

文章编号: 1000-4750(2006)Sup.I-0001-06

摩擦因素对微压痕实验的影响

张 帆¹, *黄克智¹, 黄永刚², 秦 江¹

(1. FML, 清华大学航天航空学院工程力学系, 北京 100084; 2. 伊利诺伊大学机械与工业工程系, Urbana IL 61801)

摘 要: 材料在发生微米亚微米尺度不均匀变形时表现出尺度效应, 微压痕问题是典型代表。目前的微压痕研究中普遍采用无摩擦假设, 而相对缺少对摩擦因素的深入研究。基于 CMSG 低阶应变梯度塑性理论, 通过有限元分析研究了摩擦因素对微压痕实验的影响。结果表明对于目前普遍采用的较钝的 Berkovich 压头(简化为圆锥后顶角为 140.6°), 摩擦的影响并不重要, 可以简化为无摩擦情况。

关键词: 固体力学; 压痕; 应变梯度; 摩擦; 尺度效应

中图分类号: O344.3 文献标识码: A

FRICITION EFFECT ON INDENTATION

ZHANG Fan¹, *HWANG Keh-chih¹, HUANG Yong-gang², QIN Jiang¹

(1. FML, Department of Engineering Mechanic, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA)

Abstract: Microindentation is a classical experiment which shows a size-dependent material behavior under nonuniform deformation at micron and submicron scales. Many investigations on microindentation have been carried out under frictionless assumption while less discussion has been undertaken on the friction effect. Based on a conventional theory of mechanism based strain gradient plasticity (CMSG), a FEM analysis was developed to investigate the friction effect on micro-indentation. For the widely used Berkovich indenter, which can be simplified to a conical indenter with 140.6° cone angle, the result shows that the friction effect was negligible and the problem could be simplified to be frictionless.

Key words: solid mechanics; indentation; strain gradient; friction; size dependent effect

压痕实验是人们研究材料局部性质时一种有效的实验手段。但是压入深度进入微米或亚微米量级的微压痕实验, 却表现出与宏观压痕实验不同的性质。材料在微压痕实验中表现出了尺度效应, 即微压痕硬度随着压入深度的减小而增加^[1~3]。已有的经典塑性理论无法解释这种尺度效应, 因此人们发

展了应变梯度塑性理论来研究微米亚微米尺度内的变形问题。目前为止, 基于应变梯度塑性理论, 人们已经对微压痕问题进行了大量的研究工作, 并取得了很有意义的结果。例如, Nix 和 Gao^[4]提出的压痕硬度平方与压入深度倒数之间线性关系的解析模型、Begley 和 Hutchinson^[5]基于 SG 理论^[6]

收稿日期: 2005-11-29; 修改日期: 2005-12-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(10121202); 对外交流与合作项目(10440420576); 教育部博士点专项科研基金(20020003023); 教育部重点专项基金(0306)

作者简介: 张 帆(1978), 男, 辽宁人, 博士, 从事固体力学研究;

*黄克智(1927), 男, 江西人, 教授, 院士, 从事固体力学研究(E-mail: huangkz@mail.tsinghua.edu.cn);

黄永刚(1962), 男, 北京人, 清华大学长江讲座教授, 博士, 从事固体力学研究;

秦 江(1981), 男, 河北人, 博士生, 从事固体力学研究。

的有限元分析、Huang 等^[7]基于 MSG 理论^[8-9]的有限元分析以及 Qu 等^[10]基于 CMSG 理论^[11]的有限元分析,都与实验结果符合得很好。

但是上述这些研究都采用了一个相同的假设——压头和压入材料之间的接触假设为理想光滑,即无摩擦情况。由于实际的实验中无法达到理想光滑,因此有必要探讨摩擦因素对微压痕实验的影响,这就是本文所研究的主要问题。

