

文章编号: 1000-4750(2005)02-0174-05

刚性基底上弹性约束矩形板的屈曲行为分析

*莫时旭^{1,2}, 钟新谷², 赵人达¹

(1. 西南交通大学土木工程学院, 四川 成都 610000; 2. 湖南科技大学土木工程学院, 湖南 湘潭 411201)

摘 要: 对刚性基底上非加载边弹性约束矩形板在固支边均匀面内压力作用下的屈曲行为进行了分析研究。用里兹能量变分法建立确定板屈曲强度的本征值问题, 利用满足边界条件的屈曲位移函数导出板屈曲系数计算公式。将该方法用于矩形钢管混凝土钢板局部屈曲的分析和计算, 提出了目标板边界约束系数计算公式。试验结果表明, 方形钢管混凝土柱钢板局部屈曲强度计算值与试验值吻合良好, 钢板边界弹性约束的处理和约束系数的计算方法是有有效的。

关键词: 板; 局部屈曲; 里兹能量变分法; 弹性约束系数; 矩形钢管混凝土

中图分类号: TB12; TU398 **文献标识号:** A

BUCKLING BEHAVIOR OF ELASTICALLY CONSTRAINED RECTANGULAR PLATE ON RIGID BASE

*MO Shi-xu^{1,2}, ZHONG Xin-gu², ZHAO Ren-da¹

(1. Southwest Jiaotong University, Chengdu 610000, China; 2. Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: The buckling behavior of rectangular plate on rigid base is analyzed, of which the unloaded edges are rotationally constrained elastically and the loaded edges are subject to uniform in-plane axial action. Ritz energy method is used to establish an eigenvalue problem to determine the elastic buckling strength of the plate. Using buckling deformation function that satisfies the restraint boundary condition of the plate, an explicit solution of buckling coefficient is obtained. The local buckling strength of concrete filled steel box and the formula for calculating constraint coefficient of the plate are presented. It is shown that the calculating values are in good agreement with test results. The proposed treatment of the boundary condition is verified.

Key words: plate; local buckling; Ritz energy variation method; elastic constraint coefficient; concrete filled steel box

1 概述

近年来, 钢管混凝土结构的使用日益普遍, 这主要是由于它具有高刚度、高强度、高延性和高能

量吸收能力等性能。在钢管混凝土结构中, 钢板对混凝土提供约束, 同时核心混凝土能阻止钢板内屈, 两者延性共同提高, 材料强度都能得到较充分的利用。矩形钢管混凝土与圆钢管混凝土相比, 受

收稿日期: 2003-04-10; 修改日期: 2003-09-30

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(01JJY2049)

作者简介: *莫时旭(1964), 男, 广西人, 副教授, 博士生, 从事钢-混凝土组合结构研究(E-mail: moshixu@sohu.com.cn);

钟新谷(1962), 男, 湖南人, 教授, 博士, 院长, 从事大跨度结构空间分析, 组合结构研究;

赵人达(1961), 男, 贵州人, 教授, 博士, 博士生导师, 主任, 从事桥梁结构行为, 既有桥梁结构的评估与加固研究

力性能稍差,但具有抗弯性能好、节点构造简单等优点。在国外,如欧美、日本、加拿大和澳大利亚等应用已较为广泛^[1,2,3]。在国内,矩形钢管混凝土已开始多层、高层建筑中得到应用,其研究也已引起一些学者的重视^[4,5]。

随着矩形钢管混凝土钢板宽厚比的增大,钢板的局部屈曲问题在设计和研究中越来越受到重视。文献[6]用能量方法建立了刚性介质上非加载边简支的矩形板屈曲强度计算公式,对于各向同性板屈曲系数计算值为 5.0;文献[7]研究了矩形钢管混凝土柱钢板的局部屈曲问题,提出了非加载边固定板的屈曲强度计算公式,得到钢板局部屈曲系数为 10.67。文献[8,9,10]试验成果表明,非加载边按简支边界计算方钢管混凝土钢板的局部屈曲强度偏于保守,而按固定边界又高估了钢板的局部屈曲强度。

