

文章编号: 1000-4750(2005)Sup.-0146-06

基于小波奇异性的梁结构损伤诊断

*邱 颖¹, 任青文¹, 朱建华²

(1. 河海大学工程力学系, 江苏 南京 210098; 2. 钦州港务局 广西 钦州 535001)

摘 要: 利用小波奇异性检测原理, 采用墨西哥草帽小波对结构在健康和损伤状态下的模态振型差进行小波变换。根据模态曲率进行损伤检测的原理, 提出了表示损伤位置的指标, 指标值极大处即损伤发生的位置。以一个悬臂梁损伤检测为例, 进行了数值模拟和实验分析。数值模拟结果表明该指标能准确的对损伤位置进行诊断, 并根据指标模极大, 讨论了 Lipschitz 指数与损伤程度的关系。

关键词: 损伤诊断; 小波奇异性; 模态振型; Lipschitz 指数; 小波变换

中图分类号: TU312⁺.3 **文献标识码:** A

A BEAM DAMAGE DIAGNOSIS BASED ON WAVELET SINGULARITY

*QIU Ying¹, REN Qing-wen¹, ZHU Jian-hua²

(1. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Qinzhou Harbor Bureau, Qinzhou 535001, China)

Abstract: The continuous wavelet transform (CWT) by a Mexican hat wavelet having two vanishing moments is applied to the first mode shape difference of a structure under the health and damage state. A damage index is presented based on the wavelet singularity detection theory and mode curvature conception, and the damage location is detected by the maximum of the index. To test the effectiveness of the proposed method, numerical simulation and experiment analysis are performed on a cantilever beam. Numerical simulation results show that the index can exactly detect the location of the damage. The relation between Lipschitz exponent and damage extent is analyzed based on the index maximum.

Key words: damage diagnosis; wavelet singularity; mode curvature; Lipschitz exponent; wavelet transform

随着旧有结构的日益老化及大型土木工程的兴建, 对结构健康状况的评估起着越来越重要的作用。近来被誉为分析信号的数学显微镜的小波变换^[1], 以其在信号处理方面的强大功能, 正被逐步引入到结构健康诊断中^[2-4]。利用模态测试识别模态参数是进行结构健康诊断的有效方法, 而将小波变换应用到结构的模态参数上(例如模态振型), 对结构进行损伤检测, 为结构健康诊断开拓了一个新的研究领域^[5-7]。数学上, 函数在某点的奇异性可以通过 Lipschitz 指数来刻画, Lipschitz 指数的数值反映了

函数在该点的奇异性程度。当结构发生损伤时, 在损伤处其挠度或模态振型的某阶导数存在不连续现象, 利用小波奇异性能够对该处不连续性进行检测, 从而对损伤位置进行诊断。模态曲率可以通过模态振型的二阶导数求得, 模态曲率对结构损伤比较敏感, 对损伤定位更为准确^[8]。借助这一方法, 本文提出了表示损伤位置的指标; 为了对损伤程度进行评估, 根据文献[7]的思想, 通过指标模极大计算 Lipschitz 指数, 进一步讨论 Lipschitz 指数与损伤程度的关系。

收稿日期: 2004-09-26; 修改日期: 2004-11-20

基金项目: 水利部科技创新项目(scx2000-56)资助; 国家自然科学基金(50379005)资助

作者简介: *邱 颖(1977), 女, 安徽蚌埠人, 博士研究生, 从事结构损伤检测方面的研究(E-mail: himilyqy@163.com);

任青文(1943), 男, 浙江宁波人, 教授, 博导, 江苏省力学学会秘书长, 从事结构和地基稳定性研究;

朱建华(1956), 男(回族), 广西河池人, 工程师, 主要从事建筑技术开发研究方面的工作。

1 奇异性检测基本原理

在利用小波变换对函数进行奇异性检测时，小波变换通常写成卷积的形式：

$$Wf(a, \tau) = \frac{1}{a} \int f(\tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau = f(t) * \psi_a(t) \quad (1)$$

其中， a 称为尺度因子， τ 称为平移因子， $\psi_a(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$ ， $\psi(t)$ 为满足容许条件的小波函数， $f(t)$ 表示待检测的函数。

