

文章编号: 1000-4750(2005)02-0084-05

等效铰结桁架单元

*吴方伯, 陈坚强, 尚守平

(湖南大学土木工程学院, 长沙 410082)

摘 要: 基于有限元基本思想, 根据微元体与平面桁架单元或空间桁架单元应力、应变等效原则构造出一种更为简单适用的等效铰结桁架单元, 理论分析和计算结果表明, 用此模型来等效分析计算平面或空间应力问题是可行的, 它能达到减少计算工作量, 易于分析程序编制, 方便数据后处理等目的, 并能满足工程精度要求。

关键词: 有限元; 微元体; 等效铰结桁架单元; 平面应力; 空间应力

中图分类号: TU323 **文献标识码:** A

EQUIVALENT TRUSS ELEMENTS FOR PLANE AND SPACE PROBLEMS

*WU Fang-bo, CHEN Jian-qiang, SHANG Shou-ping

(School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: A new equivalent truss element method, is proposed on the basis of stress/strain equivalence between a truss element and a micro unit. Theoretical analysis and numerical examples show that it is feasible to analyze plane or space stress problems. The proposed method is simpler than the usual finite element method, and easy to be computerized. It is found that the results using the method satisfy engineering precision requirements.

Key words: finite element; micro unit; equivalent truss element; plane stress; space stress

随着电子计算机的飞速发展和广泛应用, 数值分析方法已成为求解科学技术问题的主要工具。差分法和变分法^[1-5]两类数值分析方法的出现, 以用来解决得不到函数式解答的平面和空间问题, 但当问题的边界条件比较复杂时, 用这两种数值解法求出解答仍然是很困难的。而有限单元法^[2-9]的出现, 是数值分析方法研究领域的重大突破性的进展, 它具有极大的通用性和灵活性, 有限单元法对结构进行离散化, 把连续弹性体变换成为由有限单元在有限多个结点上互相连结而成的结构。平面问题中, 较多采用的是三角形单元、矩形单元^{[2][4][5]}和任意四边形单元等二维单元, 空间问题一般采用常应变四面

体单元、八结点六面体单元^{[2][4][5]}等三维单元, 在应用它们时, 计算工作量很大, 数据处理繁琐。针对弹性力学问题计算的以上特点, 本文基于有限元基本思想, 将微元体应力分析等效为一个等效超静定铰结桁架单元静力分析(如图 1 所示), 这样就将由微元体^[5-10]构成的结构等效成为用等效铰结桁架单元构成的结构(如图 2 所示), 这是一种由一维单元(杆件)构成的结构, 从而充分利用铰结桁架结构模型在结点荷载作用下只有杆件轴力的特点, 使得计算分析更为简便。本文利用此方法来试算一悬臂梁和偏压柱, 将其计算结果与有限单元法以及经典材料力学方法^[10]计算所得的结果进行比较, 发现三种

收稿日期: 2003-09-12; 修改日期: 2003-11-07

作者简介: *吴方伯(1954), 男, 湖南人, 教授, 主要从事结构工程研究(E-mail: cjqqok@163.net);

陈坚强(1979), 男, 湖南人, 硕士, 主要从事结构工程研究(E-mail: cjqqqq2001@sina.com);

尚守平(1953), 男, 山东人, 教授, 博士生导师, 湖南大学土木工程学院院长, 主要从事结构工程研究。

方法计算结果相差很小。

1 计算模型及计算方法

1.1 等效铰结平面桁架单元

如图 1(1)所示平面应力问题微元体, x 和 y 方向尺寸分别为 dx 、 dy , 令 $dx=dy=h$, z 方向尺寸设

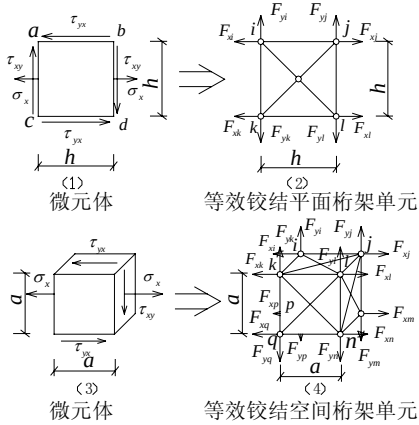


图 1 微元体与桁架单元等效关系图

Fig.1 Equivalent relation of micro unit and truss element

上述二者等效计算条件为等效荷载作用下结点位移相等, 然后用两弹性体形变势能、外力势能和总势能^{[2][3][6]}是否分别相等加以检验。因为所计算的是弹性小变形问题, 所以可以应用叠加原理^[4,10], 对图 1(1)至图 1(2)分别进行正应力和剪应力等效分析。以下是分析过程:

1.1.1 正应力等效分析

如图 3 所示, 将图 3(1)中 ac 和 bd 面上的正应力合力等效平分至图 3(2)中的结点 i 、 k 和 j 、 l 上, 即 $F_{xi} = F_{xj} = F_{xk} = F_{xl} = \sigma_x ht / 2$ 。图 3(1)中 ac 和 bd 面 X 方向相对位移 $u_1 = h\sigma_x / E$ 。图 3(2)结点 i 、 j 或 k 、 l 相对位移

$$u_2 = (\beta + 2\sqrt{2}\alpha / 2(\beta + \sqrt{2}\alpha)) \cdot (\sigma_x ht / 2) \cdot h$$

由 $u_1 = u_2$ 得

$$(\beta + 2\sqrt{2}\alpha) / (2(\beta + \sqrt{2}\alpha)) = 2 / (h \cdot t \cdot E) \quad (1)$$

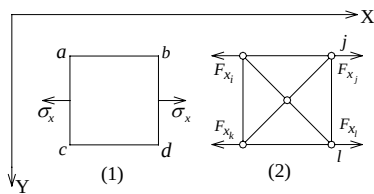


图 3 正应力等效分析图

Fig.3 Equivalent analysis of normal stress

为 t , 材料弹性模量为 E , 剪切模量为 G 。

如图 1(2)所示铰结平面桁架, 即微元体等效模型, 外围尺寸与微元体一样, 边长取为 h , 外围杆和内杆的截面抗拉(抗压)刚度分别设为 α 和 β , 即 $E_1 A_1 = \alpha, E_2 A_2 = \beta$ 。

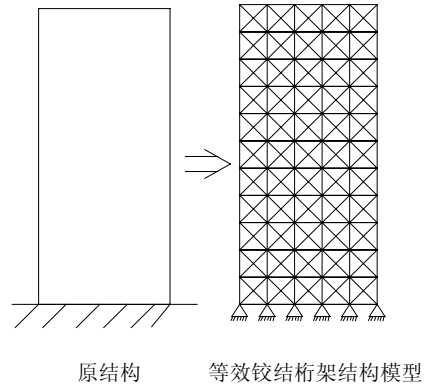


图 2 原结构与模型结构等效关系图

Fig.2 Equivalent relation of original structure and model structure

1.1.2 剪应力等效分析

如图 4 所示, 将图 4(1)中所示各面上的剪应力合力等效平分至图 4(2)中的结点 i 、 k 、 j 、 l 上, 如 i 结点 $F'_{xi} = \tau_{yx} \cdot ht / 2$, $F'_{yi} = \tau_{xy} \cdot ht / 2$

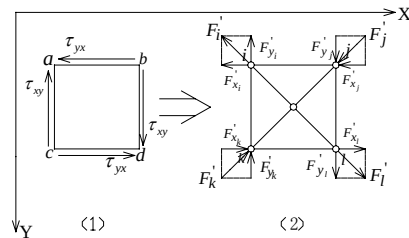


图 4 剪应力等效分析图

Fig.4 Equivalent analysis of shear stresses

根据剪应力互等定律 $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau$, 得 $F'_{xi} = F'_{yi}$, 根据静力等效原则, 用 F'_{xi} 与 F'_{yi} 之合力 $F'_i = \sqrt{2}\tau_{xy} \cdot ht / 2$ 代替二者作用在结点 i 上, 同理可得 j 、 k 、 l 的结点力。