可见,在矩形钢管混凝土钢板局部屈曲强度计算中,将钢板非加载边简化为简支或固支边界,与实际边界条件有较大差异。实际上,矩形钢管混凝土钢板应视为刚性基底上非加载边转动受到弹性约束的矩形板(如图 1),其局部屈曲强度除决定于其本身材料性能和宽厚比外,还与邻接约束钢板材料性能和宽厚比及核心混凝土材料性能有关。本次研究将此类钢板作为刚性基底上非加载边弹性约束的板来研究其屈曲行为。首先,用里兹能量变分法建立确定板屈曲强度的本征值问题,利用满足刚性基底上非加载边弹性约束、加载边固定的矩形板边界条件的屈曲位移函数得到板屈曲系数计算公式;然后,将该方法用于研究矩形钢管混凝土钢板的局部屈曲,通过考虑约束壁板对计算壁板的弹性约束作用和核心混凝土对此约束作用的提高,提出矩形钢管混凝土钢板局部屈曲强度计算公式,计算结果与文献[8,9]试验结果基本吻合。

2 弹性约束矩形板屈曲分析的里兹能量变分法

下面用里兹能量变分法分析非加载边弹性约束的单向均匀受压矩形板的弹性屈曲。假定满足板边界条件的位移函数形式为:

$$w = \sum_i \alpha_i w_i(x, y) \quad (1)$$

则板的弯曲弹性应变能 U_e 、非加载边弹性约束应变能 U_F 、面内均匀轴向荷载 N_x 所做功 V 分别

为:

$$U_e = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + 2(1-\nu)w_{xy}^2] dx dy \quad (2)$$

$$U_F = \frac{\zeta}{2} \int_{\Gamma} \left[\left(w_{,y} \Big|_{y=0} \right)^2 + \left(w_{,y} \Big|_{y=b} \right)^2 \right] d\Gamma \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{2} N_x \iint_{\Omega} w_x^2 dx dy \quad (4)$$

其中 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 为板的单宽抗弯刚度, ζ 为非加载边弹性约束刚度。

将(2)、(3)、(4)分别对位移求变分,则板弯曲弹性应变能、非加载边弹性约束应变能和面内轴向荷载所做功的一阶变分分别为:

$$\delta U_e = D \iint_{\Omega} [w_{xx} \delta w_{xx} + w_{yy} \delta w_{yy} + \nu w_{xx} \delta w_{yy} + \nu w_{yy} \delta w_{xx} + 2(1-\nu)w_{xy} \delta w_{xy}] dx dy \quad (5)$$

$$\delta U_F = k \int_{\Gamma} [(w_{,y} \Big|_{y=0}) \delta(w_{,y} \Big|_{y=0}) + (w_{,y} \Big|_{y=b}) \delta(w_{,y} \Big|_{y=b})] d\Gamma \quad (6)$$

$$\delta V = N_x \iint_{\Omega} w_x \delta w_x dx dy \quad (7)$$

由最小势能原理:

$$\delta \Pi = \delta U_e + \delta U_F - \delta V = 0 \quad (8)$$

可得到关于位移函数系数 α_i 的线性方程组:

$$[k_{ij}] \alpha_j = 0 \quad (9)$$

板产生屈曲的准则是系数 α_i 不全为零,则有:

$$|k_{ij}| = 0 \quad (10)$$

由此可计算出板屈曲临界荷载。

3 刚性基底上非加载边弹性约束矩形板屈曲位移函数选择

图 1 所示的刚性基底上加载边固支、非加载边弹性约束的矩形板,可选择位移函数形式为:

$$w(x, y) = \left\{ \frac{y}{b} + \varphi_1 \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \varphi_2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \varphi_3 \left(\frac{y}{b} \right)^4 \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \quad (11)$$

