

文章编号: 1000-4750(2006)10-0030-05

正交各向异性复合材料孔板性能参数识别测点的最优布置

黄立新^{1,2}, 向志海¹, 孙秀山¹, *刘应华¹, 岑章志¹

(1. 清华大学工程力学系, 北京 100084; 2. 广西大学土木工程学院, 南宁 530004)

摘 要: 基于静态位移的测量和边界元分析, 性能参数识别的问题转化为极小化目标函数的问题, 其中目标函数定义为测量位移与边界元计算的位移之差的平方和。求解此优化问题采用 Levenberg-Marquardt 算法。通过该算法适应性的分析, 提出了考虑诸多因素综合影响的优化测点布置的方法。该方法的有效性得到了数值算例的验证, 算例结果表明测点布置对正交各向异性复合材料孔板性能参数识别的结果有较大的影响。提出的方法可以找出测点的最优布置, 得到令人满意的识别结果。

关键词: 正交各向异性复合材料; 孔板; 参数识别; 边界元分析; 测点布置

中图分类号: O34 **文献标识码:** A

OPTIMAL MEASUREMENT PLACEMENT FOR THE MATERIAL PARAMETER IDENTIFICATION OF ORTHOTROPIC COMPOSITE PLATE WITH A HOLE

HUANG Li-xin^{1,2}, XIANG Zhi-hai¹, SUN Xiu-shan¹, *LIU Ying-hua¹, CEN Zhang-zhi¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. School of Civil Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Based on the static displacement measurement and the boundary element analysis, the material parameter identification problem is formulated as the problem of minimizing the objective function defined as the square sum of differences between the measured displacement and the calculated displacement by the boundary element method. The minimization problem is solved by using Levenberg-Marquardt algorithm. From the analysis of the well-posedness of this algorithm, a method is proposed for the optimal measurement placement, which is determined by the synthetic influence of many factors. Numerical example is given to illustrate the validity of the proposed method. The numerical example also shows that the measurement placement has a significant influence on the results in the material parameter identification for the orthotropic composite plate with a hole. The satisfactory identified results can be obtained by using the optimal measurement placement determined by the proposed method.

Key words: orthotropic composites; plate with a hole; parameter identification; boundary element analysis; measurement placement

收稿日期: 2005-01-24; 修改日期: 2005-03-07

基金项目: 全国优秀博士论文专项基金(200025)和国家“十五”重点科技攻关专题(2001BA803B03-05)

作者简介: 黄立新(1964), 男, 广西人, 博士, 从事计算固体力学;

向志海(1975), 男, 四川人, 博士, 从事计算固体力学;

孙秀山(1975), 男, 黑龙江人, 博士, 从事计算固体力学;

*刘应华(1968), 男, 湖北人, 教授, 博士, 从事计算固体力学(E-mail: yhliu@tsinghua.edu.cn);

岑章志(1946), 男, 浙江人, 教授, 博士, 从事计算固体力学。

正交各向异性复合材料孔板在航空航天、机械、土木、化工等许多领域都有广泛的应用。由于几何形状发生突变的地方会引起应力集中现象,这往往是材料结构破坏的根源,所以孔区附近应力和变形的分析一直是一个重要的研究课题。这些研究都是在性能参数已经准确确定的基础上进行的。然而,这种材料的性能参数受到许多随机因素的影响,例如,几何细部结构、加工工艺和生产过程中的质量控制等,因此性能参数的离散度比较大。多年来,采用数值-实验的反分析方法进行材料性能参数的识别引起人们的极大关注。在参数识别过程中,测点布置对材料性能参数识别的结果有较大的影响,然而关于复合材料性能参数识别的测点布置的有关文献很少。Kavanagh 采用静态响应的测量和有限元法识别复合材料性能参数^[1],在他的文章中提到了以性能参数矩阵的条件数最小的准则进行优化测点布置。Frederiksen 识别复合材料性能参数时,以参数的置信度区间最小为准则,进行实验的优化布置^[2]。基于动态响应的测量和有限元法,Cunha 和 Piranda 讨论了复合材料性能参数识别的测点布置问题^[3,4],他们以模态矩阵的条件数最小的准则进行优化测点布置。Avril 等提出虚拟位移场方法识别正交各向异性复合材料性能参数^[5],为了提高识别参数的精度,他讨论了优化测试设计的问题。实际上,测点布置受到诸多因素的影响,例如,灵敏度、测量值的大小、测量的位置和点数等。