图 4(1)中微元体剪应变 v_1 , 即直角 $\angle acd$ 的改变量为 $v_1 = \tau_{xy} / G$, 图 4(2)中桁架单元直角 $\angle ikl$ 的改变量 $v_2 = \sqrt{2}\tau_{xy} \cdot ht / \beta$, 由 $v_1 = v_2$ 得

$$\beta = \sqrt{2}htG \quad (2)$$

1.1.3 求解

联立方程(1)(2)可解得等效铰结平面桁架单元杆件截面抗拉(抗压)刚度:

$$\alpha = ht \cdot (E - 2G + \sqrt{4G^2 + E^2}) / 4, \beta = \sqrt{2}htG$$

1.1.4 检验

令 U 、 U_e ——微元体和等效铰结平面桁架单元的弹性变势能

U_p 、 U_{pe} ——微元体和等效铰结平面桁架单元的荷载势能

Π 、 Π_e ——微元体和等效铰结平面桁架单元的总势能

正应力等效分析中:

$$U_p = -\sigma_x ht \cdot \sigma_x / E \cdot h = -\sigma_x^2 h^2 t / E$$

$$U = 1/2 \cdot \sigma_x \cdot \sigma_x / E \cdot h^2 t = \sigma_x^2 h^2 t / 2E$$

$$\Pi = U + U_p = -\sigma_x^2 h^2 t / 2E$$

$$U_e = \sum_{i=1}^8 (N_i^2 l_i / 2E_i A_i)$$

$$= ((\beta + 2\sqrt{2}\alpha) / 2(\beta + \sqrt{2}\alpha)\alpha) F_{xi}^2 l_i = \sigma_x^2 h^2 t / 2E$$

$$U_{pe} = -2F_{xi} u_2 = -2 \cdot (\sigma_x ht / 2) \cdot \sigma_x / E \cdot h = -\sigma_x^2 h^2 t / E$$

$$\Pi_e = U_e + U_{pe} = -\sigma_x^2 h^2 t / 2E$$

由上可得 $\Pi = \Pi_e$

剪应力等效分析中:

$$U = 1/2 \cdot \tau \cdot \tau / G \cdot h^2 t = \tau^2 h^2 t / 2G$$

$$U_p = -\tau ht \cdot v_1 h = -\tau^2 h^2 t / G$$

$$\Pi = U + U_p = -\tau^2 h^2 t / 2G$$

$$U_e = \sum_{i=1}^8 (N_i^2 l_i / 2E_i A_i)$$

$$= (4F_i'^2 \cdot \sqrt{2} / 2 \cdot h / 2\beta) = \tau^2 h^2 t / 2G$$

$$U_{pe} = -2\sqrt{2} \cdot F_i'^2 h / \beta = -\tau^2 h^2 t / G$$

$$\Pi_e = U_e + U_{pe} = -\tau^2 h^2 t / 2G$$

由上可得 $\Pi = \Pi_e$

1.2 等效铰结空间桁架单元

1.2.1 空间等效分析

同等效铰结平面桁架单元推导过程, 可得等效铰结空间桁架单元杆件截面抗拉(抗压)刚度:

$$m = a^2 / 8 \cdot (E - 5G + \sqrt{9G^2 + E^2 + 2EG}),$$

$$n = \sqrt{2} / 2 \cdot a^2 G$$

m —— 等效铰结空间桁架单元棱杆截面抗拉(抗压)刚度

n —— 等效铰结空间桁架单元斜杆截面抗拉(抗压)刚度

a —— 等效铰结空间桁架单元棱长

G, E —— 原结构的材料剪切模量、弹性模量

1.2.2 能量校核

正应力等效分析中:

$$U = 1/2 \cdot \sigma_x \cdot \sigma_x / E \cdot a^2 a = \sigma_x^2 a^3 / 2E$$

$$U_p = -\sigma_x \cdot a \cdot a \cdot \sigma_x / E \cdot a = -\sigma_x^2 a^3 / E$$

$$\Pi = U + U_p = -\sigma_x^2 a^3 / 2E$$

$$U_e = \sum_{i=1}^{24} (N_i^2 l_i / 2E_i A_i) = \sigma_x^2 a^2 a / 2E = \sigma_x^2 a^3 / 2E$$

