

文章编号: 1000-4750(2005)02-0073-06

中厚板问题的多变量小波有限元法

*黄 义, 韩建刚

(西安建筑科技大学, 陕西 西安 710055)

摘 要: 提出了一种基于二类变量广义变分原理的多变量小波有限元方法。首先构造了便于边界条件处理的插值小波基, 应用乘积型二元插值小波基来构造中厚板的广义变量场函数, 通过二类变量广义变分原理建立了多变量小波有限元模型。在计算各种变量时, 不需要利用其物理关系, 也不必求导, 可直接计算其结果, 因而各种变量均有足够的精度。

关键词: 广义变分原理; 多变量; 小波有限元; 插值小波; 板

中图分类号: O242, TU339 **文献标识码:** A

THE MULTIVARIABLE WAVELET FINITE ELEMENT METHOD FOR THICK PLATE PROBLEMS

*HUANG Yih, HAN Jian-gang

(Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: A multivariable wavelet finite element method (FEM) is presented, which is based on Hellingger-Reissner variational principle. The interpolating wavelet bases are constructed in order to deal with boundary conditions conveniently, and two-dimensional interpolating wavelet bases in product form are used to construct the generalized field functions of thick plate. In calculating variables the stress-strain relations and the differential calculation are bypassed, resulting in high variable accuracy.

Key words: generalized variational principle; multivariable; wavelet finite element method; interpolating wavelet; plate

1 引言

有限元法是从 20 世纪 50 年代开始发展起来的, 它以变分原理和剖分插值为基础, 成功的吸收了传统能量法和差分法的优点, 是解决力学问题的有力工具, 为解决工程中的力学问题开创了全新的局面。在有限元法的发展过程中, 变分原理为建立各种有限元模型提供了理论基础^[1,2]。米洛希 (Melosh R. J.) 应用势能原理建立了位移有限元模型^[3]; 爱立斯 (Elias Z. M.) 应用余能原理提出了应力

有限元模型(平衡模型); 卞学镛 (Pian T. H.) 应用余能原理建立了杂交应力有限元模型^[4]; 赫尔曼 (Herrmann L. R.) 建立了混合有限元模型。哈林格 (Hellingger) 1914 年首次提出了二类变量广义变分原理, 赖斯纳 (Reissner) 于 1950 对其进行了完善, 因此, 对二类变量广义变分原理亦称哈林格-赖斯纳变分原理。沈鹏程、秦荣利用其提出了样条有限元法, 并对一些工程应用问题进行了求解^[5-7]。

小波理论是近些年形成和发展迅速的一种数学工具。它在科学技术界引起了越来越多的关注和

收稿日期: 2003-06-08; 修改日期: 2003-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(59978038)

作者简介: 黄 义(1936), 男, 陕西南郑人, 教授, 博士生导师, 从事结构工程及板壳理论研究(E-mail: huangyih@pub.xaonline.com);

*韩建刚(1975), 男, 陕西大荔人, 博士, 从事土与结构相互作用研究(E-mail: xianhjj@163.com)

重视, 在工程应用领域, 特别是在信号处理、图像处理、模式识别、语音识别、量子物理、地震勘测、流体力学、电磁场、CT 成像、机械故障诊断与监控、分形、数值计算等领域, 它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破。基于小波变换的小波分析技术是正在发展的新的数学分支。

由于小波分析中多尺度分析的尺度函数具有很好的分析特性和计算特性, 鉴于插值小波具有对称性及计算准确性, 本文选择插值小波的尺度函数来构造场函数。本文首先对插值小波的尺度函数进行改造, 使其在边界条件的处理上十分便捷, 然后将其作为基函数, 利用中厚板的二类变量广义变分原理, 建立了多变量小波有限元模型。由于独立设置二类场函数, 不用求导与相关物理关系, 再由于小波尺度函数具有连续性强和逼近精确度高等优点, 因此对各类场变量均有较好的计算精度。最后, 本文给出了小波有限元法求解中厚板和弹性地基上中厚板的数值结果, 并与其它方法所得结果进行了比较, 从结果的对比可以看出小波有限元法求解中厚板问题具有良好的精度和收敛性。