本文将参考 Swadener 等^[3]的金属钨微压痕实验,基于 CMSG 低阶应变梯度塑性理论,通过有限元分析研究摩擦因素对微压痕实验的影响。其中第 1 部分将首先简单介绍一下 CMSG 理论,在第 2 部分给出计算模型,第 3 部分对结果进行分析和讨论,最后在第 4 部分给出结论。

1 CMSG 理论

1.1 Taylor 位错模型

Taylor 位错模型给出了剪切流动应力 τ 关于位错密度 ρ 的表达式^[12,13]

$$\tau = \alpha \mu b \sqrt{\rho} = \alpha \mu b \sqrt{\rho_S + \rho_G} \quad (1)$$

其中 μ 是剪切模量, b 是 Burgers 矢量的大小, α 是一个经验系数,一般在 0.3~0.5 之间。位错密度 ρ 分为统计储存位错(SSD)密度 ρ_S 和几何必需位错(GND)密度 ρ_G 两部分。Nye^[14]和 Ashby^[15]指出几何必需位错密度与塑性变形的曲率或者等效塑性应变梯度 η^p 有关

$$\rho_G = \bar{r} \frac{\eta^p}{b} \quad (2)$$

这里 $\bar{r}$ 是 Nye 因子, Arsenlis 和 Parks^[16]引入它以反映三维非均匀塑性变形中的几何必需位错密度的放大系数。对于面心立方(fcc)晶体, $\bar{r}$ 在 1.90 左右。

由剪切流动应力 τ 可以得到拉伸流动应力 $\sigma_{flow} = M\tau$ 。这里 M 是 Taylor 因子,用来表示各项异性晶体在连续介质水平上的各项同性程度。对于面心立方(fcc)晶体^[17-19]或者沿{110}面滑动的体心立方(bcc)晶体^[19], $M=3.06$ 。于是由式(1)和式(2)可以得到拉伸流动应力

$$\sigma_{flow} = M \alpha \mu b \sqrt{\rho_S + \bar{r} \frac{\eta^p}{b}} \quad (3)$$

在单轴拉伸实验中,流动应力与塑性应变 ε^p 之间的关系可以表示为

$$\sigma_{flow} = \sigma_{ref} f(\varepsilon^p) \quad (4)$$

这里, σ_{ref} 是参考应力, f 是由单向拉伸曲线确定的一个无量纲的函数。由于在单向拉伸中不存在塑性应变梯度 η^p , 所以可以从式(3)和式(4)确定 SSD 密度 ρ_S 为

$$\rho_S = \left[\frac{\sigma_{ref} f(\varepsilon^p)}{M \alpha \mu b} \right]^2 \quad (5)$$

于是式(3)中的流动应力可以表示成

$$\sigma_{flow} = \sqrt{[\sigma_{ref} f(\varepsilon^p)]^2 + M^2 \bar{r} \alpha^2 \mu^2 b \eta^p} = \sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l \eta^p} \quad (6)$$

这里

$$l = M^2 \bar{r} \alpha^2 \left(\frac{\mu}{\sigma_{ref}} \right)^2 b = 18 \alpha^2 \left(\frac{\mu}{\sigma_{ref}} \right)^2 b \quad (7)$$

是应变梯度塑性中的内禀材料长度(上面的第二个等号处用到了 $M = 3.06$ 以及 $\bar{r} = 1.90$), 大小在微米量级。

1.2 小变形 CMSG 理论

从(6)式可以看出,流动应力的率 $\dot{\sigma}_{flow}$ 同时依赖于塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p$ 和塑性应变梯度的率 $\dot{\eta}^p$, 而后者导致了 MSG 高阶应变梯度塑性理论^[8,9]。为了避免在低阶的 CMSG 应变梯度塑性理论中出现高阶应力, 本文将单拉应力应变关系 $\sigma = \sigma_{ref} f(\varepsilon^p)$ 改写为

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\sigma'_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\sigma} \left[\frac{\sigma}{\sigma_{ref} f(\varepsilon^p)} \right]^m \quad (8)$$