复合材料性能参数识别的问题转化为极小化目标函数的问题,这是一个非线性最小二乘问题,Gauss-Newton 法是最基本的方法。在 Gauss-Newton 法中,要求 Jacobian 矩阵是满秩的。然而,Jacobian 矩阵非满秩的情况经常出现。采用 Levenberg-Marquardt 法可以很好地克服 Gauss-Newton 法的这个缺点^[6]。本文在静态位移的测量和边界元法的计算的基础上,通过分析 Levenberg-Marquardt 优化算法的适定性,推导出考虑诸多因素综合影响的优化测点布置的判据,并将此判据应用于正交各向异性复合材料孔板性能参数的识别。数值算例表明测点的布置对参数识别的结果有较大的影响。通过本文的方法搜索出测点的最优布置,能很好地识别出正交各向异性复合材料孔板的性能参数。

1 基于边界元法的参数识别表达格式

平面应力状态下应力-应变关系可以表示为:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中 s_{11} , s_{22} , s_{12} , s_{21} 和 s_{66} 是柔度系数,且有 $s_{12} = s_{21}$

由 Betti 互等定理可以导出正交各向异性平面应力问题的边界法的代数矩阵方程,即

$$H(p)u = G(p)t \quad (2)$$

其中 p 是参数向量,即 $p = [s_{11} \ s_{22} \ s_{12} \ s_{66}]^T$; u 和 t 分别是边界上的位移和面力; $H(p)$ 和 $G(p)$ 是影响矩阵。

参数识别问题可以转化为使目标函数最小化的问题。如果选择结构的位移为目标变量,则目标函数可表示为

$$f(p) = [R(p)]^T R(p) \quad (3)$$

其中 $R(p)$ 是残差向量,可定义为

$$R(p) = u_s^* - Su \quad (4)$$

其中 u_s^* 是测量位移; S 是对应于测量位置的选择矩阵; u 是用边界元法计算的位移。

本文采用 Levenberg-Marquardt 法解目标函数的极小化问题,Levenberg-Marquardt 算法的详细描述参见文献[7]。因此,参数识别过程可以表示为

$$p^k = g(p^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

其中 k 是迭代步,且有

$$g(p) = p - (J^T J + \mu I)^{-1} J^T R \quad (6)$$

其中 μ 是 Levenberg-Marquardt 参数; J 是灵敏度矩阵,可表示为

$$J = \frac{\partial R}{\partial p} = -S \frac{\partial u}{\partial p} \quad (7)$$

在方程(7)的右端, $\partial u / \partial p$ 的计算的详细过程参见文献[8]。

2 测点的最优布置

2.1 存在性

根据先验信息可以给出参数的取值范围,即参数的集合 D_p 。显然, D_p 是有界的闭集。 D_p 也是凸集(见附录 1)。如果 $g(p)$ 是连续的,根据 Brouwer 不动点原理^[9],可以保证算法至少存在一个解。

2.2 唯一性

设 p_1 和 p_2 是集合 D_p 内任意两个点,则

$$g(p_1) - g(p_2) = \frac{\partial g(\zeta)}{\partial p} (p_1 - p_2) \quad (8)$$

其中 $\zeta = p_1 - \eta(p_1 - p_2)$; 且 $0 < \eta < 1$ 。定义

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \quad (9)$$

则

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{p}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{p}_2)\|_{\infty} \leq \|\bar{\mathbf{Q}}(\zeta)\|_{\infty} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{\infty} \leq L_{\mathbf{Q}} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{\infty} \quad (10)$$