2 二类变量广义变分原理

在齐次边界条件下, 中厚板的二类变量广义势能泛函定义为^[2]:

$$\begin{aligned} \Pi_{2p} = & -\int_{\Omega} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^T \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}_b^{-1} \mathbf{M} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{P} d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q} d\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

式中位移 \mathbf{W} 和内力 \mathbf{M} 、 \mathbf{Q} 为二类独立的自变函数, 且均为待求的未知函数。对于中厚板问题, 共有 8 个未知数, 其中:

$$\mathbf{W} = [\omega \quad \theta_x \quad \theta_y]^T$$

$$\mathbf{M} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T$$

$$\mathbf{Q} = [Q_x \quad Q_y]^T$$

$$\mathbf{P} = [q \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_b = D_b \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad C = \frac{5Et}{12(1+\mu)}$$

式中 D_b 为中厚板的弯曲刚度; C 为板的剪切刚度; E 为杨氏模量; μ 为泊松比。

基于广义位移与广义力的变分, 二类变量广义势能原理要求其势能泛函取其驻值, 则有以下方程:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{2p} = & \int_{\Omega} \delta \mathbf{M}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{W} + \mathbf{D}_b^{-1} \mathbf{M}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \delta \mathbf{Q}^T (-\mathbf{E}^T \mathbf{W} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{E}^T \delta \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^T \delta \mathbf{W} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \delta \mathbf{W} \mathbf{P}^T d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

积分上式的第三、四项, 并利用板的边界条件, 考虑到变分 $\delta \mathbf{W}$ 、 $\delta \mathbf{M}$ 、 $\delta \mathbf{Q}$ 均为彼此独立且不等于零的任意微小量, 所以可以得到的欧拉方程为:

$$-\mathbf{D}^T \mathbf{W} = \mathbf{D}_b^{-1} \mathbf{M} \quad (3)$$

$$\mathbf{E}^T \mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q} \quad (4)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{D}_b \mathbf{D}^T \mathbf{W} - \mathbf{E} \mathbf{C} \mathbf{E}^T \mathbf{W} + \mathbf{P} = 0 \quad (5)$$

式(5)即为由广义位移分量表示的中厚板的平衡方程。对于文克尔(Winkler)地基上的中厚板的二类变量的广义势能只需要在(1)式中加入 $\iint_{\Omega} \frac{1}{2} k_e \omega^2 dx dy$ 一项即可, 式中 k_e 为弹性地基系数。

3 小波插值函数

3.1 插值小波

本节首先简要、概括地叙述一下插值小波及其主要特性, 作为以后应用的一个基础。插值小波的尺度 $\phi(x)$ 和相应的小波函数 $\psi(x)$ 满足以下二尺度关系:

$$\phi(x) = \sum_{k=-M}^M p(k) \phi(2x-k) \quad (6)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=-M}^M q(k) \phi(2x-k) \quad (7)$$

式中 $p(k)$ 、 $q(k)$ 称为滤波系数, M 为一最小的正整数。尺度函数与其对应的小波函数的支撑域分别

为:

$$\begin{aligned} \sup p(\phi) &= [-(M-1), (M-1)] \\ \sup p(\psi) &= [-(M/2-1), (M/2)] \end{aligned}$$

插值小波具有 Daubechies 类型小波所没有的一些令人欣慰的计算方便的特性, 主要特性有对称性、矩及扩张系数的计算简便性、基函数的求解不需采用求解特征值问题的方法及计算准确性。特别是具有以下性质:

$$\phi(l) = \delta_l, \quad l \in Z \quad (8)$$

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad (9)$$

因有此性质, 则免去了通常的 Daubechies 小波对整数点的求解, 插值小波可以直接通过(6)、(7)和(8)式得到插值小波的图形, 不必采用求解特征值问题的方法, 从而简化计算步骤。当 $M=4$ 时, 滤波系数 $p(k)$ 、 $q(k)$ 的值由表 1 给出。