$$U_{pe} = -4F_{xi} u_2 = -4 \cdot \sigma_x aa / 4 \cdot \sigma_x / E \cdot a = -\sigma_x^2 a^3 / E$$

$$\Pi_e = U_e + U_{pe} = -\sigma_x^2 a^3 / 2E$$

由上可得 $\Pi = \Pi_e$

剪应力等效分析中:

$$U = 1/2 \cdot \tau \cdot \tau / G \cdot a^2 a = \tau^2 a^3 / 2G$$

$$U_p = -\tau a^2 \cdot \frac{\tau}{G} \cdot a = -\tau^2 a^3 / G$$

$$\Pi = U + U_p = -\tau^2 a^3 / 2G$$

$$U_e = \sum_{i=1}^{24} (N_i^2 l_i / 2E_i A_i) = \tau^2 a^2 a / 2G = \tau^2 a^3 / 2G$$

$$U_{pe} = -2\sqrt{2} F_i'^2 a / n = -\tau^2 a^3 / G$$

$$\Pi_e = U_e + U_{pe} = -\tau^2 a^3 / 2G$$

由上可得 $\Pi = \Pi_e$

由上可知微元体和等效铰结桁架单元两弹性体形变势能、外力势能和总势能分别相等, 加上前面两弹性体位移等效, 这样, 从理论上讲, 只要等效铰结桁架单元足够小, 就能用由等效铰结桁架单元构成的结构(即平面或空间铰结桁架)等效计算由微元体构成的结构(即连续弹性体)。

2 算例

(1) 如下图所示的悬臂梁, 材料的弹性模量 $E=30\text{e}6\text{kN/m}^2$, $G=12.5\text{e}6\text{kN/m}^2$, 泊松比 $\mu=0.2$ 。计算顶部右侧受竖向集中力作用下的竖向位移和水平应力。

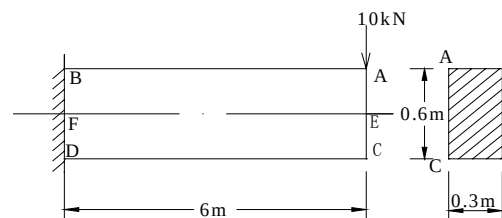


图5 悬臂梁示意图

Fig.5 Plan view of cantilever beam

解: 将右侧所示悬臂梁分别按八结点矩形有限单元法和本文所提出的等效铰结平面桁架单元法以及材料力学方法进行分析、编程计算得到如下对比表格及曲线: (注: 鉴于此结构特性, 只需对比

分析结点水平应力和竖向位移。其中,八结点矩形元单元为正方形,边长取 0.05m,矩形元厚度 0.3m。等效铰结平面桁架单元的边长取为 0.05m,根据本文所提公式得 $E_1 A_1 = \alpha = 0.159099\text{e}6\text{kN}$, $E_2 A_2 = \beta = 0.318198\text{e}6\text{kN}$ 。取 $E_1 = E_2 = 400\text{e}6\text{kN/m}^2$ 。取 F 点为坐标原点, FE 方向为 +X 轴, FB 方向为 +Y 轴。)

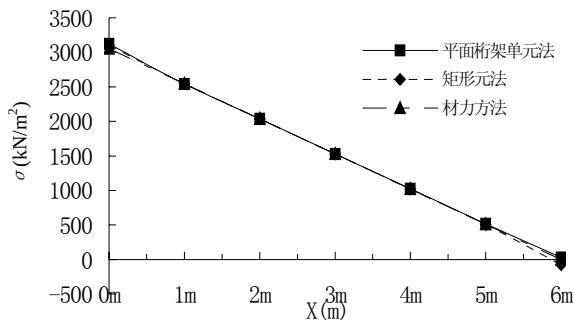


图 6 三种方法悬臂梁上缘结点水平应力(x 方向)比较

Fig.6 Comparison of horizontal stresses on the upper surface of the cantilever beam