定理 1^[9]：快速衰减的小波 ψ 具有 n 阶消失矩，当且仅当存在快速衰减的函数 θ ，使得

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n \theta(t)}{dt^n} \quad (2)$$

从而

$$Wf(a, \tau) = a^n \frac{d^n}{d\tau^n} (f * \bar{\theta}_a)(\tau) \quad (3)$$

其中， $\bar{\theta}_a(t) = a^{-1/2} \theta(-t/a)$ ，且 ψ 具有不超过 n 阶的消失矩当且仅当 $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$ 。如果， ψ 仅有一阶消失矩，即它是某一低通函数 $\theta(t)$ 的一阶导数，则小波变换模极大就是 f 经 $\bar{\theta}_a$ 平滑后的一阶导数的极大。如果小波有二阶消失矩，即它是函数 $\theta(t)$ 的二阶导数，则小波变换模极大对应于高阶曲率。

定义 1^[9]：在某一尺度 a_0 下，如果存在一点 (a_0, τ_0) ，使得

$$\frac{\partial Wf(a_0, \tau_0)}{\partial \tau} = 0 \quad (4)$$

则称 (a_0, τ_0) 为小波变换的模极大值点，如果对 a_0 的某一领域内的任意点 τ 有

$$|Wf(a_0, \tau)| \leq |Wf(a_0, \tau_0)| \quad (5)$$

则尺度空间 (a, τ) 中所有模极大值点的连线称为模极大值线。由定义可以看出，小波变换模极大值点 (a_0, τ_0) 在点 a_0 的左领域或右领域是严格局部极大的，以避免当 $|Wf(a_0, \tau)|$ 恒为常数的情形。

定理 2^[9]：设 $f \in L^2(R)$ 在点 v 是 Lipschitz $\alpha \leq n$ 的，则存在常数 A 使得

$$\forall (a, \tau) \in R^+ \times R, \quad |Wf(a, \tau)| \leq Aa^{\alpha+1/2} \left(1 + \left|\frac{\tau-v}{a}\right|^\alpha\right) \quad (6)$$

对上式取 $\tau = v$ ，就可以得到

$$|Wf(a, \tau)| \leq Aa^{\alpha+1/2} \quad (7)$$

在对函数进行奇异性分析时，常采用对数形式：

$$\log_2 |Wf(a, \tau)| \leq \log_2 A + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \log_2 a \quad (8)$$

从以上分析知 f 在 v 点的局部 Lipschitz 正则性依赖于在 v 的领域中 $|Wf(a, \tau)|$ 在细尺度下的衰减性， $|Wf(a, \tau)|$ 的衰减性可以由其局部极大值控制。故可以利用小波变换模极大来进行奇异性检测。

2 数值模拟分析

2.1 方法原理

定义 φ_u'' 和 φ_d'' 分别为结构在健康和损伤状态下的模态曲率，则它们在结构上 j 点处差的绝对值为

$$CMS(j) = |\varphi_u''(j) - \varphi_d''(j)| \quad (9)$$

其中 φ 表示模态振型， j 表示测点。在损伤处， CMS 值明显大于其余部位的 CMS 值，检查所有 j 点处的 CMS 值，就可以确定出损伤的位置^[10]。根据这一损伤检测原理，本文利用小波变换奇异性，取 $\theta(t)$ 为高斯函数，并取 $n=2$ ，此时的小波函数即为墨西哥草帽小波

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-4} (1-x^2) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad (10)$$

则(5)式可写为

$$W\varphi(a, x) = a^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\varphi * \bar{\theta}_a)(x) \quad (11)$$

其中 x 表示位置。用连续小波变换进行奇异性检测通常选用高斯函数的导数作为小波，是为了保证极大线能延伸至最细的尺度^[9]。公式(11)相当于用高斯函数对模态振型进行平滑后，再取二阶导数。从小波变换意义上，可以将 CMS 重新表示为：

$$CMS_w = W\varphi_u - W\varphi_d = W(\varphi_u - \varphi_d) \quad (12)$$

设

$$f(x) = \varphi_u(x) - \varphi_d(x) \quad (13)$$

则公式(12)可重写为：

$$CMS_w = Wf(a, x) \quad (14)$$

其中， φ_u 、 φ_d 分别表示结构在健康和损伤状态下模态振型， x 表示结构中的位置。沿着 x 方向检查 CMS_w 值， CMS_w 极大处即结构发生损伤处。