表 1 滤波系数 $p(k)$ 、 $q(k)$ 的值

Table 1 Filter coefficients for interpolating wavelets

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p(k)$	0	-1/16	0	9/16	1	9/16	0	-1/16	0
$q(k)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0

插值小波的尺度函数和小波函数的图形如图 1 所示。

对于任意 $j \in Z$, 尺度函数

$$\phi_{j,l}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - l), \quad -\infty < l < \infty$$

且 $l \in Z$ 为空间 $L^2(R)$ 的正交基, 将 V_j 空间记为:

$$V_j = \{f \in L^2(R) \mid f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{j,l} \phi_{j,l}(x)\} \quad (10)$$

由于尺度函数的紧支撑特性, 任意函数 $f(x) \in V_j$ 可以表示为:

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{j,l} \phi_{j,l}(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (11)$$

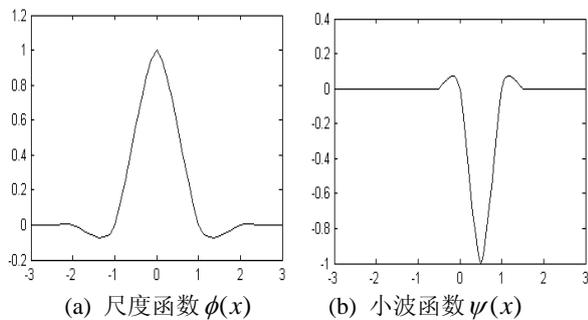


图 1 插值小波图形

Fig.1 Interpolating wavelet

3.2 构造插值函数

实际问题中, 常用到的是尺度函数在区间 $[x_0, x_N]$ 上做一种均匀划分, 若取 N 个节点, 则在区间上任一节点 i 处有:

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = 2^{-j} = \frac{x_N - x_0}{N}$$

则区间 $[x_0, x_N]$ 上任一函数 $S(x)$ 当 $M=4$ 时, 根据(11)式可以表示为:

$$S(x) = \sum_{i=-2}^{N+2} C_i \phi\left(\frac{x-x_0}{h} - i\right) \quad (12)$$

式中 C_i 为小波参数, 以下为方便起见, 令 $x_0 = 0$ 。中厚板两端的边界条件最常见的是以下三种类型的组合:

- (1) 固定边: $\omega = 0, \theta_n = \theta_s = 0$;
- (2) 简支边: $\omega = 0, M_n = 0, \theta_s = 0$;
- (3) 自由边: $M_n = M_s = 0, Q_n = 0$ 。

除此之外, 还可能是弹性支承或端点承受点力或点弯矩, 这里就不详述。

在以上所列举的各种边界条件中, 只有固定边位移、转角为 0, 以及简支边的位移为 0, 是强加边界条件, 其它各种边界条件都是自然边界条件, 在广义的变分问题中可不明确列出, 当能量达到极小值时, 即平衡态位移, 自然边界条件将自动得到满足。换句话说, 无需让变分问题中的基函数适应自然边界条件, 但是强加的边界条件必须得到满足, 这可在形成系统方程后再引入。为了使问题的边界条件易于处理, 将支座附近左中右五个点的基函数进行线性组合, 应用试凑法得到便于引入支座边界条件的插值小波尺度函数基, 表示为:

$$S(x) = \sum_{i=-2}^{N+2} r_i \phi_i(x) = \Phi(x)r \quad (13)$$

式(13)称为修正的插值小波尺度函数基, 其中

$$r = [r_{-2}, r_{-1}, r_0, \dots, r_i, \dots, r_N, r_{N+1}, r_{N+2}]^T \quad (14)$$

r 为列阵, 是尺度函数的节点参数。

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= [\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_i(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)] \quad (15) \\ &= [\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)] \end{aligned}$$