其中 $\|\cdot\|_{\infty}$ 表示无穷范数；

$$L_{\mathbf{Q}} \equiv \max \|\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p})\|_{\infty} \quad (11)$$

如果 $L_{\mathbf{Q}} < 1$ ，则根据压缩映射原理^[9]，算法收敛于唯一解。

2.3 稳定性

参数初始值可以表示为

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^* + \mathbf{I}_p \delta \mathbf{p} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{p}^*$ 是真值； $\mathbf{I}_p$ 表示对角元素为+1 或-1 的对角矩阵； $\delta \mathbf{p}$ 是偏差的绝对值。

含误差的测量位移假设为

$$\mathbf{u}_s^* = \mathbf{S}(\mathbf{I} + \mathbf{I}_{\varepsilon}) \mathbf{u}^* \quad (13)$$

其中 $\mathbf{u}^*$ 是对应于 $\mathbf{p}^*$ 的位移； $\mathbf{I}_{\varepsilon}$ 表示对角元素为+1 或-1 的对角矩阵； ε 是测量位移相对误差的绝对值。定义

$$\mathbf{h}^k = \mathbf{p}^k - \mathbf{p}^* \quad (14)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^k - \mathbf{h}^{k-1} &= \mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1} \equiv \bar{\Psi}(\mathbf{p}^{k-1}, \varepsilon) = \\ &\bar{\Psi}(\mathbf{p}^*, 0) + \frac{\partial \bar{\Psi}(\mathbf{p}^{\xi_{k-1}}, \varepsilon^{\xi_{k-1}})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{h}^{k-1} + \frac{\partial \bar{\Psi}(\mathbf{p}^{\xi_{k-1}}, \varepsilon^{\xi_{k-1}})}{\partial \varepsilon} \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{p}^{\xi_{k-1}} = \mathbf{p}^* + \gamma(\mathbf{p}^{k-1} - \mathbf{p}^*)$ ， $0 < \gamma < 1$ ， $\varepsilon^{\xi_{k-1}} \in (0, \varepsilon)$ 。

由方程(4)~方程(6)、方程(13)和方程(15)，得

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\mathbf{p}, \varepsilon) &\equiv -(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{R} = \\ &-(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{S} \times [(\mathbf{I} + \mathbf{I}_{\varepsilon}) \mathbf{u}^* - \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (16)$$

由方程(13)可知， $\mathbf{u}_s^*$ 是 ε 的函数，再由方程(4)知道 $\mathbf{R}$ 不仅是 $\mathbf{p}$ 的函数，而且是 ε 的函数。因此，由方程(6)可以看出， $\mathbf{g}$ 是 $\mathbf{p}$ 的函数，也是 ε 的函数；由方程(9)还可以看出， $\bar{\mathbf{Q}}$ 是 $\mathbf{p}$ 和 ε 的函数。结合方程(6)和方程(16)，得

$$\bar{\Psi}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \mathbf{g}(\mathbf{p}, \varepsilon) - \mathbf{p} \quad (17)$$

定义

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{p}, \varepsilon) \equiv \frac{\partial \bar{\Psi}(\mathbf{p}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{S} \mathbf{I}_{\varepsilon} \mathbf{u}^* \quad (18)$$

方程(17)和方程(18)代入方程(15)得

$$\mathbf{h}^k = \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}^{\xi_{k-1}}, \varepsilon^{\xi_{k-1}}) \mathbf{h}^{k-1} + \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{p}^{\xi_{k-1}}, \varepsilon^{\xi_{k-1}}) \varepsilon \quad (19)$$

定义

$$L_{\mathbf{A}} \equiv \max \|\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\|_{\infty} \quad (20)$$

