

任意形状区域的自动布点技术

*朱合华^{1,2}, 叶勇庚¹, 李晓军¹, 蔡永昌¹

(1. 同济大学土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 重庆大学西南资源开发及环境灾害控制工程教育部重点实验室, 重庆 400030)

摘 要: 针对存在多种介质材料、断层、裂纹、孔洞、开挖区域等不连续面或多连通区域情况的复杂平面区域, 提出了一种自动布点算法及此算法的优化方法, 该算法对不规则区域适应能力强, 无需人工干预, 且兼具有实现简单, 耗时少等特点。这些自动布置的离散结点可直接用于无网格数值计算, 也可以进一步生成有限元分析所需的三角形和四边形网格。

关键词: 岩土工程; 数值计算; 自动布点; 网格; 无网格法

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A

AUTO-ARRANGEMENT OF DISCRETE NODES IN REGIONS WITH ARBITRARY SHAPE

*ZHU He-hua^{1,2}, YE Yong-geng¹, LI Xiao-jun¹, CAI Yong-chang¹

(1. Department of Geotechnical Engineering, School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. The Key Laboratory of the Exploitation of Southwest Resources & the Environmental Disaster Control Engineering under Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: According to the complex plane regions in which there are discontinuous faces and multi-connected regions caused by various materials, faultages, cracks, holes or excavated regions, an algorithm of auto-arrangement of discrete nodes and its optimization are presented in this paper. In this algorithm an average step function is formed in the model of node arrangement according to the minimum step and radiation ratio, and every node as a parent node generates child nodes in terms of the step decided by the average step function. Whether the child nodes can live or not is decided by the existing nodes around them. The nodes adjacent to the edges of model are adjusted to meet the demand of computing. The algorithm has the advantages of perfect adaptability to regions with irregular shape, easy implementation and less time consumption. These auto-arranged discrete nodes are applicable to meshless method directly. The triangular and quadrangular meshes can also generated from these discrete nodes for finite element analysis.

Key words: geotechnical engineering; numerical computation; auto-arrangement of discrete nodes; mesh; meshless method

收稿日期: 2003-01-03; 修改日期: 2003-05-02

基金项目: 国家自然科学基金(401720950), 上海市重点学科(岩土工程)和上海市曙光计划资助, 西南能矿资源开发及环境灾害控制工程资助

作者简介: *朱合华(1962), 男, 安徽人, 教授, 博士, 博导, 副院长, 兼系主任, 主要从事岩土工程数值分析研究(E-mail: zhuhhk@online.sh.cn);

叶勇庚(1980), 男, 湖南人, 硕士, 主要从事岩土工程数值分析研究;

李晓军(1975), 男, 安徽人, 博士, 主要从事岩土工程数值分析, 岩土及地下工程软件开发工作;

蔡永昌(1972), 男, 四川人, 博士后, 主要从事岩土力学数值分析工作

1 引言

现代工程分析计算如岩土及地下工程分析计算中最常用的数值方法是有限元法^[1~2]和无网格方法^[3~4]等。这些方法中无一例外的都包含有大量复杂的前处理过程,有限元方法需进行网格划分,无网格方法不需要网格划分,但仍然需要合理布置离散的计算结点。因此结点自动布置及网格自动生成方法一直是工程数值计算中倍受关注的问题。近年来,结点自动布置及网格自动生成方法^[5~6]取得了快速发展。但是,现有自动方法基本上只适用于由单一介质构成的区域。对于实际的科学计算问题如岩土工程问题,其计算区域比较复杂,一般由多种材料构成;普遍存在断层、软弱夹层等,需要考虑节理单元生成;形状不规则,随机性大等,通常的做法是把待处理域按一定条件如材料介质分区、结点或网格密度分布、边界约束情况进行分区,然后对这些子区域(也叫超单元)逐个进行自动剖分,并将其连接起来形成完整的剖分,因此很难达到高度自动化,必须有大量的人工干预才能完成。