当 $N \geq 6$ 时, 将头五个函数换成其线性组合 $\phi_{-2}(x)$ 、 $\phi_{-1}(x)$ 、 $\phi_0(x)$ 、 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 依次为:

$$\begin{aligned} &\phi\left(\frac{x}{h}\right) + \phi\left(\frac{x}{h} + 1\right), \phi\left(\frac{x}{h} + 1\right), \phi\left(\frac{x}{h} + 2\right) + \frac{3}{24}\phi\left(\frac{x}{h} + 1\right), \\ &\phi\left(\frac{x}{h} - 1\right) + \phi\left(\frac{x}{h} + 1\right), \phi\left(\frac{x}{h} - 2\right) + \frac{3}{24}\phi\left(\frac{x}{h} - 1\right) \end{aligned}$$

末五个也同样处理, 则 $\phi_{N-2}(x)$ 、 $\phi_{N-1}(x)$ 、 $\phi_N(x)$ 、 $\phi_{N+1}(x)$ 和 $\phi_{N+2}(x)$ 依次为:

$$\begin{aligned} & \phi\left(\frac{x}{h}-N+2\right)+\frac{3}{24}\phi\left(\frac{x}{h}-N+1\right), \\ & \phi\left(\frac{x}{h}-N+1\right)+\phi\left(\frac{x}{h}-N-1\right), \\ & \phi\left(\frac{x}{h}-N-2\right)+\frac{3}{24}\phi\left(\frac{x}{h}-N-1\right), \\ & \phi\left(\frac{x}{h}-N-1\right), \quad \phi\left(\frac{x}{h}-N\right)+\phi\left(\frac{x}{h}-N-1\right) \end{aligned}$$

改造后的基函数具有以下特点：在左端点 $x=0$ 处

$$\begin{aligned} \phi_k(0) &= 0 \quad (k \neq -2) \\ \phi'_k(0) &= 0 \quad (k \neq -2, -1) \end{aligned}$$

在右端点 $x=x_N$ 处

$$\begin{aligned} \phi_k(x_N) &= 0 \quad (k \neq N+2) \\ \phi'_k(x_N) &= 0 \quad (k \neq N+2, N+1) \end{aligned}$$

基函数的这一特点使得边界处理变得十分方便。

4 多变量小波有限元法方程

应用乘积型的二元插值小波尺度函数基构造中厚板的二类变量场函数如下：

$$\mathbf{M} = \Psi_1 \mathbf{W}_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{Q} = \Psi_2 \mathbf{W}_2 \quad (17)$$

$$\mathbf{W} = \Psi_3 \mathbf{W}_3 \quad (18)$$

式中：

$$\mathbf{W}_1 = [A^1 \quad B^1 \quad C^1]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{W}_2 = [A^2 \quad B^2]^T \quad \mathbf{W}_3 = [A^3 \quad B^3 \quad C^3]^T$$

A^1 、 B^1 、 C^1 、 A^2 、 B^2 、 A^3 、 B^3 和 C^3 均为常系

式中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_b(1-\mu^2)} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & \frac{\mu}{D_b(1-\mu^2)} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{D_b(1-\mu^2)} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & \frac{-1}{D_b(1-\mu^2)} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{D_b(1-\mu^2)} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C} A_x^{00} \otimes A_y^{00} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -A_x^{01} \otimes A_y^{00} & 0 \\ 0 & 0 & -A_x^{00} \otimes A_y^{01} \\ 0 & -A_x^{00} \otimes A_y^{01} & -A_x^{01} \otimes A_y^{00} \\ A_x^{01} \otimes A_y^{00} & -A_x^{00} \otimes A_y^{00} & 0 \\ A_x^{00} \otimes A_y^{01} & 0 & -A_x^{00} \otimes A_y^{00} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{k}_e \begin{bmatrix} A_x^{00} \otimes A_y^{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [A^1 \quad B^1 \quad C^1 \quad A^2 \quad B^2]^T$$

$$\mathbf{R} = [P_1^T \quad 0 \quad 0]^T$$

数行矩阵， \mathbf{W}_1 、 \mathbf{W}_2 及 \mathbf{W}_3 均为列矩阵，它们都是待求的未知量。

$$\mathbf{A}^1 = [A_{-2}^1, A_{-1}^1, A_0^1, \dots, A_N^1, A_{N+1}^1, A_{N+2}^1] \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_i^1 = [a_{-2i}^1, a_{-1i}^1, a_{0i}^1, \dots, a_{Ni}^1, a_{N+1i}^1, a_{N+2i}^1] \quad (21)$$