2.2 实例分析

以一个悬臂梁为例，见图 1。梁长 $L=500\text{mm}$ ， $h=b=12\text{mm}$ ，弹性模量 $E=2.0 \times 10^{11} \text{Pa}$ ，密度 $\rho=7800\text{kg/m}^3$ ，泊松比为 0.3。将梁等分为 100 个梁单元，第 41 号单元为开裂单元，其左节点距固定支座距离为 $L_1=200\text{mm}$ ， d 为裂缝深度。有限元计算程序采用大型商业软件 Marc，小波分析程序采

用 Matlab 语言编写，以便使用小波变换工具箱函数。图 2 为悬臂梁在健康状态和裂缝深度为 4mm 时的第一阶模态振型，可以看出损伤与健康状态下梁的第一阶模态振型相差较小，直接对它们进行比较是很难进行损伤诊断的。

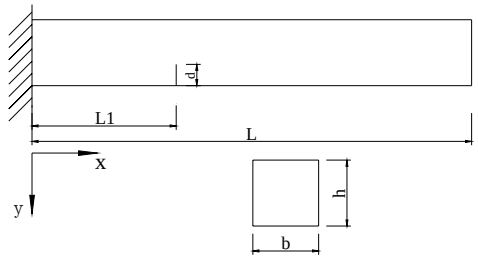


图 1 悬臂梁

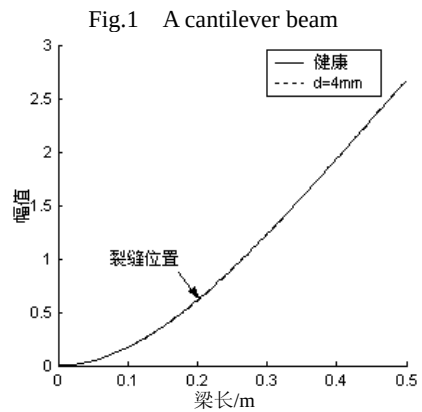
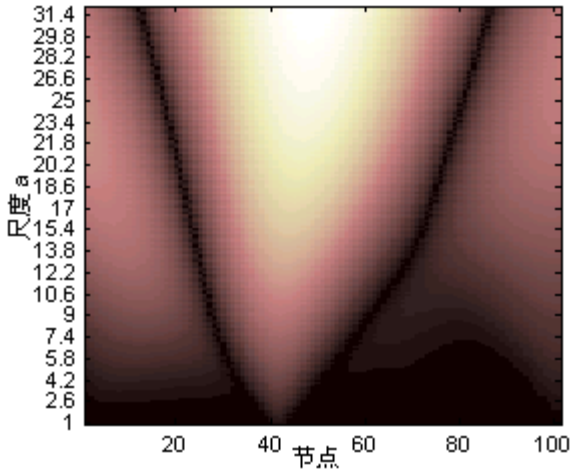
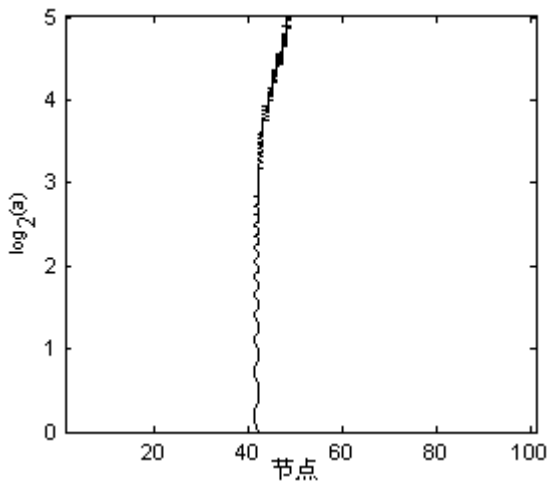