根据方程(19)，得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}^k\|_{\infty} &\leq L_{\mathbf{Q}} \|\mathbf{h}^{k-1}\|_{\infty} + L_{\mathbf{A}} \varepsilon \leq \dots \leq \\ &L_{\mathbf{Q}}^k \|\delta \mathbf{p}\|_{\infty} + (1 + L_{\mathbf{Q}} + \dots + L_{\mathbf{Q}}^{k-1}) L_{\mathbf{A}} \varepsilon \end{aligned} \quad (21)$$

如果 $L_{\mathbf{Q}} < 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^k\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - L_{\mathbf{Q}}} L_{\mathbf{A}} \varepsilon \approx (1 + L_{\mathbf{Q}}) L_{\mathbf{A}} \varepsilon \quad (22)$$

2.4 $L_{\mathbf{Q}}$ 和 $L_{\mathbf{A}}$ 的估算

由一阶泰勒展开得到 $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \varepsilon)$ 的近似估算公式

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \varepsilon) \approx \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}^*, 0) + \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}^*, 0)}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) + \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}^*, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon \quad (23)$$

定义

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{P}^*) \equiv \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}^*, 0) = [(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^* + \mu \mathbf{I}]^{-1} \mu \mathbf{I} \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^*) \equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}^*, 0)}{\partial \mathbf{P}} = [(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^* + \mu \mathbf{I}]^{-1} \times$$

$$\left\{ (\mathbf{J}^*)^T \frac{\partial \mathbf{J}^*}{\partial \mathbf{P}} - 2 \frac{\partial [(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^*]}{\partial \mathbf{P}} \times [(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^* + \mu \mathbf{I}]^{-1} \mu \mathbf{I} \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{P}^*) &\equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}^*, 0)}{\partial \varepsilon} = -[(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^* + \mu \mathbf{I}]^{-1} \times \\ &\left\{ \frac{\partial (\mathbf{J}^*)^T}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial [(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^*]}{\partial \mathbf{P}} \times [(\mathbf{J}^*)^T \mathbf{J}^* + \mu \mathbf{I}]^{-1} (\mathbf{J}^*)^T \right\} \mathbf{S} \mathbf{I}_{\varepsilon} \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (26)$$

方程(24)~方程(26)中的 $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{p}}$ 采用向前差分计算。

至此，可以估算 $L_{\mathbf{Q}}$ ，即

$$L_{\mathbf{Q}} \approx \|\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{p}^*)\|_{\infty} + \|\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{p}^*)\|_{\infty} \|\delta \mathbf{p}\|_{\infty} + \|\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{p}^*)\|_{\infty} \varepsilon \quad (27)$$

类似地，可以得到 $L_{\mathbf{A}}$ 的近似估算公式

$$L_{\mathbf{A}} \approx \|\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{p}^*, 0)\|_{\infty} + \|\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{p}^*)\|_{\infty} \|\delta \mathbf{p}\|_{\infty} \quad (28)$$

根据以上分析可知，使 $L_{\mathbf{Q}} < 1$ 的测点布置是可行的。在可行的测点布置集合中，使 $L_{\mathbf{A}}(1 + L_{\mathbf{Q}})\varepsilon$ 最小的测点布置就是所求的测点最优布置。

实际上，材料参数的真值 $\mathbf{p}^*$ 是不知道的，但可以用以下式子进行估计：

$$\mathbf{p}_g^* = \mathbf{p}^0 - \mathbf{I}_p \delta \mathbf{p} \quad (29)$$

3 算例

如图 1 所示，坐标轴与材料的弹性主轴重合，在中心含圆孔的正交各向异性复合材料板上边受横向均布载荷。玻璃环氧材料，其材料参数为^[10]：

$$s_{11} = 0.18594 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$s_{22} = 0.55772 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$s_{12} = -0.04649 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$s_{66} = 1.11607 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.$$