本文提出的任意形状区域的自动布点技术及网格生成方法从根本上解除了传统方法的人工数据准备过程,能一次自动处理多种材料介质包括存在断层、软弱夹层、节理或裂纹等构成的不规则区域,能根据各结点或网格加密区步长和区域内辐射比自动协调结点或网格密度,对于多连通区域也不需任何人工干预,从而实现了整个数值分析前处理过程的自动化。

2 计算模型的建立

用有限单元法及无网格方法进行工程数值计算首先需要从实际问题中抽象出计算模型,根据计算模型布置离散结点或生成单元,建立求解的系统平衡方程再求解得到需要的位移、应力及反演分析的材料参数。

2.1 几何模型的建立

常见工程计算如地下工程中边坡、隧洞、地下厂房和基坑,机械工程中的金属构件等的受力及稳定性分析都会有由软弱夹层、节理、断层、裂纹和开挖部分、孔洞及其它各种因素引起应力集中。计算模型需在应力集中区布置较密集的离散结点,在非应力集中区则可稀疏布置结点来减少计算时间。平面问题的几何模型可用点、曲线和封闭面来进行描述。如图1为某大型水电站侧导洞模型,整个模

型区域由封闭平面 G1 和三条导洞 T1、T2、T3 构成,其中导洞 T1、T2、T3 及断层 F1 为需要进行网格加密的应力集中区域。

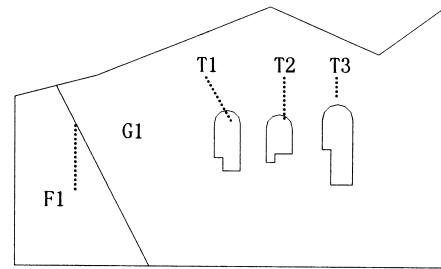


图1 某水电站导洞几何模型

Fig.1 The geometry model of the pilot tunnel of some underground hydroelectric station

2.2 从几何模型中抽象出布点模型

工程问题的几何模型建立后,为了便于计算结点的布置,根据几何模型的几何特征和坐标范围进一步自动抽象出布点模型,即自动抽象为各种倾斜与非倾斜矩形的组合。如图2所示,开挖和孔洞部分 T1、T2、T3 均可由其形成的封闭面坐标范围自动抽象为矩形,并根据其在计算中的重要性指定所属各矩形的最小步长 S 即布点间距,断层 F1 抽象为一个倾斜狭长矩形。同样,整个布点区域抽象为一矩形即全域矩形 Out_Rect。锚杆和梁等不参与布点过程,在布置完计算所需的所有的离散结点后,删除锚杆及梁附近一定范围内的结点,然后按其所在位置步长在锚杆上进行布点。

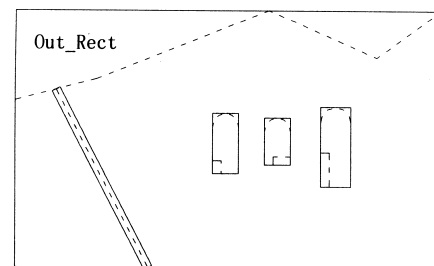


图2 水电站导洞布点模型

Fig.2 The model for arrangement of discrete nodes

3 布置初始结点算法

根据计算模型中应力集中情况整个布点区域分为加密区域与非加密区域。根据在计算中的重要性加密区域可选取不同的 S , 非加密区域由各加密区域的 S 按一定的辐射比和里密外疏的原则进行布点。全域内任意一点的平均步长由步长函数确定。

3.1 分析加密区域平均步长函数的形成过程

1) 首先考虑一个加密区域。假设有全域矩形

Out_Rect 中任意点 x , 建立加密区域矩形 i 在 Out_Rect 内的平均步长函数。如图 3(1)所示, 点 x 在加密区 i 之外, 首先求点 x 与矩形的 4 个角点 p_0 、 p_1 、 p_2 、 p_3 的距离, 找出其中与 x 有最小距离的角点, 如图 3(1)为 p_3 , 然后由点 x 与 p_3 的相邻角点 p_2 和 p_0 分别与 p_3 形成向量 p_3x , p_3p_2 , p_3p_0 。确定向量 p_3p_2 , p_3p_0 与 p_3x 夹角较小的向量, 如图 3(1)为向量 p_3p_0 , 这样点 x 处的步长由点 x 到边 p_3p_0 距离 $D(x, p_3p_0)$ 确定。