图 2 第一阶弯曲模态振型
Fig.2 The first bending mode shape

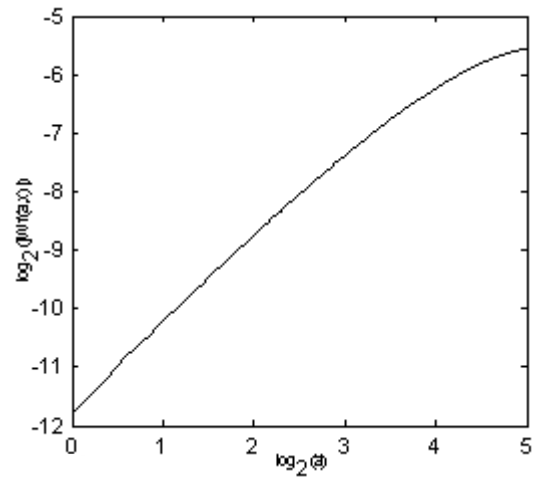
以 $d=4\text{mm}$ 为例，按公式(12)或公式(14)计算，图 3(a)给出了悬臂梁在健康和损伤状态下第一阶模态振型差的连续小波变换系数灰度图，即 CMS_w 值，从图上很容易诊断出损伤位于第 41 号单元，图形两边的现象是由于边界条件造成的；图 3(b)给出了模态振型差的小波变换模极大，即 CMS_w 模极大



(a) CMS_w 灰度图



(b) CMS_w 模极大线



(c) 模极大线沿尺度的衰减

图 3 裂缝深度 $d=4\text{mm}$ 、裂缝位置为第 41 号单元的悬臂梁损伤检测数值模拟

Fig.3 Simulation for a damaged beam with $d=4\text{mm}$, the damage location is $L1=200\text{mm}$

大，虽然随着尺度的增加，模极大线有所偏离，但是从图中低尺度上，是很容易诊断出裂缝位置介于 41 号节点和 42 号节点之间，据此我们可以断定发生损伤的单元为第 41 号单元；图 3(c)给出了 CMS_w 模极大和尺度之间的对数关系图。采用曲线拟合技术，可以获得该裂缝深度下 Lipschitz α 的值：

$$\alpha = 0.67419$$

为了估计 Lipschitz α 与裂缝深度之间的关系，假设 d 分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8mm，根据不同裂缝深度下 CMS_w 模极大和尺度之间的关系，用曲线拟合技术，估计 Lipschitz α (见图 4)，从图中可以看出随着裂缝深度 d 的增加，Lipschitz α 逐渐减小。从数学上分析，函数越光滑，其奇异性指数越大，否则，奇异性指数越小。由材料力学分析

可知,随着裂缝的增加,在裂缝处挠度或模态振型对位置的二阶导数不连续性将更加突出,即模态振型更加奇异,模态振型差也越加奇异,故奇异性指数逐渐减小。所以图 4 中奇异性指数随着裂缝深度的变化趋势是正确的。

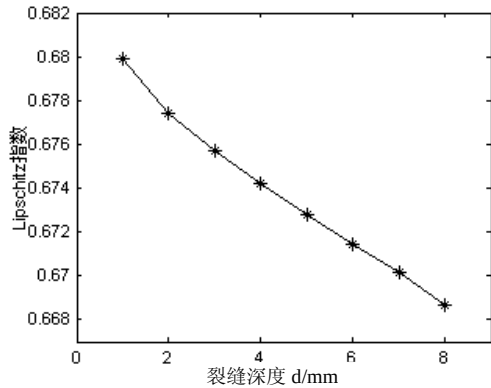


图 4 Lipschitz 指数随深度的变化曲线

Fig.4 The estimates of the Lipschitz exponent for different d

3 噪声对指标 CMS_W 的影响

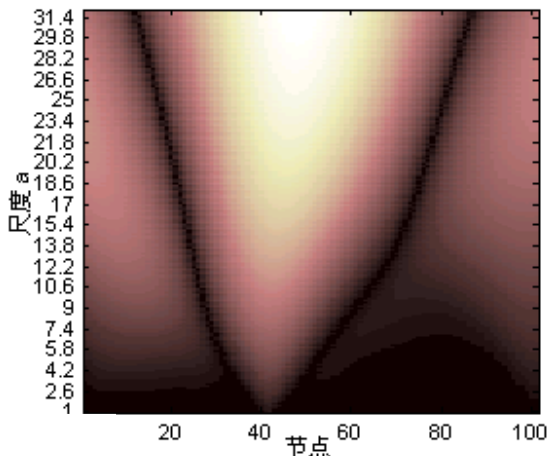
为了讨论噪声对指标 CMS_W 的影响,将模态振型按下式施加噪声:

$$f_i^n = f_i \times (1 + \varepsilon R) \quad (15)$$

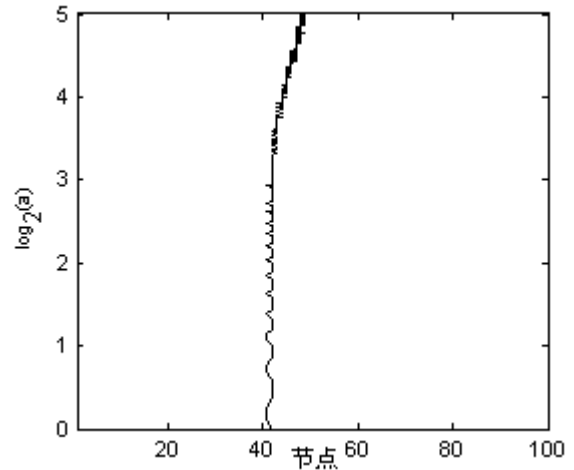
式中, f_i^n 表示受噪声污染的模态振型, f_i 表示由数值模拟获得的模态振型, R 是均值为 0、偏差为 1 的正态分布随机变量, ε 为噪声水平。

仍然以 $d=4\text{mm}$ 为例,取 $\varepsilon=1\%$,对模态振型施加噪声。按公式(12)或公式(14)计算,诊断结果见图 5,从图(a)和(b)上可以诊断出损伤位于第 41 号单元。采用曲线拟合技术,可以获得噪声干扰下 Lipschitz α 的值:

$$\alpha = 0.66513$$



(a) CMS_W 灰度图



(b) CMS_W 模极大线

图 5 噪声干扰下悬臂梁损伤诊断

Fig.5 Damage diagnosis for the cantilever beam with noise 再取 $\varepsilon=2\%$, 算得 $\alpha=0.66200$ 。噪声干扰下 Lipschitz α 的值均低于无噪声状态下 Lipschitz α 值(见图 4), $\alpha=0.67419$ 。这是符合实际的,因为从理论上分析,在噪声污染下模态振型在损伤处会更加奇异,且随着噪声的增强奇异程度将加剧,即奇异性指数 Lipschitz α 会随着噪声的增强而逐渐降低。

4 实验研究

实验模型结构及尺寸见图 1,采用多点激励,单点响应对应梁进行测试。在实际测量中将梁等分为 20 个单元,每个单元长度为 25mm,共 20 个测点,节点从固定端到自由端从 1 到 21 编号,测点由固定端相邻节点到自由端从 1 到 20 编号,将加速度传感器安置在 6 号测点。实验激励方式为力锤脉冲敲击,力锤型号为 CL-YD-303,灵敏度为 3.45pC/N,最大冲击力为 2000N,采用塑料锤头,激励信号采用触发采集,四次线性平均;响应传感器采用压电晶体加速度计;采集与分析系统采用 DH5938 型多通道并行动态数据采集分析仪。

实验中为讨论裂缝对模态参数的影响,在距固定端 137.5mm 处设置一裂缝,裂缝宽度为 1mm,即在图 1 中, $L_1=137.5\text{mm}$,由于裂缝的宽度相对相邻测点距离较小,以及测试误差等因素,在利用指标 CMS_W 对损伤进行定位时出现了困难,同时为了和数值模拟结果相比较,对此悬臂梁结构在测点 5 和 6 之间即节点 6 和 7 之间开一个宽度为 25mm、深度为 4mm 的槽。测得第一阶模态振型见图 6,结