$(i = -2, -1, 0, \dots, N, N+1, N+2)$

其它的常系数行矩阵的构造与矩阵 \mathbf{A}^1 相似。矩阵 Ψ_1 、 Ψ_2 和 Ψ_3 均与尺度函数基有关，它们的具体表达式如下：

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \Phi(x) \otimes \Phi(y) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(x) \otimes \Phi(y) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(x) \otimes \Phi(y) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} \Phi(x) \otimes \Phi(y) & 0 \\ 0 & \Phi(x) \otimes \Phi(y) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} \Phi(x) \otimes \Phi(y) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(x) \otimes \Phi(y) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(x) \otimes \Phi(y) \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中 \otimes 为两个矩阵相乘的 Kronecker 乘积，即：

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = a_{im} b_{jl}$$

将(16)~(18)代入式(1)，由二类变量的广义变分原理

$$\frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial W_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (25)$$

可以得到小波有限元方程组：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{W}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

上式中 \mathbf{K}_e 为弹性地基刚度矩阵，对于无弹性地基

上的中厚板其值为 0，式中：

$$A_x^{00} = \int_0^L [\Phi(x)]^T [\Phi(x)] dx$$

$$A_x^{01} = \int_0^L [\Phi(x)]^T [\Phi'(x)] dx \quad (x = x, y)$$
(27)

式(27)为一方阵，其中的 x 可由 y 进行替换。

荷载列阵为：

$$P_1 = \int_0^L \int_0^L q(x, y) \Phi(x) \otimes \Phi(y) dx dy$$
(28)

对于集中荷载作用的情况：

$$\int_0^L \int_0^L \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \Phi(x) \otimes \Phi(y) dx dy$$

$$= \Phi(\xi) \otimes \Phi(\eta)$$
(29)

式中 ξ 、 η 为集中荷载作用点的坐标。

5 数值结果

根据以上所推导的多变量小波有限元方程，利用 Matlab 编制了计算程序进行实施。为了验证本文方法的可靠性和计算精度，对矩形中厚板和弹性地基上的中厚板进行了计算，兹介绍如下。

5.1 方形中厚板

本例对四边简支和四边固定方板在均布荷载 q 作用下进行了计算，板厚为 t ，边长为 l ， $\mu = 0.3$ 。表 2 给出了在均布荷载作用下，采用 8×8 网格分化、厚跨比变化时的本文解与解析解的结果。表 3 给出了在均布荷载作用下矩形厚板($t/l=0.3$)在不同网格分化下的板中心挠度与弯矩。

表 2 均布荷载作用下矩形中厚板的板中心挠度($ql^4/100D_b$)
Table 2 Central deflection of thick rectangular plate under uniform loading ($ql^4/100D_b$)

厚跨比 t/l	四边简支		四边固定	
	本文解	解析解 ^[8]	本文解	解析解 ^[8]
0.01	0.4060	0.4062	0.1264	0.1265
0.1	0.4269	0.4273	0.1493	0.1499
0.2	0.4887	0.4906	0.2166	0.2167
0.3	0.5952	0.5956	0.3224	0.3227
0.35	0.6631	0.6641	0.3948	0.3951

5.2 弹性地基上的中厚板

弹性地基上的中厚板的计算图示如图 2。中厚板采用方形板，边长 $a=1m$ ，均布荷载的范围为方形区边长 $c=0.5m$ ，荷载 $q=1N/m^2$ ，其它参数为 $\mu=0.35$ ， $E=300MN/m^2$ ， $k_e=50MN/m^2$ ， $h=0.4$ 。表 4 给出了在均布荷载作用下，采用 8×8 网格分化时，