显然位移函数满足加载边板面外位移和转角为零的边界条件,即:

$$\text{当 } x=0 \text{ 时 } w(0, y) = 0, \quad w_x(0, y) = 0$$

$$\text{当 } x=a \text{ 时 } w(a, y) = 0, \quad w_x(a, y) = 0$$

由非加载边界条件确定位移函数(11)中的未知

系数 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 。由图 1 非加载边面外位移为零和转角与约束板相等, 即:

$$w(x, 0) = 0 \quad (12a)$$

$$w(x, b) = 0 \quad (12b)$$

$$M(x, 0) = -D(w_{yy}|_{y=0}) = -\zeta(w_y|_{y=0}) \quad (12c)$$

$$M(x, b) = -D(w_{yy}|_{y=b}) = -\zeta(w_y|_{y=b}) \quad (12d)$$

其中 ζ 为非加载边转动约束刚度。

将(11)代入(12), 得假定屈曲位移函数的未知系数为:

$$\varphi_1 = \chi \quad (13a)$$

$$\varphi_2 = -2(1 + \chi) \quad (13b)$$

$$\varphi_3 = 1 + \chi \quad (13c)$$

其中定义 χ 为约束系数, 是一无量纲参数, 即:

$$\chi = \zeta b / 2D \quad (14)$$

若 $\chi=0$ (即 $\zeta=0$), 则非加载边($y=0, y=b$)为简支边界; 若 $\chi=\infty$ (即 $\zeta=\infty$), 则非加载边($y=0, y=b$)为固定边界。将(13)代入(11)得位移函数为:

$$w(x, y) = \left\{ \frac{y}{b} + \chi \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 2(1 + \chi) \left(\frac{y}{b} \right)^3 + (1 + \chi) \left(\frac{y}{b} \right)^4 \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \quad (15)$$

将(15)代入(5)、(6)、(7), 则板各项应变能一阶变分为:

$$\begin{aligned} \delta U_e = D & \left[\frac{\eta_1 ab}{2} \sum \left(\frac{2m\pi}{a} \right)^4 \alpha_m \delta \alpha_m + \frac{3\eta_2 a}{2b^3} \sum \alpha_m \delta \alpha_m - \frac{\eta_3 a v}{b} \sum \left(\frac{2m\pi}{a} \right)^2 \alpha_m \delta \alpha_m \right. \\ & \left. + \frac{\eta_4 (1 - \nu) a}{b} \sum \left(\frac{2m\pi}{a} \right)^2 \alpha_m \delta \alpha_m \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\delta U_f = \frac{6Da\chi}{b^3} \sum \alpha_m \delta \alpha_m \quad (17)$$

$$\delta V = \eta_1 N_x \frac{ab}{2} \sum \left(\frac{2m\pi}{a} \right)^2 \alpha_m \delta \alpha_m \quad (18)$$

式中

$$\eta_1 = 0.0492 + 0.01746\chi + 0.0015876\chi^2 \quad (19a)$$

$$\eta_2 = 4.8 + 1.6\chi + 0.8\chi^2 \quad (19b)$$

$$\eta_3 = -(0.4857 + 0.1714\chi + 0.01903\chi^2) \quad (19c)$$

$$\eta_4 = 0.4857 + 0.1714\chi + 0.01903\chi^2 \quad (19d)$$

将(16)、(17)和(18)代入(8), 整理得板屈曲系数为:

$$k = \frac{4m^2}{\gamma^2} + \frac{3\eta_2 \gamma^2}{\eta_1 \pi^4 m^2} + \frac{2\eta_4}{\eta_1 \pi^2} + \frac{3\chi \gamma^2}{\eta_1 \pi^4 m^2} \quad (20)$$