这里 $\dot{\varepsilon}^p$ 是塑性应变率, σ'_{kl} 和 ε'_{kl} 分别是偏斜应力和偏斜应变率。当 $m \rightarrow \infty$ 时, 式(8)可以退化为单向拉伸应力应变关系 $\sigma = \sigma_{ref} f(\varepsilon^p)$ 。将式(8)分母中的拉伸流动应力 $\sigma_{ref} f(\varepsilon^p)$ 替换为式(6)中通过 Taylor 位错模型得到的流动应力

$$\sigma_{flow} = \sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l \eta^p}$$

以引入塑性应变梯度的影响。即

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\sigma'_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\sigma_e} \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l \eta^p}} \right]^m \quad (9)$$

这里将式(8)中的单轴拉伸应力 σ 替换为了等效应力 $\sigma_e = (3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}/2)^{1/2}$, 等效塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p = (2\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}/3)^{1/2}$ 。系数 m 很大时(≥ 20), 式(9)保证了等效应力 σ_e 十分接近于式(6)中的流动应力 σ_{flow} ; 换句话说, 屈服条件 $\sigma_e = \sigma_{flow} = \sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l \eta^p}$

在系数 m 很大时(≥ 20)得到了近似满足。

CMSG 中的体积应变率 $\dot{\varepsilon}_{kk}$ 和偏斜应变率 $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ 与应力率之间的关系仍然依循经典塑性理论, 即

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K}, \quad \dot{\varepsilon}'_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2\mu} + \frac{3\dot{\varepsilon}^p}{2\sigma_e} \sigma'_{ij} \quad (10)$$

将式(8)与式(9)联合起来可以推导得到 CMSG 理论本构模型

$$\dot{\sigma}_{ij} = K \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left\{ \dot{\varepsilon}'_{ij} - \frac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\sigma_e^2} \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}} \right]^m \dot{\varepsilon}_{kl} \right\} \quad (11)$$

或

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{9K} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_e} \frac{1}{\left[\frac{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}}{\sigma_e} \right]^m - 1} \frac{\dot{\sigma}_e}{2\mu} \quad (12)$$

如果我们将塑性模量定义为

$$h_p = 3\mu \left\{ \left[\frac{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}}{\sigma_e} \right]^m - 1 \right\}$$

式(12)就可以整理为经典 J_2 流动理论

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{9K} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_e} \frac{3}{2h_p} \dot{\sigma}_e \text{ 的形式。}$$

等效塑性应变梯度 η^p 的定义与高阶的 MSG 理论^[8,9]相同

$$\eta^p = \int \dot{\eta}^p dt = \sqrt{\frac{1}{4} \dot{\eta}_{ijk}^p \dot{\eta}_{ijk}^p} \quad (13)$$

$$\dot{\eta}_{ijk}^p = \dot{\varepsilon}_{ik,j}^p + \dot{\varepsilon}_{jk,i}^p - \dot{\varepsilon}_{ij,k}^p$$

其中 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 是塑性应变率。

1.3 有限变形 CMSG 理论

接下来我们将上一小节中的小变形 CMSG 理论推广到次弹塑性有限变形理论。对于金属一类的小弹性变形情况, 次弹塑性理论可以很好地描述。

将小变形情况下的本构关系(11)和式(12)中的应力 σ_{ij} 以及应力率 $\dot{\sigma}_{ij}$ 分别替换为 Kirchhoff 应力

τ_{ij} 以及 Kirchhoff 应力的 Jaumann 率 $\left(\frac{\nabla}{\tau} \right)_{ij}$ 。类似地,

将小变形关系式中的应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 替换为变形率 $d_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$, 这里 $\mathbf{v}$ 是速度。有限变形情况下的

次弹塑性 CMSG 本构关系于是可以表示为

$$\left(\frac{\nabla}{\tau} \right)_{ij} = K d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left\{ d'_{ij} - \frac{3\tau'_{ij}\tau'_{kl}}{2\tau_{eq}^2} \left[\frac{\tau_{eq}}{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}} \right]^m d'_{kl} \right\} \quad (14)$$