四边自由的弹性地基中厚板的小波有限元解与傅里叶级数解的结果。由于文献[9]给出的是应力解，所以本文通过中厚板的应力和弯矩之间关系也给出应力值，以便比较。从结果可以看出在边界点上，本文解可以精确地满足边界条件。

表 3 均布荷载作用下矩形厚板在不同网格下的板中心挠度与弯矩($t/l=0.3$)
Table 3 Central deflection and bending moment of thick rectangular plate under uniform loading ($t/l=0.3$)

整板网格	中心挠度($ql^4/100D_b$)		弯矩($ql^2/10$)	
	简支方板	固支方板	简支方板(中心)	固支方板(边中)
6×6	0.5947	0.3218	0.4932	-0.4087
8×8	0.5952	0.3224	0.4875	-0.4126
10×10	0.5953	0.3226	0.4810	-0.4182
解析解 ^[8]	0.5956	0.3227	0.4789	-0.426

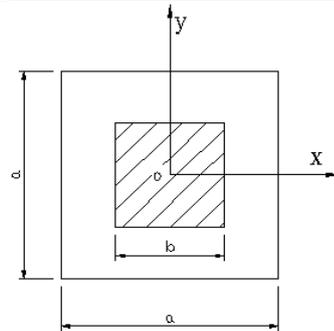


图 2 弹性地基板计算图示

Fig.2 Elastic foundation plate

从以上两例的数值结果可以看出，对于中厚板的各点广义位移和广义力均有较好的精度和收敛性。

表 4 均布荷载作用下弹性地基上四边自由中厚板的挠度和应力
Table 4 Deflections and stresses of free thick quadrilateral plate on elastic foundation under uniform loading

坐标(m)	w ($10^{-8}m$)		σ_x (N/m^2)	
	级数解 ^[9]	本文解	级数解 ^[9]	本文解
(0,0)	0.576	0.566	0.928	0.825
(0.1,0)	0.568	0.560	0.866	0.763
(0.2,0)	0.546	0.542	0.668	0.562
(0.3,0)	0.530	0.524	0.352	0.260
(0.4,0)	0.501	0.500	0.154	0.054
(0.5,0)	0.477	0.481	0.091	0.0

6 结论

本文基于哈林格—赖斯纳变分原理,采用乘积型二元插值小波的尺度函数作为插值函数来构造中厚板的多类场函数,建立了多变量小波有限元法方程组。由于独立的设置广义位移和广义力的场函数,可直接求解其值,不需要物理关系,亦不需要应用求导,从计算结果可以看出,利用小波有限元法求解中厚板及弹性地基厚板问题具有良好的精度和收敛性,此方法也可以运用到其它的物理问题求解中去。

参考文献:

- [1] 钱伟长. 变分法与有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
Qian Weichang. Variational method and finite element method [M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese)
- [2] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
Hu Haichang. Variational principles and their application in elastic mechanics [M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese)
- [3] Melosh R J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method [J]. AIAA J., 1963, 1(7): 1631-1637.
- [4] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions [J]. AIAA J., 1964, 2: 1333-1336.
- [5] 沈鹏程. 多变量样条有限元法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
Shen Pengcheng. Multivariate spline finite element method [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)
- [6] 秦荣. 计算结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
Qin Rong. Computational structural mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)
- [7] 沈鹏程. 结构分析中的样条有限元法[M]. 北京: 水利水电出版社, 1992.
Shen Pengcheng. Spline FEM method in structural analysis [M]. Beijing: Water Conservancy and Hydroelectricity Press, 1992. (in Chinese)
- [8] 张国祥, 刘宝琛. 厚板薄板通用的协调矩形单元[J]. 中国铁道科学, 2001, 22(2): 96-100.
Zhang Guoxiang, Liu Baoshen. Versatile compatible rectangular element for thick and thin plates [J]. China Railroad Science, 2001, 22(2): 96-100. (in Chinese)
- [9] D J Henwood. Fourier series for a rectangular thick plate with free edges on an elastic foundation [J]. Int. J. Numer. Meth. Engng., 1982, 18(12): 1801-1820.
- [10] 龙志飞, 岑松. 有限元法新论: 原理、程序、进展[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001.
Long Zhifei, Cen Song. Finite element method: principle, program and advancement [M]. Beijing: China Water Conservancy and Hydropower Press, 2001. (in Chinese)