其中 $\gamma = a/b$ 。

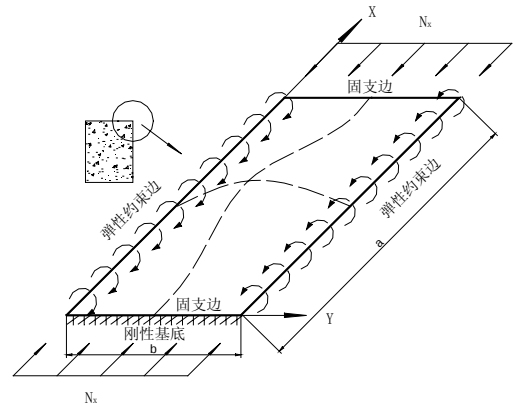


图 1 刚性基底上弹性约束矩形板屈曲模式

Fig.1 Buckling model of elastically constrained rectangle plate on rigid base

由 $\partial k / \partial \gamma = 0$ 整理得使 k 取最小值的 γ 为:

$$\gamma_{cr} = \left(\frac{8m^4 \pi^4 \eta_1}{3\eta_2 + 12\chi} \right)^{0.25} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)整理得板的临界屈曲荷载系数为

$$k_{cr} = \left(\frac{3\eta_2 + 12\chi}{2\pi^2 \eta_1} + \frac{3\eta_2}{\pi^2 \eta_1} + \frac{2\eta_4}{\pi^2 \eta_1} + \frac{3\chi}{\pi^2 \eta_1} \right) \sqrt{\frac{8\eta_1}{3\eta_2 + 12\chi}} \quad (22)$$

因此, 非加载边弹性约束矩形板的临界屈曲荷载为:

$$N_{cr} = k_{cr} \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (23)$$

临界屈曲应力为:

$$\sigma_{cr} = k_{cr} \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (24)$$

若非加载边为简支边界, 则 $\chi=0$ ($\zeta=0$), 由式(22)得 $k_{cr}=5.68$; 若非加载边为固定边界, 则 $\chi=\infty$ ($\zeta=\infty$), 由式(22)得 $k_{cr}=10.78$ 。而相应非加载边简支和固支的无侧向约束板临界屈曲荷载系数分别为 4.0 和 6.97^[1]。可见, 刚性基底的侧向约束使板的屈曲强度明显提高, 以上两种特殊情况屈曲系数分别提高 42%和 55%。

图 2 反映非加载边约束系数对矩形板屈曲系数的影响。可见随约束系数 χ 增大, 板屈曲系数 k_{cr} 增大, 尤其是约束系数 χ 在 1.0~100.0 之间时, 其变

化对屈曲系数 k_{cr} 变化的影响最显著。约束系数 χ 小于 0.1 或大于 100.0 时, 其变化对屈曲系数 k_{cr} 的影响不大, 即 χ 小于 0.1 时, 非加载边近于简支边界, χ 大于 100.0 时, 非加载边近于固支边界。

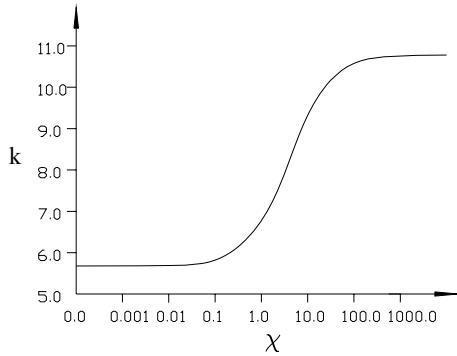


图 2 约束系数 χ 与矩形板屈曲系数 k 的关系

Fig.2 Effect of constraint coefficient on rectangle plate buckling coefficient

4 矩形钢管混凝土局部屈曲分析

矩形钢管混凝土壁板向内的屈曲位移受到限制, 只能产生向外的屈曲。由于壁板长度远大于宽度, 屈曲时板横向只有一个半波, 纵向将产生一系列凸起的半波。由板变形的连续性, 半波之间的节线一阶导数为零, 取壁板节线间的一个半波为研究单元, 则板的加载边为固支边界。各钢管壁间的转动受到相互约束, 壁板间连接线的边界条件为介于简支和固支之间的弹性约束。