如图 3(2)所示, 假设点 x 位于按上述方法确定的距离 D 处, 全域辐射比 R , 相应加密区域最小步长 S , 且 $D = \sum_{i=1}^n D_i$, 其中

$$D_i = S \cdot (1+R)^i \quad (1)$$

则

$$n = \log(1 + D \cdot R / (S \cdot (1+R))) / \log(1+R) \quad (2)$$

把 n 扩展到实数域, 则可求出加密区外任意点 x 相对于某一加密区的平均步长

$$step = S \cdot (1+R)^n \quad (3)$$

如果点 x 位于加密区矩形 i 内(包含在矩形边线上)步长取为加密区 i 的最小步长 S , 即

$$step = S \quad (4)$$

2) 设全域中共有 k 个加密区域(加密区域可相交), 则对于全域内任意一点 x 可由 k 个加密区域得到 k 个步长值 $step(i)$, $i=1,2,3,\dots,k$ 。则点 x 的平均步长

$$step = \min(step(i)) \quad (5)$$

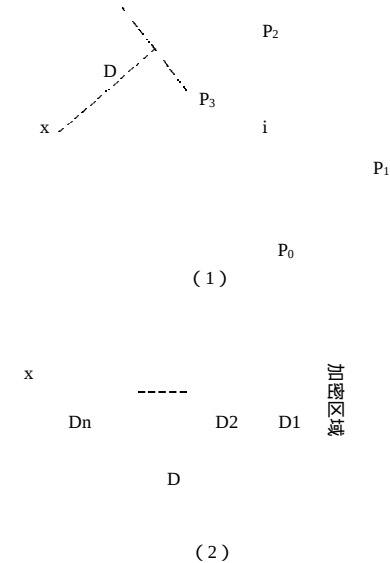


图3 加密区外任意点 x 相对于加密区 i 的步长函数形成

Fig.3 The formation of step function for the arbitrary point outside density region

3.2 布置结点

在全域内形成步长函数以后, 便可以开始布置结点。结点的布置过程其实是由父结点按照一定的规则派生出子结点的过程。整个过程维持在两条链表表中进行。其一为所有符合要求结点构成的总链表 PointList; 其二为父结点在派生出子结点后, 但还未判断子结点是否可以存活以前保存这些子结点的临时链表 tempPointList。派生过程中父结点为 PointList 中的一结点, 派生出子结点后要判断其子结点是否可以存活, 能存活的结点将加入 PointList 中, 不能存活的将被删除。存活判断准则为

$$L(c, i) \geq a \cdot \max(step(c), step(i)) \quad (6)$$

$$c \in \text{Out_Rect} \quad (7)$$

其中: i 表示 PointList 中除父结点的任一结点, c 表示被判断新生子结点, $L(c, i)$ 为子结点 c 与结点 i 的距离, $step(c)$, $step(i)$ 分别表示结点 c 与结点 i 处的平均步长, a 为放大系数取 0.75, 保证删除子结点要求不过于严格, Out_Rect 为全域矩形。

满足式(6)与式(7)则子结点 c 存活, 否则将被删除。PointList 中所有的结点作为父结点派生出子结点后, 即所有结点不能再派生有效子结点后, 将停止生成结点。

结点生成的具体步骤如下:

1) 可取全域内任意一点作为起始点进行布点, 如图 4 所示, 不妨取全域矩形左下角角点为起始点 p_0 , 将点 p_0 加入总链表 PointList, 根据点 p_0 的坐标便可由式(5)确定点 p_0 所属的平均步长 $step_{p_0}$ 。将以点 p_0 为圆心, $step_{p_0}$ 为半径的圆弧 6 等分便可得到 6 个等分点 $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{05}, p_{06}$, 由各点坐标分别由式(5)确定每个点的平均步长, 并将这 6 个点加入临时链表 tempPointList。这就是由一个父结点派生子结点的过程。经判断只有点 p_{01}, p_{02} 落在全域矩形内即满足式(7), 则删除其余四个结点 $p_{03}, p_{04}, p_{05}, p_{06}$ 。由于 PointList 中内只有一个结点且为父结点, 因此新生子结点将不与 PointList 中的结点进行存活判断。将 p_{01}, p_{02} 加入 PointList 中, 同时清空 tempPointList。

2) 在 PointList 中遍历结点作为父结点, 现在遍历到下一结点 p_{01} , 同第一个父结点一样, 将以 p_{01} 为圆心以结点 p_{01} 的平均步长为半径的圆弧 6 等分, 生成 6 个等分点 $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16}$, 由各点坐标分别确定各点平均步长并将这些点加入临时链表 tempPointList。为了满足式(7), 经

判断 p_{15} , p_{16} 将被删除。然后由存活准则式(6)判断 tempPointList 中的其余四个结点。判断 p_{11} , 以 p_{11} 为中心, 以 $2step_{11}(1+R)(step_{11}$ 为点 p_{11} 的平均步长, R 为全域辐射比)为边长做正方形, 位于该正方形内的 PointList 中的结点(不包括父结点)再与 p_{11} 按(6)式判断, 如果不满足存活准则则被删除。位于正方形外的 PointList 中结点将不与 p_{11} 按(6)式判断。同样判断 tempPointList 中的其余的子结点。最后将 tempPointList 中剩余的结点加入 PointList 中, 清空 tempPointList。

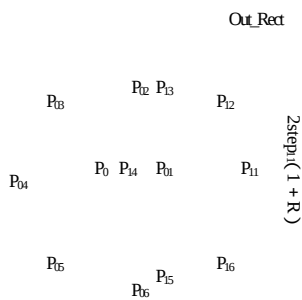


图4 结点的派生过程

Fig.4 The derivation of nodes

3) 以同 2)中的方式遍历下一结点, 进行子结点派生并进行子结点存活判断, 直至遍历到 PointList 中的最后一个结点。由于父结点是向周围派生子结点, 则最终子结点将会按步长要求充满全域矩形, 即 PointList 中的结点最终将无空间用以派生子结点, 派生过程自行结束。

3.3 加速结点生成过程

上述结点布置过程甚为简单, 但却相当耗时, 因为每一子结点的存活判断都会与总链表 PointList 中除父结点以外的所有点进行比较。例如在矩形中均匀布置 7000 个点, 判断 PointList 中的点是否落在被判点所确定的正方形中的判断次数约为 $7000(7000+1)/2=2.45 \times 10^7+3.5 \times 10^3$ 次, 因此, 加速结点的生成是完全必要的。

本文采用背景加速网格方法加速结点生成。如图 5 所示, 背景加速网格是一完全覆盖全域矩形 Out_Rect 的非倾斜小矩形阵列, 由 MeshList 维护。当新生子结点生成后, 位于 Out_Rect 中的子结点必落在某一加速小矩形中, 如子结点位于小矩形 (i, j) 中, 只需遍历小矩形 (i, j) 及其相邻小矩形中的结点便可判断该子结点是否可以存活。

加速计算步骤如下:

1) 如果生成子结点 x 且判断其位于 Out_Rect 内, 可由点 x 的坐标确定点 x 位于哪一加速小矩形中。

2) 如图 5 所示, 如果子结点 x 位于小矩形 (i, j) 中, 则点 x 与自身所在矩形以及相邻 8 个小矩形中的结点按存活准则进行判断, 并不与位于其它小矩形中的结点进行判断。如果子结点 x 被判为不能存活, 则删除子结点 x , 当由一个父结点派生的所有子结点判断结束后, 将存活子结点加入 PointList 中, 同时也将其加入所在加速小矩形 (i, j) 中。