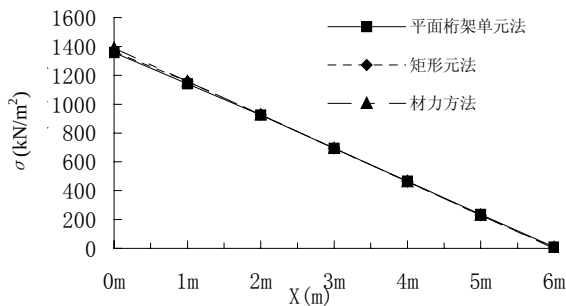


图 7 三种方法悬臂梁上距对称轴 0.15m 处结点水平应力(x 方向)比较

Fig.7 Comparison of horizontal stresses at a distance of 0.15m from the symmetry axis of the cantilever beam

表 1 三种方法悬臂梁结点水平应力(X 方向)比较

Table 1 Comparison of horizontal stresses in the cantilever beam

X/m	0.3m			0.15		
	平面桁架单元	矩形元	材力方法	平面桁架单元	矩形元	材力方法
1m	2539.9	2546.3	2546.296	1153.95	1157.415	1157.407
2m	2034.45	2037.05	2037.037	924.27	925.92	925.926
3m	1529.05	1527.8	1527.778	694.66	694.445	694.444
4m	1023.55	1018.515	1018.519	465.03	462.965	462.963
5m	517.7	509.04	509.259	235.51	231.555	231.481

表 2 三种方法悬臂梁结点竖向位移(Y 方向)比较

Table 2 Comparison of vertical displacements in the cantilever beam

X/m	0.3m		0.0m		-0.3m		材力方法
	平面桁架单元	矩形元	平面桁架单元	矩形元	平面桁架单元	矩形元	
0m	0	0	0	0	0	0	0
1m	0.17915	0.1793	0.17344	0.1793	0.17915	0.1793	0.1749
2m	0.65959	0.66728	0.65502	0.66728	0.65959	0.66728	0.6584
3m	1.3851	1.4022	1.3817	1.4022	1.3851	1.4022	1.3889
4m	2.2945	2.3223	2.2922	2.3223	2.2945	2.3223	2.304
5m	3.3264	3.3658	3.3253	3.3658	3.3264	3.3658	3.344
6m	4.425	4.4799	4.4192	4.4706	4.4188	4.4702	4.444

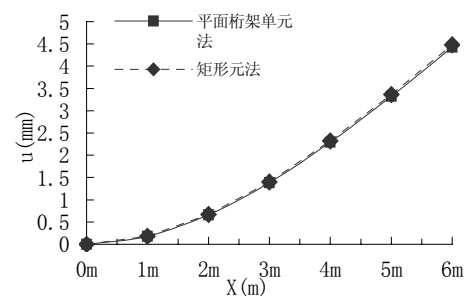


图 8 三种方法悬臂梁上缘结点竖向位移(Y 方向)比较

Fig.8 Comparison of vertical displacements on the upper surface of the cantilever beam

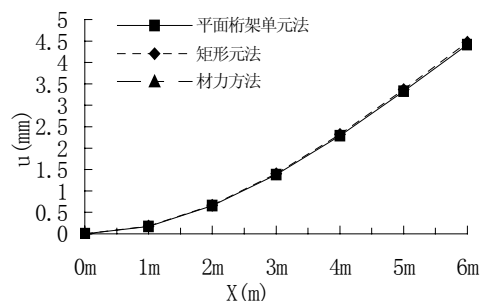


图 9 三种方法悬臂梁中线结点竖向位移(Y 方向)比较

Fig.9 Comparison of vertical displacements on the symmetry axis of the cantilever beam

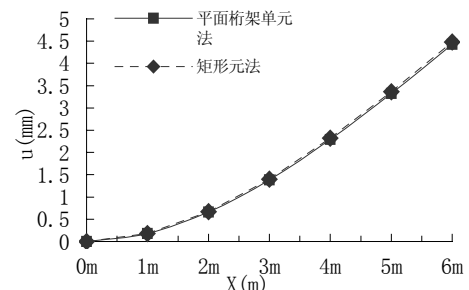


图 10 三种方法悬臂梁下缘结点竖向位移(Y 方向)比较

Fig.10 Comparison of vertical displacements on the lower surface of the cantilever beam