构健康状态下的模态振型由数值模拟获得。

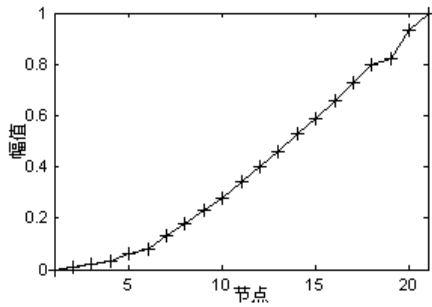
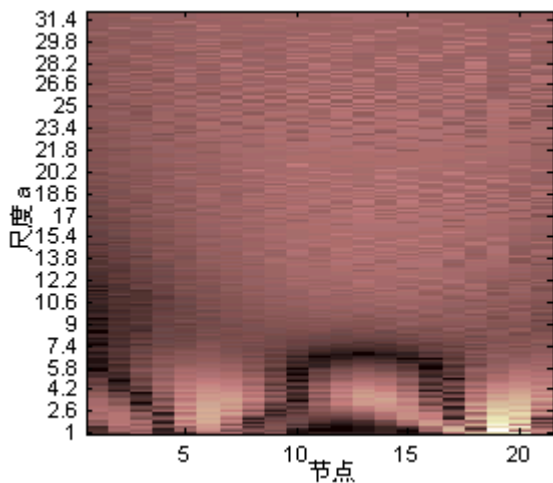


图 6 第一阶模态振型

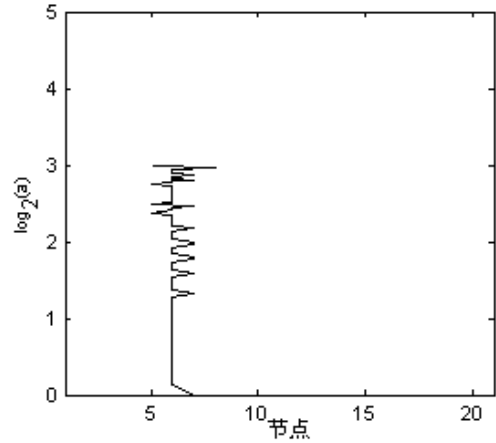
Fig.6 The first mode shape

对梁在健康和由实验获得的损伤状态下第一阶模态振型差进行连续小波变换(见图 7)。从图 7(a)可以看出小波变换模极大有两处,一处为 6 号节点附近,即损伤发生处;另外一处是 19 号节点附近,19 号节点出现小波变换模极大是由于实验误差造成的,这一点从图 6 中可以看到在第 19 号节点处,模态振型出现较大的误差,这一问题也正是本文所提方法的不足之一。在对 19 号节点出现的小波变换模极大进行认识后,只需对 6 号节点附近的小波变换模极大进行讨论。 CMS_W 模极大线见图 7(b),据此,我们可以诊断出损伤位置介于 6 号和 7 号节点之间,即第 6 号单元。从图 7(c)可以看出,由于参加小波变换的数据量较少以及测试误差等因素,此时 CMS_W 模极大和尺度对数之间的关系已不再是线性关系。从图 7(b)看,当 $\log_2(a) < 1$ 时, CMS_W 模极大可以很好的对损伤定位。且由图 7(c),当 $\log_2(a) < 1$ 时, CMS_W 模极大和尺度之间的对数关系仍然近似为线性关系,故选用这一段内的数据进行拟合,估计 Lipschitz α :

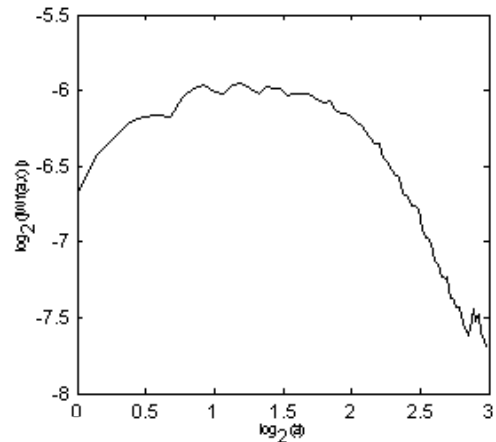
$$\alpha_{\text{exp}} = 0.16774$$



(a) CMS_W 灰度图



(b) CMS_W 模极大线



(c) 模极大线沿尺度的衰减

图 7 裂缝深度 $d=4\text{mm}$ 、裂缝位置为第 6 号单元的悬臂梁损伤检测实验分析

Fig.7 Experimental analysis of the beam with $d=4\text{mm}$, the damage location is $L1=125\text{mm}$
式中, α_{exp} 表示由实验结果计算得到的 Lipschitz α 。