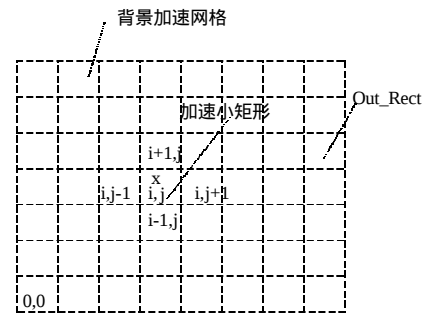


图5 背景加速网格示意图

Fig.5 The acceleration mesh

显然, 加速小矩形的边长不是任意确定的, 只有边长达到一定值时才会有最好的加速效果。确定加速小矩形最佳边长步骤如下:

1) 假设在一非倾斜全域矩形区域均匀布置 n 个结点, 并使背景加速网格阵列边缘与全域矩形边缘一致, 共划分为 k 个加速小矩形, 则每个小矩形中有 n/k 个结点。如图 6 所示, 假设在每个小矩形中布 1 个结点, 从第 1 个小矩形布到第 k 个小矩形, 则判断每个结点所属加速小矩形的判断次数分别为 $1, 2, 3, \dots, k$ 次, 则共判断 $k(k+1)/2$ 次。每个小矩形中有 n/k 个结点, 则总共判断 $n/k \cdot k(k+1)/2 = n(k+1)/2$ 次。假设每个结点要与所在及周围共 9 个小矩形中的点进行存活判断(现仅考虑判断邻近点是否在被判点所确定的正方形中, 如图 6 示结点 x 与所确定的正方形), 则平均意义下要与 $9/2 \cdot n/k$ 个点进行比较判断, 共 n 个结点, 存活判断共有 $9/2 \cdot n^2/k$ 次。所以总共判断次数为 $\frac{n}{2}(k+1) + \frac{9}{2} \frac{n^2}{k}$ 。求出 k 的极小值 $\min(k) = 3 \sqrt{n}$ 。假设每个加速小矩形为正方形, 且设域内步长 $S=1$, 则有

$$l^2 \cdot \min(k) = l^2 \cdot 3 \sqrt{n} = n \quad (8)$$

l 为小矩形边长。

按(8)式计算得

表 1 几个典型结点数目下的加速小矩形边长

Table 1 Side length of the acceleration rectangle for typical numbers of nodes

结点数 n	1000	2000	5000	10000
小矩形边长 l	3.25	3.86	4.85	5.77

以上过程得到在均布结点情况下,加速小矩形在相应结点数下的最优边长。计算中取 $l=4.8$ 。

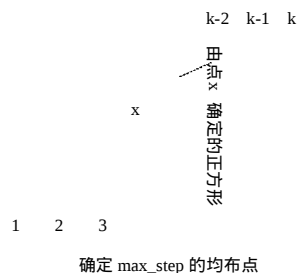


图 6 确定加速小矩形边长示意图

Fig.6 The formation of acceleration rectangle side length

2) 由于计算过程中结点可能按一定的辐射比布置而并不是均布,为了让每一新生子结点能与可能使之不能存活的结点进行比较判断,则加速小矩形的边长不能小于全域矩形中可能的最大步长,因此如图 6 所示均匀取出全域矩形中 13 个点,由步长函数可确定 13 个点的步长,其中最大步长近似代表全域矩形中的最大步长记为 $\max_step$ 。因此则有边长 $l=\max_step$ 。

经上述分析,总的说来加速小矩形的边长确定为

$$l = \max(4.8 \max(step(i)), 1.2 \max_step) \quad (9)$$

$step(i) (i=1,2,3,\dots,k)$ 表示第 i 个加密区域的步长值。

这样处理即可加速布点过程又可保证布点质量。

4 不合格结点的删除和调整

由上述布点模型由自动布点算法布出初始结点如图 7 所示,但其初始结点必须进行处理才能用于无网格数值计算以及有限元法网格的生成。首先用成熟的点与平面封闭区域包含算法^[7]判断处于区域外的无用结点,并删除之;对于每条曲线附近的结点,如果它到曲线的距离小于 0.3 倍结点的平均步长 $step$, 删除该结点;如果结点到曲线的距离大于 $0.3step$, 小于 $0.6step$, 沿着与曲线垂直的反方向调整该结点到 $0.6step$ 处。