由于对称,取二分之一结构进行计算,采用 44 个结点,22 个二次单元划分网格,如图 2 所示。有的结点均作为备选的点。

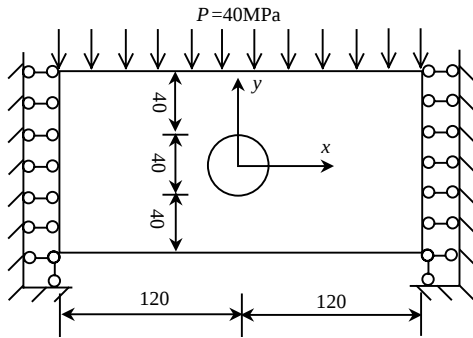


图 1 含圆孔正交各向异性复合材料板(尺寸单位:毫米)

Fig.1 Orthotropic composite plate with a circular hole
(dimension unit is millimeter)

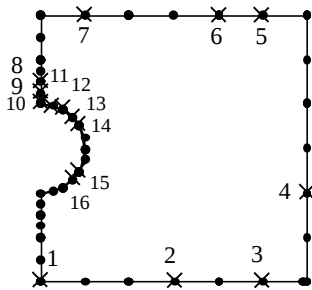


图 2 边界元网格划分示意图(x表示测点)

Fig. 2 Boundary element mesh (measurement locations are denoted by the symbol x)

本文采用以下数据和条件:

(1) Levenberg-Marquardt 参数初值 $\mu^{(0)} = 0.1$;

(2) 参数识别的搜索范围

$$0.04 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \leq s_{11} \leq 0.90 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

$$0.10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \leq s_{22} \leq 2.50 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

$$-0.25 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \leq s_{12} \leq -0.01 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

$$0.20 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \leq s_{66} \leq 5.50 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

参数的初值 p^0 及偏差 δp 列于表 1。

表 1 含圆孔正交各向异性复合材料板的参数初值、偏差和测量位移误差

Table 1 p^0 , δp and ε for the orthotropic composite plate with a circular hole

参数	参数初值 $p^0 / (10^{-10} \text{ Pa}^{-1})$	参数偏差 $\delta p / (10^{-10} \text{ Pa}^{-1})$	$\varepsilon / \%$
s_{11}	0.30000	0.06000	1.0
s_{22}	0.80000	0.15000	
s_{12}	-0.07000	0.01500	
s_{66}	1.70000	0.30000	

用本文的方法得到的‘最优’测点布置是 3 和 6 结点的水平位移及 4 和 8 结点的垂直位移,即 3/x、

6/x、4/y、8/y (参见图 2)。对于四结点的测点布置,含误差的测量位移组合共有 16 种,其中识别结果相对误差最大的组合列于表 2。

表 2 相对误差最大的识别结果

Table 2 Identified results with largest relative error

含误差的测量位移	参数	识别结果/(10 ⁻¹⁰ Pa ⁻¹)	相对误差/%	
3/x	-ε	s ₁₁	0.20913	12.5
6/x	+ε	s ₂₂	0.56872	2.0
4/y	+ε	s ₁₂	-0.08454	81.8
10/y	-ε	s ₆₆	1.04047	6.8

由表 2 可见,识别结果的相对误差很大,这是因为搜索‘最优’测点布置是基于参数真值的估计值进行的,而估计值与真值相差较大。因此,以表 2 中的识别结果作为真值的估计值,并取 $\delta p = 0$,进行第二次搜索,表 3 是搜索的结果。

表 3 含圆孔正交各向异性复合材料板的测点布置
(第二次搜索)

Table 3 Measurement sets for the orthotropic composite plate with a circular hole (second trial)

	测点布置(结点/方向)						L_Q
最优	5/x	9/y	13/x	16/x			0.07906
差	1/y	2/x	6/x	12/y			7.21302
差	7/x	8/y	10/y	11/y	14/x	15/x	11.24540