钢管壁局部屈曲时单个半波屈曲模式如图 1 所示。钢板的临界屈曲荷载 N_{cr} 和屈曲强度 σ_{cr} 分别由式(23)和(24)计算, 其中屈曲系数 k_{cr} 表达式为(22), 是弹性约束系数 χ 的函数。文献[1]已推导钢箱截面钢板间转动约束系数计算公式。前述可知, 钢箱内充填混凝土后, 钢板的屈曲强度明显提高, 对于非加载边简支和固支两种极端情况屈曲强度提高 50% 左右。利用文献[1]成果, 将约束钢板的宽度折减一半, 以考虑内填混凝土对约束转动刚度的提高, 得到钢板非加载边弹性约束系数的计算公式:

$$\chi = \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^3 \frac{r}{\rho(b_w/2b_f)} \quad (25)$$

$$r = 1 - \left(\frac{t_f b_w}{2t_w b_f} \right)^2 \quad (26)$$

$$\rho(b_w/2b_f) = \frac{1}{\pi} \tanh \left(\frac{\pi b_w}{4b_f} \right) \left[1 + \frac{\pi b_w/2b_f}{\sinh(\pi b_w/2b_f)} \right] \quad (27)$$

以上公式在 $\frac{t_f b_w}{2t_w b_f} \leq 1$ 时适用。式中 b_f 、 t_f 分别为计算壁板宽度和厚度, b_w 、 t_w 分别为相邻约束壁板宽度和厚度。

表 1 方钢管混凝土钢板局部屈曲强度计算值
与试验结果比较

Table 1 Comparison of calculation with test results of local buckling strength for concrete filled steel box

试件	b (mm)	t (mm)	b/t	σ_y (MPa)	σ_{cr}^t (MPa)	σ_{cr}^c (MPa)	$\sigma_{cr}^t/\sigma_{cr}^c$	资料来源
LB1	120	3	40	300	300	300	1.0	文献[8]
LB3	150	3	50	300	300	300	1.0	
LB5	180	3	60	300	300	300	1.0	
LB7	240	3	80	300	200	205	0.98	
LB9	300	3	100	300	120	130	0.92	
FB1	360	3	120	265	93	92	1.01	文献[9]
FB2	420	3	140	265	80	68	1.18	
FB3	480	3	160	265	44	51	0.86	
FB4	540	3	180	265	39	41	0.95	

表 1 列出了文献[8,9]方钢管混凝土柱钢板局部屈曲强度试验实测值 σ_{cr}^t 与本文计算值 σ_{cr}^c 。从试验结果可见, 钢板宽厚比 $b/t \leq 60$ 时, 屈曲前钢板应力达到屈服强度; $b/t \geq 80$ 时钢板屈曲应力低于其屈服强度。 $b/t \geq 80$ 的 6 个试件屈曲应力的试验实测值与本文计算值之比在 0.86-1.18 之间, 平均 0.98, 两者基本相符合。比非加载边简化为简支或固定边界条件的计算结果更接近试验结果。说明用本文的方法计算矩形钢管混凝土钢板弹性屈曲强度是合理的。

图 3 反映矩形钢管混凝土壁板局部屈曲强度系数与相邻约束壁板尺寸的关系。若壁板厚度相同, 约束壁板宽度为计算壁板宽度之比 b_w/b_f 为 2 时, 约束壁板对计算壁板的约束可视为简支, 计算壁板局部屈曲系数为 5.68。随 b_w/b_f 之值减小, 计算壁板局部屈曲系数增大, 最大值为 10.78(非受载边固支); 若约束壁板厚度为计算壁板厚度的 2 倍, 当 b_w/b_f 为 2.0 时, 计算壁板局部屈曲系数为 9.75, 屈曲系数随 b_w/b_f 变化曲线比较平缓; 若约束壁板厚度为计算壁板厚度的 0.5 倍, 当 b_w/b_f 为 1.0 时, 计算壁板局部屈曲系数为 5.68, 约束壁板对计算壁板的约束可视为简支, 屈曲系数随 b_w/b_f 变化曲线