由于靠近每条曲线(包括曲线上)的点均被删

除,曲线上的点则需要重新布置。每条曲线的端点可作为生成的结点加入链表 PointList 中,同时确定各端点结点的平均步长。再按曲线端点的步长等比布置曲线上的结点,将其加入 PointList 中。

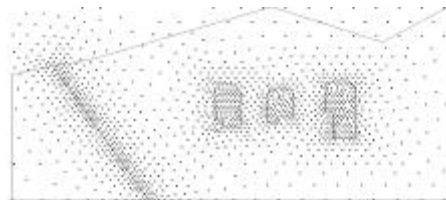


图 7 布置的初始结点

Fig.7 The arrangement of initial nodes

经过上述步骤后,最后得到可用于无网格计算的离散布置结点如图 8 所示。

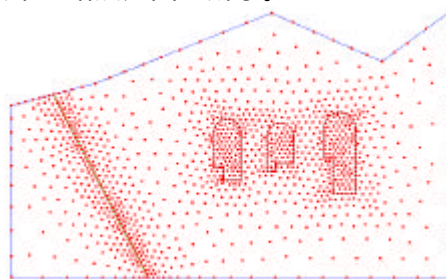


图 8 无网格计算结点

Fig.8 The meshless nodes

5 网格生成

对图 8 中的离散结点可以用成熟的 Delaunay 三角化算法^[8]直接生成有限单元法的计算网格(图 9)。在已有三角形网格的基础上,通过三角形到四边形的转化算法^[9]和 Laplace 网格光顺算法^[10],我们还可以实现四边形有限元网格的自动生成(图 10)。而在传统的有限元网格自动剖分算法中(如 MARC、ANSYS)里,一般需要根据应力集中区域或结构的几何形状指定每一条曲线上的剖分密度,再进一步用各种算法生成计算网格,整个过程仍需要较多的人工干预才能完成。

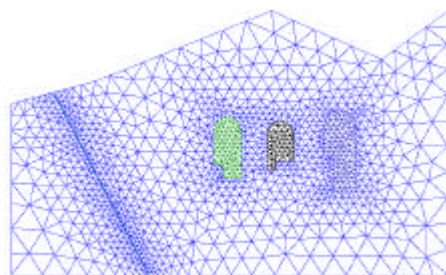


图 9 Delaunay 三角化网格

Fig.9 The mesh of Delaunay triangulation

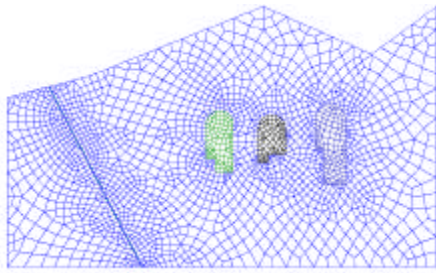


图 10 四边形有限元网格

Fig.10 The quadrangular mesh for FEM

6 结论

任意形状区域的自动布点技术及网格生成无论实际工程分析结构的几何形体多么复杂,只要给定最小步长和由里向外的辐射比,就可以自动的建立无网格方法或有限元分析所需的数值模型,这将会极大的简化无网格方法或有限元分析的前处理过程,尤其为复杂区域情况的结点布置提供了一条极为便捷的途径,能更好的为工程计算和分析服务。对于三维情况,由于需要处理点、线、面和体的描述,该算法的复杂度将大为提高,但其基本原理仍然一样,进一步的工作正在进行之中。

参考文献:

- [1] Zienkiewicz O C. The Finite Element Method. 3rd ed[M]. London: McGraw-Hill, 1977.
- [2] Whiteman J R. The Mathematics of Finite Elements and Applications[M]. New York: Academic Press, 1973.