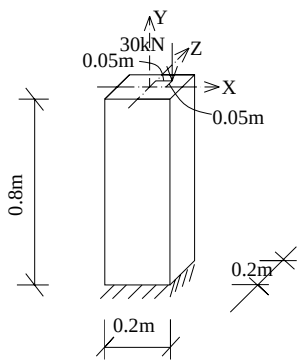


图 11 偏压柱示意图

Fig.11 Plan view of eccentrically compressed column

(2) 如图 11 所示的偏压柱，材料的弹性模量 $E=30\text{e}6\text{kN/m}^2$ ， $G=15\text{e}6\text{kN/m}^2$ ，计算如图示竖向集中力作用下的位移和竖向应力。

解：将右侧所示偏压柱分别按八结点六面体有限单元法和本文所提出的等效铰结空间桁架单元法以及材力方法进行分析、编程计算得到如下对比表格及曲线：(注：鉴于此结构特性，只需对比分析结点竖向应力和实际位移。其中等效铰结空间桁架单元的棱长取为 0.025m，根据本文所提公式得 $m=E_1A_1=1316.139405\text{kN}$ ， $n=E_2A_2=6629.126074\text{kN}$ ，取 $E_1=E_2=100\text{e}6\text{kN/m}^2$ 。)

表 3 三种方法偏压柱结点竖向应力(Y 方向)比较

Table 3 Comparison of vertical stresses in the eccentrically compressed column

Z(m) X(m) Y(m)		-0.1			Z(m) X(m) Y(m)		0.1		
		桁架单元	有限元	材力方法			桁架单元	有限元	材力方法
-0.1	-0.2	1402.3	1383.5	1500	-0.1	-0.2	-737.32	-730.83	-749.99
-0.1	-0.4	1514.1	1502.7	1500	-0.1	-0.4	-756.21	-752.40	-749.99
-0.1	-0.6	1495.4	1500.1	1500	-0.1	-0.6	-744.43	-750.02	-749.99
-0.1	-0.8	1482.7	1500	1500	-0.1	-0.8	-734.93	-749.99	-749.99

表 4 三种方法偏压柱结点实际位移比较

Table 4 Comparison of actual displacements in the eccentrically compressed column

Z(m) X(m) Y(m)		-0.1			Z(m) X(m) Y(m)		0.1		
		桁架单元	有限元	材力方法			桁架单元	有限元	材力方法
-0.1	-0.2	0.097819	0.10015	0.1	-0.1	-0.2	0.092337	0.0966	0.094
-0.1	-0.4	0.045771	0.0469	0.044	-0.1	-0.4	0.040499	0.04359	0.042
-0.1	-0.6	0.01425	0.014577	0.01431	-0.1	-0.6	0.0097457	0.011726	0.01
-0.1	-0.8	0	0	0	-0.1	-0.8	0	0	0

(3) 小结：由上比较图表可知，分别用等效铰结平面桁架单元和等效铰结空间桁架单元构成的结构来等效分析悬臂梁和偏压柱是可行的，计算所得应力、位移值与传统有限元法和经典材料力学方法基本吻合，满足工程精度要求。

3 结论

根据上述分析与计算，可以得到以下结论：

(1) 用等效铰结桁架模型来计算平面或空间应力问题，单元受力、变形简单清晰，总自由度数减少，降低了计算工作量，且精度可以满足工程需要。

(2) 在结点荷载作用下等效铰结桁架结构模型内只有轴力单元，易于计算、观察和判断，不仅可以用来进行结构线性分析，而且用之来进行非线性分析将更为简便。

将 Benthien 和 Gurtin 在 Laplace 空间上提出的泛函恢复到原真实空间给出了一个只含单重卷积积分的泛函。对此泛函经空间离散后,在时间域上采用具有非时间步参数 $\alpha\tau^4(1-\tau)^2$ 的三次 Hermite 插值函数的形式逼近节点位移,当取非时间步参数 $\alpha=5.0$,并取 $\theta=1.42$ 时,本文方法是一种无条件稳定的逐步积分算法。本方法的数值计算精度比 Wilson- θ 法的计算精度高。针对具体的工程问题,选用适当的空间离散形式后,即可采用本文提出的数值算法对结构的动力响应问题进行分析。