对图 1 梁等分为 20 个单元进行数值模拟计算,因为在数值模拟中,没有噪声的干扰,故不会出现图 7(a)中的误诊现象。根据公式(12)或公式(14)计算获得的 Lipschitz α :

$$\alpha_{\text{num}} = 0.64916$$

式中, α_{num} 表示由数值模拟结果计算得到的 Lipschitz α 。

将由实验及数值模拟计算得到的 Lipschitz α 进行比较,有

$$\alpha_{\text{exp}} < \alpha_{\text{num}}$$

由第 4 节分析知,结果是符合实际的。

5 结语

本文根据小波奇异性检测原理,借助模态曲率

损伤检测方法,提出了识别损伤位置的指标 CMS_w ,并讨论了 Lipschitz α 与损伤程度的关系。从对一个悬臂梁的数值模拟分析来看:(1) CMS_w 的极大值位置能准确反映结构的损伤位置。(2) 为了讨论 CMS_w 模极大和损伤程度的关系,根据文献[7]的思想,借助 Lipschitz α 来反映它们之间的关系。从数学上分析,函数越奇异, Lipschitz α 越小,故本文中由 CMS_w 模极大计算的 Lipschitz α 随裂缝深度的加深越来越小的这一变化趋势是正确的。(3) 从数值模拟结果看,噪声干扰下仍能够对损伤位置进行诊断。(4) 在采用本文方法进行实验或进行实际检测时,需要知道结构在健康状态下的模态振型,故需要建立结构在健康状态下的有限元模型。由实验结果分析知,指标 CMS_w 能够对损伤位置进行准确定位,且实验和数值模拟结果计算得到的 Lipschitz α 的比较结果是复合实际的。但是,模态振型测试的误差对指标 CMS_w 的影响较大,模态振型测试误差较大时,可能会出现误诊现象。这正是本文所提方法的不足之一,还有待于进一步研究。

参考文献:

- [1] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
Yang Fusheng. Analysis and application of wavelet transformation in engineering [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
- [2] Hou Z, Noori M, R St Amand. Wavelet-based approach for structural damage detection[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2000, 126(7): 677~683.
- [3] Sun Z, Chang C C. Structural damage assessment based on wavelet packet transform [J]. Journal of Structure Engineering, ASCE, 2002, 128(10): 1354~1361.
- [4] Haase M, Widjajakusuma J. Damage identification based on ridges and maxima lines of the wavelet transform [J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41: 1423~1443.
- [5] Liew K M, Wang Q. Application of wavelet theory for crack identification in structure [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1998, 124(2): 152~157.
- [6] Wang Q, Deng X. Damage detection with spatial wavelets [J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36: 3443~3468.
- [7] J C Hong, Y Y Kim, H C Lee, Y W Lee. Damage detection using the Lipschitz exponent estimated by the wavelet transform applications to vibration modes of a beam [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39: 1803~1816.
- [8] 李德葆, 陆秋海, 秦权. 承弯结构的曲率模态分析[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2002, 42(2): 224~227.
Li Debao, Lu Qiuhai, Qinquan. Curvature modal analysis for bending structures [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2002, 42(2): 224~227. (in Chinese)
- [9] Mallat S. 杨力华, 戴道清, 黄文良译. 信号处理的小波导引[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
Mallat S. Translated by Yang Lihua, Dai Daoqing, Huang Wenliang. A wavelet tour of signal processing [M]. Beijing: China Machine Press, 2002. (in Chinese)
- [10] 张德文, 魏阜旋. 模型修正与破损诊断[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
Zhang Dewen, Wei Fuxuan. Mode Updating and Damage Detection [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)