采用表 3 的最优测点布置进行参数识别,16 种含误差的测量位移组合中,识别结果最大的相对误差小于 2.3%。故此识别结果就可以作为最后的结果。如果采用表 3 中差的测点布置(包括 4 个测点和 6 个测点两种工况),则均会导致参数识别过程不收敛。从算例的结果可看出测点布置选择不恰当,参数识别就会失败;此外,测点越多识别结果就越好的观点不一定是正确的。

4 结论

本文定义的目标函数的极小化问题一个非线性最小二乘问题,采用 Levenberg-Marquardt 法是简单的,也是有效的。基于静态位移的测量和边界元分析,对 Levenberg-Marquardt 优化算法适用性进行分析,提出了考虑诸多因素综合影响的优化测点布置的方法。数值算例表明该方法是有效的。正交各向异性复合材料孔板性能参数识别的结果与测点布置紧密相关。如果采用不恰当的测点布置,就可能会导致参数识别的失败。本文提出的方法可以搜索出测点的最优布置,得到令人满意的识别结果。

此外,在实际应用中,由于真值是不知道的,可以利用材料性能参数的先验信息,给出参数初值,搜索‘最优’测点布置和识别参数,把得到的识别结果作为真值的估计值,再次搜索‘最优’测点布置和识别参数,直到识别结果收敛为止。

参考文献:

- [1] Kavanagh K T. Experiment versus analysis: computational techniques for the description of static material response [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973, 5(4): 503~515.
- [2] Frederiksen P S. Parameter uncertainty and design of optimal experiments for the estimation of elastic constants [J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(12): 1241~1260.
- [3] Cunha J, Piranda J. Application of model updating techniques in dynamics for the identification of elastic constants of composite materials [J]. Composites: Part B, 1999, 30(1): 79~85.
- [4] Cunha J, Piranda J. Identification of stiffness properties of composite tubes from dynamic tests [J]. Experimental

Mechanics, 2000, 40(2): 211~218.

- [5] Avril S, Grédiac M, F Pierron. Sensitivity of the virtual fields method to noisy data [J]. Computational Mechanics, 2004, 34(6): 439~452.
- [6] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
Yuan Yaxiang, Sun Wenyu. Optimization theory and methods [M]. Beijing: Science Publishers, 2001. (in Chinese)
- [7] Dennis J E, Schnabel R B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1983.
- [8] Huang L X, Sun X S, Liu Y H, Cen Z Z. Parameter identification for two-dimensional orthotropic material bodies by the boundary element method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(2): 109~121.
- [9] Griffel D H. Applied functional analysis [M]. New York: Dover Publications, 2002.
- [10] Rhee J, Rowlands R E. Stresses around extremely large or interacting multiple holes in orthotropic composites [J]. Computers & Structures, 1996, 61(5): 935~950.

附录:

凸集的定义

设非空集合 $D_p \subset R^n$, 如果对任意 $x, y \in D_p$, 有

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in D_p, \forall \lambda \in [0,1] \quad (A1)$$

则称 D_p 是凸集。

设 a 和 b 分别是 D_p 的下界和上界, a_i 和 b_i 分别是它们的分量。参数集合 D_p 中点 x 的分量是相互独立的, 即有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (A2)$$

其中 n 是待识别参数的数目。

D_p 中两点 x, y , 则它们的分量满足

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A3)$$

$$a_i \leq y_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A4)$$

根据(A3)和(A4)可得

$$(1-\lambda)x_i + \lambda y_i \geq (1-\lambda)a_i + \lambda a_i = a_i \quad (A5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$(1-\lambda)x_i + \lambda y_i \leq (1-\lambda)b_i + \lambda b_i = b_i \quad (A6)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

由(A5)和(A6)可知,

$$a_i \leq (1-\lambda)x_i + \lambda y_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

即

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in D_p, \forall \lambda \in [0,1] \quad (A7)$$

所以 D_p 是凸集。