和

$$d_{ij} = \frac{1}{9K} \left(\frac{\nabla}{\tau} \right)_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\nabla}{\tau'} \right)_{ij} + \frac{\tau'_{ij}}{\tau_{eq}} \frac{1}{\left[\frac{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}}{\tau_{eq}} \right]^m - 1} \frac{\dot{\tau}_{eq}}{2\mu} \quad (15)$$

其中 d'_{ij} , τ'_{ij} 和 $\left(\frac{\nabla}{\tau'} \right)_{ij}$ 分别是 d_{ij} , τ_{ij} 和 $\left(\frac{\nabla}{\tau} \right)_{ij}$ 的偏斜部分; 而 $\tau_{eq} = (3\tau'_{ij}\tau'_{ij}/2)^{1/2}$ 。控制等效塑性应变和等效塑性应变梯度的式(9)和式(13), 现在改为

$$\dot{\varepsilon}^p = \left(\frac{\nabla}{\tau'} \right)_{kl} d_{kl} \left[\frac{\tau_{eq}}{\sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p}} \right]^m \quad (16)$$

和

$$\eta^p = \int \dot{\eta}^p dt, \quad \dot{\eta}^p = \sqrt{\frac{1}{4} \dot{\eta}_{ijk}^p \dot{\eta}_{ijk}^p} \quad (17)$$

$$\dot{\eta}_{ijk}^p = d_{ik,j}^p + d_{jk,i}^p - d_{ij,k}^p$$

这里 $d_{ij}^p = \frac{3\dot{\varepsilon}^p}{2\tau_{eq}} \tau'_{ij}$ 。

压痕问题中, 压头尖端下方的材料会发生比较剧烈的变形, 所以在接下来的有限元分析中我们将采用本小节的次弹塑性 CMSG 理论。

2 有限元分析模型

2.1 金属铱的材料参数

Swadener 等^[3]报告了实验中所用金属铱的杨氏模量 $E = 540\text{GPa}$ 以及泊松比 $\nu = 0.246$, 由此可以得到剪切模量 $\mu = 217\text{GPa}$ 。金属铱的 Burgers 矢量大小为 $b = 0.27\text{nm}$ 。

Swadener 等^[3]还提供了实验中所用金属铱的单轴拉伸实验的应力应变曲线数据, 如图 1 中的离散点所示。

这组单拉曲线数据可以用一个分段函数很好地拟合。当应变较小时采用幂硬化关系, 在应变较大

时采用线性硬化关系,具体函数形式如下

$$\sigma = \begin{cases} [121 + 2575(\varepsilon^p)^{0.638}] \text{MPa} & \varepsilon^p < 0.02 \\ (200 + 6671\varepsilon^p) \text{MPa} & \varepsilon^p \geq 0.02 \end{cases} \quad (18)$$

式(18)的分段函数保证了应力应变关系在 $\varepsilon^p = 0.02$ 处的连续性,以及应力对应变一阶导数的连续性。从图 1 可以看到,用式(18)可以很好地拟合实验数据。基于这个应力应变关系,我们可以计算出材料铱的经典压痕硬度(即压入深度很大的情况)为 $H_0 = 2.38 \text{GPa}$,这个值与 Swadener 等^[3]实验中提供的经典硬度值符合得比较好。

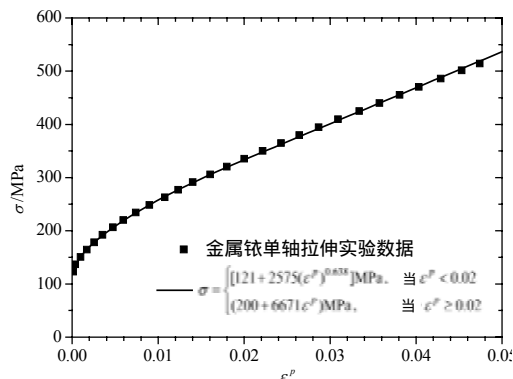


图 1 金属铱单轴拉伸应力应变曲线(Swadener 等^[3])