(上接 108 页)

参考文献:

- [1] Gray H. Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soil [J]. Transactions, ASCE, 1945, 111: 1327-1356.
- [2] Shiffman RL, Stein J R. One-dimensional consolidation of layered systems[J]. JSMFD ASCE, 1970, 96(4): 1499-1504.
- [3] K H Xie, K H Wang & G X Zeng. A study on 1-D consolidation of soils exhibiting rheological characteristics with impeded boundary [C]. Second International Conference on Soft Soil Engineering, Nanjing: Hehai University Press, 1996, 1: 357-362.
- [4] 王奎华, 谢康和, 曾国熙. 双面半透水边界的一维粘弹性固结理论[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 34-36. Wang KH, Xie KH, Zeng, GX. Theory of 1-D visco-elastic consolidation of soils with impeded boundaries[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998; 20(2): 34-36.
- [5] 陈宗基. 固结及次时间效应的单向问题[J]. 土木工程学报, 1958, 5(1): 1-10. Tan T K. Secondary time effects and consolidation of clays [J]. Chinese Journal of Civil Engineering, 1958,

- [3] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. Comput Meth Appl Mech Eng., 1996, 139: 3-47.
- [4] 宋祖康, 陆明万, 张雄. 固体力学中的无网格方法[J]. 力学进展, 2000, 30(1): 55-65. Song Zukang, Lu Mingwan, Zhang Xiong. Meshless methods in solid mechanics[J]. Process of Mechanics, 2000, 30(1): 55-65. (in Chinese)
- [5] Zienkiewicz O C and Phillips D V. An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surface by Isoparametric Co-ordinates [J]. Int. Num. Meth. Eng., 1971, 3: 519-528.
- [6] Gordon W J and Hall C A. Construction of curvilinear Co-ordinates systems and applications to mesh generation[J]. Int. Num. Meth. Eng., 1973, 7: 461-477.
- [7] 孙家广. 计算机图形学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. Sun Jianguang. Computer graphics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. (in Chinese)
- [8] L Paul Chew. Constrained delaunay triangulations[J]. Algorithmica, 1989, 4(1): 97-108.
- [9] 闵卫东, 唐泽圣. 三角形网格转化为四边形网格[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1996, 8(1): 1-6. Ming Weidong, Tang Zesheng. Transformation of quadrangular mesh from triangular mesh[J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 1996, 8(1): 1-6. (in Chinese)
- [10] 王世军, 黄玉美, 张广鹏. 一种全四边形网格快速生成方法 - 堆砌法[J]. 机械工程学报, 2000, 35(10): 72-75. Wang Shijun, Huang Yumei, Zhang Guangpeng. A rapid generation method for quadrangular mesh-stacking method[J]. Journal of Machinery Engineering, 2000, 35(10): 72-75. (in Chinese)
- [6] Gibson RE, Lo KY. A theory of consolidation of soils exhibiting secondary compression [C]. Acta Polytechnica Scandinavia 296, Chapter 10, 1961.
- [7] Lo KY. Secondary compression of clays[J]. JSMFD ASCE 1961, 87(SM4): 61-87.
- [8] Xie K H, Liu X W. A study on one dimensional consolidation of soils exhibiting rheological characteristics [C]. Proc. of Int. Symposium on Compression and Consolidation of Clayey Soils. Japan: Balkema Rotterdam, 1995, 1: 385-388.
- [9] Xie KH, Guo S, Li BH, Zeng GX. A theory of consolidation for soils exhibiting rheological characteristics under cyclic loading [C]. Proc. of Int. Conf. On Computer Methods and Advances in Geomechanics. Wuhan, China: Balkema Rotterdam, 1997, 2: 1053-1058.
- [10] Chen JZ, Zhu, XR, Xie KH, Pan QY, Zeng GX. One dimensional consolidation of soft clay under trapezoidal cyclic loading [C]. Proc. of the Second International Conference on Soft Soil Engineering. Nanjing, China: Hehai University Press, 1996. 211-216.