最陡。图3中三条曲线比较,可见壁板宽度一定时约束壁板相对厚度增大,计算壁板屈曲系数明显增大,反之,则明显减小。

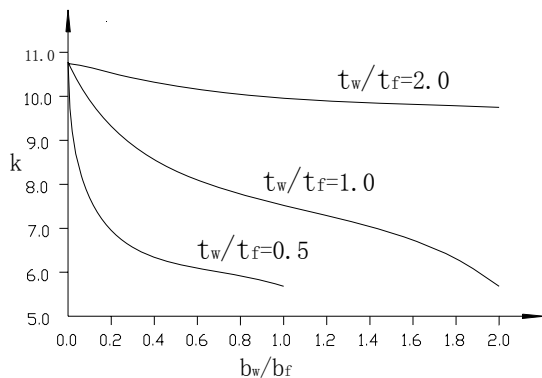


图3 矩形钢管混凝土壁板局部弹性屈曲系数与约束壁板尺寸的关系

Fig.3 Effect of constraint on local buckling coefficient of plates of concrete filled steel box

5 结语

本文用里兹能量变分法导出了刚性基底上非加载边弹性约束矩形板单向均匀受压时屈曲强度计算公式。对矩形钢管混凝土钢管壁局部屈曲行为进行了分析研究,给出了考虑相邻钢板和核心混凝土弹性约束作用的计算方法。已有试验结果表明,在矩形钢管混凝土局部屈曲计算中,计算壁板非加载边按弹性约束边界处理更为合理,本文采用的约束系数计算方法是有效的。

参考文献:

- [1] Bleich F. Buckling strength of metal structures [M]. McGraw-Hill, New York, 1952.
- [2] T Kitada. Ultimate strength and ductility of state-of-the

- art concrete-filled steel bridge piers in Japan [J]. Engineering Structures, 1998, 20. (Nos4-6): 347-356.
- [3] Brian Uy. Strength of concrete-filled steel box columns incorporating local buckling [J]. Journal of Structural Engineering, 2000, (3): 341-352.
- [4] 张正国. 方钢管混凝土偏压短柱基本性能研究[J]. 建筑结构学报, 1989, (9): 10-20.
Zhang Zhengguo. Behaviour of concrete-filled square steel tubular stub under eccentric load [J]. Journal of Building Structures, 1989, (9): 10-20. (in Chinese)
- [5] 韩林海, 陶忠. 方钢管混凝土轴压力学性能的理论分析与试验研究[J]. 土木工程学报, 2001, (2): 17-25.
Han Linhai, Tao Zhong. Study of behavior of concrete-filled square steel tubes under axial load [J]. Journal of Civil Engineering, 2001, (2): 17-25. (in Chinese)
- [6] H D Wright. Buckling of plates in contact with a rigid medium [J]. The Structural Engineer, 1993, 71(12): 209-215.
- [7] 何保康, 杨晓冰, 周天华. 矩形钢管混凝土轴压柱局部屈曲性能的解析分析[J]. 西安建筑科技大学学报, 2002, (3): 210-213.
He Baokang, Yang Xiaobing, Zhou Tianhua. Theoretical analysis of local buckling behavior of concrete-filled rectangular steel tube column subjected to axis force [J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2002, (3): 210-213. (in Chinese)
- [8] B Uy. Local and post-local buckling of concrete-filled steel-welded box columns [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1998, 47: 47-72.
- [9] Brian Uy. Local and postlocal buckling of fabricated steel and composite cross sections [J]. Journal of Structural Engineering, 2001, (6): 666-677.
- [10] Z Vrcelj, B Uy. Strength of slender concrete-filled steel box columns incorporating local buckling [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2002, (58): 275-300.