Fig.1 Tensile stress-strain curve of iridium (Swadener et al^[3])

材料参数中还剩下 Taylor 位错模型中的经验系数 α 需要确定。

2.2 几何模型

模型中的压头形状被简化为了一个轴对称的圆锥,锥角为 140.6° ,以保证在压入深度 h 相同的情况下锥形压头的接触面积与实验中所采用的 Berkovich 压头接触面积 $A=24.5h^2$ 相同^[2]。在计算中将压头简化为刚体,这是众多压痕模型普遍采用的假设^[5,7,10]。

图 2 显示了轴对称压头与下方金属铱的有限元

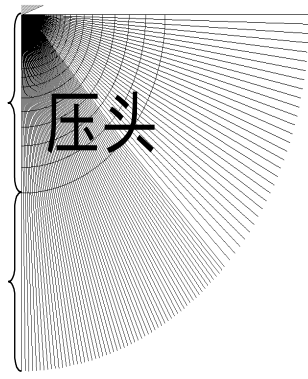


图 2 有限元网格

Fig.2 Finite element mesh

网格示意图。金属铱在靠近压头的区域网格很细,从压头与压入材料的接触面向外网格逐渐稀疏,在远离压头与金属铱接触面的区域采用 ABAQUS 的轴对称无限元(axisymmetric infinite element)以模拟无限大弹性场区域^[20]。

2.3 接触模型

在有限元分析中,压痕过程可以通过刚性压头与金属铱材料之间的接触(contact)模型来实现。接触模型采用 ABAQUS 中的有限滑动(finite sliding)和硬接触(hard)模型^[20]。这样的接触模型可以保证两个接触面之间不发生侵入(interpenetration)。在接触区域内的法向力和切向力分别连续变化,而在接触区以外为零。CMSEG 由于只需通过用户自定义材料子程序 UMAT 引入 ABAQUS 中,所以可以和 ABAQUS 中的接触模型一起使用。

在分析中我们分别考虑了理想光滑即无摩擦情况、摩擦因数 $\nu = 0.2$ 的有摩擦情况以及摩擦因数 $\nu = 1.0$ 的极端情况。这些摩擦情况可以很容易地引入 ABAQUS 的接触模型中。

3 结果与讨论

2.1 节中的材料参数还剩下 Taylor 位错模型中的经验系数 α 需要确定。通过无摩擦情况下(即摩擦因数 $\nu = 0$)的有限元分析,对实验数据进行拟合可以得到 $\alpha=0.430$,它符合 α 常见取值范围(0.3 左右)。此时无摩擦 CMSEG 理论计算结果与实验数据的比较如图 3 所示。

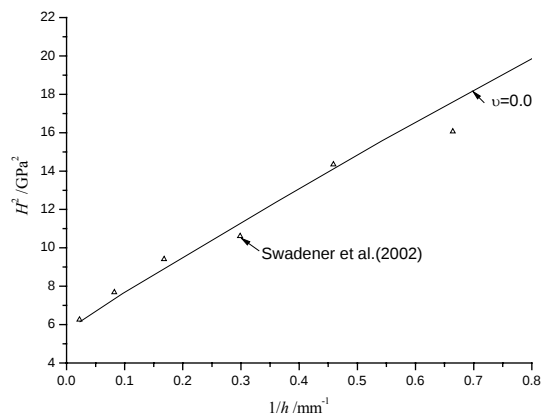


图 3 $\alpha=0.430$ 无摩擦接触结果与 Swadener 等^[3]实验的比较

Fig.3 Comparison between the result of frictionless contact with $\alpha=0.430$ and the experimental data of Swadener et al. ^[3]