参考文献:

- [1] M E Gurtin. Variational principle for linear elastodynamics [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964,16: 34-50.
- [2] E Luo. Some basic principles for linear coupled dynamic thermo piezoelectricity [J]. Science in China, 1999, 42(2): 1292-1300.
- [3] J S Peng, R W Lewist, J Y Zhang. A semi-analytical approach for solving forced vibration problems based on a convolution-type variational principle [J]. Computer & Structures, 1996, 59(1): 167-177.
- [4] X Yang, C Cheng. Gurtin variational principle and finite element simulation for dynamical problems of fluid-saturated porous media [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2003, 16(1): 24-32.
- [5] 刘铁林, 吕和祥, 赵金城. 基于位移型 Gurtin 变分原理计算动力响应的逐步积分法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(2): 151-156.
Liu Tielin, Lu Hexiang, Zhao Jincheng. A step by step integration method for dynamic response by Gurtin variational principle [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 16(2): 151-156. (in Chinese)
- [6] 刘铁林, 吕和祥, 赵金城. 基于 Gurtin 变分原理的非时间步参数逐步积分法[J]. 工程力学, 2000, 17(3): 43-48.
Liu Tielin, Lu Hexiang, Zhao Jincheng. A non-time-step-parameter direct integration method by Gurtin variational principle [J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(3): 43-48. (in Chinese)
- [7] G Benthien, M E Gurtin. A Principle of Minimum Transformed Energy in Linear Elastodynamics [J]. Trans. ASME J. Applied Mechanics, 1970, 31(4): 1147-1149.
- [8] K J Bathe, E L Wilson. Numerical methods in finite element analysis [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1976. 351.
- [9] 陈万吉. 单变量有限元的新思考: 精化直接刚度法[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(4): 363-368.
Chen Wanji. New ideology of single variable finite element method: the refined direct stiffness method [J]. Computational Structural Mechanics and Its Applications, 1993, 10(4): 363-368. (in Chinese)
- [10] S Timoshenko, D H Young. Vibration Problems in Engineering [M]. Third Edition. Princeton, N J, Van Nostrand Company Inc., 1955, 336.

(上接第 88 页)

参考文献:

- [1] Courant R. Variational method for solutions of problems of equilibrium and vibrations [J]. Bull. Am. Math. Soc., 1943, 49: 1-23.
- [2] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
Wang Xucheng, Shao Min. Fundamental principles and numerical techniques for finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996. (in Chinese)
- [3] 龙驭球. 变分原理·有限元·壳体分析[M]. 沈阳: 辽宁科技出版社, 1987.
Long Yuqiu. Variational principles, finite elements, and shell analysis [M]. Shenyang: Liaoning Science and Technology Press, 1987. (in Chinese)
- [4] 龙驭球. 有限元法概论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
Long Yuqiu. Introduction to finite element method [M]. Beijing: People's Education Press, 1978. (in Chinese)
- [5] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
Xu Zhilun. Theory of elasticity [M]. Beijing: Higher Education Press, 1990. (in Chinese)
- [6] Zienkiewicz O C, Morgan K. Finite Elements and Approximation [M]. John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [7] Bathe K J. Finite elements procedures in engineering analysis [M]. Prentice-Hall, Inc., 1982.
- [8] 刘尔烈, 崔恩第. 有限单元法及程序设计[M]. 天津: 天津大学出版社, 2001.
Liu Erlie, Cui Endi. Finite element method and program design [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2001. (in Chinese)
- [9] (美)Modaveni S. 有限元分析: Ansys 理论与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.
Moaveni S. Finite elements analysis: Ansys theory and application [M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2003. (in Chinese)
- [10] Higdon A, E H Ohlsen, W B Stiles, J A Weese, W F Riley. Mechanics of materials [M]. John Wiley & Sons, Inc., 1978.