(上接第 119 页)

参考文献:

- [1] 胡时胜, 王道荣. 混凝土材料动态本构关系[J]. 宁波大学学报(理工版), 2000, 13: 82-85.
Hu Shisheng, Wang Daorong. Dynamic constitutive relation of concrete [J]. Journal of Ningbo University (Nsee), 2000, 13: 82-85. (in Chinese)
- [2] 胡时胜, 王道荣. 冲击载荷下混凝土材料的动态本构关系[J]. 爆炸与冲击, 2002, 22(3): 242-246.
Hu Shisheng, Wang Daorong. Dynamic constitutive relation of concrete under impact [J]. Explosion and Shock Waves, 2002, 22(3): 242-246. (in Chinese)
- [3] 陈江瑛, 王礼立. 水泥砂浆的率型本构方程[J]. 宁波大学学报(理工版), 2000, 13(2): 1-5.
Chen Jiangying, Wang Lili. Rate-dependent constitutive equation of cement mortar [J]. Journal of Ningbo University (Nsee), 2000, 13(2): 1-5. (in Chinese)
- [4] 陈江瑛, 黄旭升, 王礼立. 混凝土的动态损伤演化[J]. 宁波大学学报(理工版), 2000, 13(增刊): 170-173.
Chen Jiangying, Huang Xusheng, Wang Lili. Dynamic damage evolution of concrete [J]. Journal of Ningbo University (Natural Science Edition), 2000, 13(Suppl): 170-173. (in Chinese)
- [5] 董毓利, 谢和平, 赵鹏. 不同应变率下混凝土受压全过程的试验研究及其本构模型[J]. 水利学报, 1997, 7: 72-77.
Dong Yuli, Xie Heping, Zhao Peng. Experimental study and constitutive model of concrete under compression with different strain rate [J]. Journal of Water Conservancy, 1997, 7: 72-77. (in Chinese)
- [6] D L Grote, S W Park, M Zhou. Dynamic behavior of concrete at high strain rates and pressures: I. experimental characterization [J]. International Journal of Impact Engineering, 2001, 25: 869-886.
- [7] S W Park, Q Xia, M Zhou. Dynamic behavior of concrete at high strain rates and pressures: II. numerical simulation [J]. International Journal of impact Engineering, 2001, 25: 887-910.
- [8] 尚仁杰. 混凝土动态本构行为研究[D]. 大连: 大连理工大学, 1994.
Shang Renjie. Dynamic constitutive characteristic study of concrete [D]. PhD Thesis: Dalian University of Technology, 1994. (in Chinese)
- [9] 王礼立, 蒋昭镛, 陈江瑛. 材料微损伤在高速变形过程中的演化及其对率型本构关系的影响[J]. 宁波大学学报, 1996, 9(3): 47-55.
Wang Lili, Jiang Zhaobiao, Chen Jiangying. Micro-damage evolution in high velocity deformation and its influence on rate-depedent constitutive relation of materials [J]. Journal of Ningbo University, 1996, 9(3): 47-55. (in Chinese)
- [10] 肖诗云, 林皋, 王哲. 应变率对混凝土抗拉特性影响[J]. 大连理工大学学报, 2001, 41(6): 721-724.
Xiao Shiyun, Lin Gao, Wang Zhe, Lu Jingzhou. Effects of strain rate on dynamic behavior of concrete in tension [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2001, 41(6): 721-724. (in Chinese)