图 4 显示了不同摩擦情况下计算得到的硬度平方随压入深度倒数的变化关系。从图中可以看到,

无摩擦 ($\nu=0.0$)、摩擦因数 $\nu=0.2$ 和摩擦因数 $\nu=1.0$ 的三条曲线十分接近,这说明对于本文所研究的实验中常用的相对较钝的 Berkovich 压头(简化为圆锥形时锥角 $\theta=140.6^\circ$)情况,摩擦因素对压痕硬度的影响并不明显。

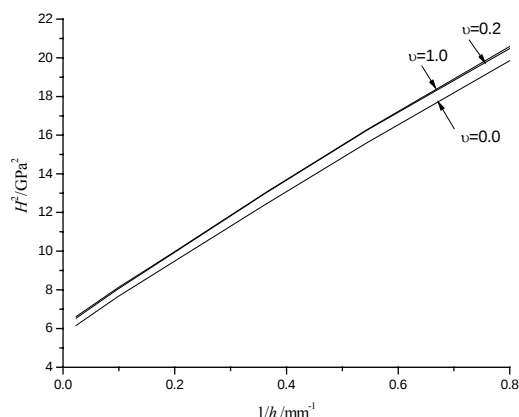


图4 不同摩擦情况的结果

Fig.4 Results with different frictions

分析压痕实验中材料的加载情况可以看到,由于 Berkovich 压头相对较钝,简化为圆锥形时锥角 $\theta=140.6^\circ$,压头与材料的接触面接近水平,所以材料的受载情况类似于单向压缩情况。这种变形形式下材料表面对压头的反力主要为法向力,而切向力相对较弱,所以摩擦因素的影响此时并不明显。但是如果压头比较尖锐时,压头会陷入材料中很深,材料的受载情况与目前研究的情况会有较大差别,压头上所受到的法向力与切向力的相对大小也会发生变化,所以摩擦因素在该情况下的影响还需要做进一步的研究。

从图4中我们还可以看到,虽然三条曲线十分接近,但相比较之下,摩擦因数 $\nu=0.2$ 的曲线与摩擦因数 $\nu=1.0$ 的曲线非常接近,而它们都与无摩擦情况的曲线有一定距离。这说明此时提供压头上切向力的摩擦以静摩擦为主,所以摩擦因数不同的两条曲线之间的差别较小。对于压头比较尖锐的情况,由于法向力与切向力相对大小关系的变化,摩擦中动摩擦和静摩擦的情况以及不同摩擦因数对压痕硬度的影响,也同样需要做进一步的研究。

通过图4可以看到,对于目前压痕实验中普遍采用的 Berkovich 压头,摩擦因素对微压痕硬度的影响很小,所以在分析和模拟压痕问题时,可以简化为无摩擦情况。

4 结论

本文基于 CMSG 应变梯度塑性理论,通过有限元分析对摩擦因素在压痕实验中所起的作用进行了讨论。通过对无摩擦、摩擦因数 $\nu=0.2$ 和 $\nu=1.0$ 三种情况下硬度曲线的比较可以看到,对于微压痕实验中普遍采用的 Berkovich 这种相对较钝的压头(简化为圆锥形时锥角 $\theta=140.6^\circ$),摩擦因素对压痕硬度的影响并不明显,在分析中可以简化为无摩擦情况。

参考文献:

- [1] Nix W D. Mechanical properties of thin films [J]. Metallurgical Transactions A (Physical Metallurgy and Materials Science), 1989, 20A:2217~2245.
- [2] McElhaney K W, Vlassak J J, Nix W D. Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiments [J]. Journal of Materials Research, 1998, 13: 1300~1306.
- [3] Swadener J G, George E P, Pharr G M. The correlation of the indentation size effect measured with indenters of various shapes [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, 50:681~694.
- [4] Nix W D, Gao H. Indentation size effects in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, 46: 411~425.
- [5] Begley M R, Hutchinson J W. The mechanics of size-dependent indentation [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, 46: 2049~2068.
- [6] Fleck N A, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity [C]. In: Hutchinson J W, Wu T Y eds. Advances in Applied Mechanics, Vol. 33. New York: Academic Press, 1997. 295~361.
- [7] Huang Y, Xue Z, Gao H, Nix W D, Xia Z C. A study of microindentation hardness tests by mechanism-based strain gradient plasticity [J]. Journal of Materials Research, 2000, 15: 1786~1796.
- [8] Gao H, Huang Y, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity-I: theory [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999, 47: 1239~1263.
- [9] Huang Y, Gao H, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity-II: Analysis [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48: 99~128.
- [10] Qu S, Huang Y, Nix W D, Jiang H, Zhang F, Hwang K C. Indenter tip radius effect on the Nix-Gao relation in micro-and nanoindentation hardness experiments [J].

