of structural vibrations [J]. J. Sound and Vibration, 2002, 256(4): 681~693.

[8] Hopper C T, Williams F W. Mode finding in nonlinear structural eigenvalue calculations [J]. J. Structural Mechanics, 1977, 5(3): 255~278.

[9] Bathe K-J. Finite element procedures [M]. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1996.

[10] 袁驷. 结构力学求解器 v1.0-v2.0 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001~2004.
Yuan Si. Structural Mechanics Solver Version 1.0-Version 2.0 [M]. Beijing: China Higher Education Press, 2001~2004. (in Chinese)

注：该文在第十四届结构工程学术会议(2005 烟台)应邀作特邀报告

(上接第 19 页)

参考文献：

[1] Bensoussan A, Lions J-L, Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures [J]. Studies in Mathematics and Its Applications. 1978, 5: 61~78.

[2] Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous media and vibration theory [J]. Lecture Notes in Physics, 1980, 127: 331~351.

[3] Hollister S J, Kikuchi N. A comparison of homogeniza--tion and standard mechanics analyses for periodic porous composites [J]. Computational Mechanics, 1992, 10: 73~95.

[4] 刘文辉, 张淳源. 渐近均匀化方法在粘弹性复合材料中的应用[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2003, 25(4): 91~97.
Liu Wenhui, Zhang Chunyuan. Application of asymptotic homogenization theory to viscoelastic composites [J]. Natural Science Journal of Xiangtan University, 2003, 25(4): 91~97. (in Chinese)

[5] 潘燕环, 嵇醒, 薛松涛. 复合材料中的渐近均匀化方法[J]. 上海力学, 1997, 18(4): 290~297.
Pan Yanhuan, Ji Xing, Xue Songtao. Asymptotic homogenization theory in composites [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1997, 18(4): 290~297. (in Chinese)

[6] 庄守兵, 吴长春. 基于均匀化方法的多孔材料的的细观力学特性数值研究[J]. 材料科学与工程, 2001, 19(4): 9~13.
Zhuang Shoubing, Wu Changchun. Microscopic invest--ingation of cellular materials mechanical properties based on homogenization theory [J]. Materials Science & Engineering, 2001, 19(4): 9~13. (in Chinese)

[7] Yeong-moo Yi, Sang-hoon Park, Sung-kie Youn. Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures [J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35: 2039~2055.

[8] B Hassani, E Hinton. A review of homogenization and topology optimization Ⅱ -analytical and numerical solution of homogenization equation [J]. Computers & Structures, 1998, 69: 719~738.

[9] 苑学众. 复合材料弹塑性有效性能的研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2000.
Yuan Xuezhong. The study of elasto-plastic effective properties of composite materials [D]. Shenyang: Northeastern University, 2000. (in Chinese)

[10] C P Chen, R S Lakes. Analysis of high loss viscoelastic composites [J]. Journal of Materials Science, 1993, 28: 4299~4304.