- Journal of Materials Research, 2004, 19: 3423~3434.
- [11] Huang Y, Qu S, Hwang K C, Li M, Gao H. A conventional theory of mechanism based strain gradient plasticity [J]. International Journal of Plasticity, 2004, 20: 753~782.
- [12] Taylor G I. The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I.-theoretical [J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1934, 145: 362~387.
- [13] Taylor G I. Plastic strain in metals [J]. Journal of the Institute of Metals, 1938, 62: 307~324.
- [14] Nye J F. Some geometrical relations in dislocated crystals [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1953, 1: 153~162.
- [15] Ashby M F. The deformation of plastically non-homogeneous alloys [J]. Philosophical Magazine, 1970, 21: 399~424.
- [16] Arsenlis A, Parks D M. Crystallographic aspects of geometrically-necessary and statistically stored dislocation density [J]. Acta Materialia, 1999, 47: 1597~1611.
- [17] Bishop J F W, Hill R. A theory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses [J]. Philosophical Magazine, 1951, 42: 414~427.
- [18] Bishop J F W, Hill R. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline facecentered metal [J]. Philosophical Magazine, 1951, 42: 1298~1307.
- [19] Kocks U F. The relation between polycrystal deformation and single crystal deformation [J]. Metallurgical and Materials Transactions, 1970, 1: 1121~1144.
- [20] ABAQUS Analysis User's Manual Version 6.4 [M]. ABAQUS Inc., 2003.

(上接第 10 页)

- [5] Shimizu Y, Moriwaki Y. Buckling strength of lining shells of pressure vessels [J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 1992, 114(8): 308~314.
- [6] Yamamoto Yoshiyuki, Matsubara Norihiro. Buckling of a cylindrical shell under external pressure restrained by an outer rigid wall [A]. Thompson J M T, Hunt G W, eds. Collapse, the Buckling of Structures in Theory and Practice[C]. London: Cambridge Univ Press, 1983. 493~504. (in Chinese)
- [7] Razakamiadana A, Zidi M. Buckling and postbuckling of concentric cylindrical tubes under external pressure [J]. Mechanics Research Communications, 1999, 26(3): 353~362.
- [8] 范钦珊, 丁红丽, 徐秉业, 陈正新. 安全壳中钢衬壳热屈曲问题理论与实验研究(II)—实验部分[J]. 力学学报, 1999, 1: 84~91.
Fan Qinshan, Ding Hongli, Xu Bingye, Chen Zhengxin. Theoretical and experimental analyses on thermal buckling problems of linear shells (II) – Experimental part [J]. Acta Mechanica Sinica, 1999, 1: 84~91. (in Chinese)
- [9] 金观昌. 计算机辅助光学测量[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
Jin Guanchang. Computer-aided optical measurement [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese)
- [10] 陈火红. Marc 有限元实例分析教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
Chen Huohong. Examples on finite element analysis with marc [M]. Beijing: China Machinery Press, 2002. (in Chinese)
- [11] 郭英涛. 薄壳限制失稳的数值分析与实验研究[D]. 北京: 清华大学, 2004.
Guo Yingtao. Numerical and experimental investigations on buckling of restrained thin shells [D]. Beijing: Tsinghua University, 2004. (in Chinese)