

集中载荷作用下弹性平面刚性夹杂的形状优化

*杨班权¹, 刘又文², 薛孟君¹, 张玉春¹

(1. 装甲兵工程学院机械工程系工程力学室, 北京 100072; 2. 湖南大学工程力学系, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 当夹杂的弹性模量比基体的弹性模量大得多时, 可将其看成刚性夹杂。对于这类硬夹杂与软基体的复合材料, 采用复变函数方法中的保角映射技术和推广的 Schwarz 延拓原理, 并结合对复应力函数的奇性主部分分析, 导出了焊接任意形状刚性夹杂的全场基本奇异解, 求解了集中力与集中力偶作用下弹性平面刚性夹杂的形状优化问题, 描绘出了夹杂界面应力最大值、界面主应力最大值随夹杂形状的变化规律, 精确地定位出了界面应力最大值、界面主应力最大值的作用位置。通过对这些不同形状夹杂的界面主应力最大值的比较, 确定了夹杂的最优形状。

关键词: 刚性夹杂; 集中载荷; 形状优化; 界面应力; 平面弹性

中图分类号: O343.7, TB332 **文献标识码:** A

SHAPE OPTIMIZATION OF A RIGID INCLUSION IN AN ELASTIC PLANE UNDER CONCENTRATED LOADS

*YANG Ban-quan¹, LIU You-wen², XUE Meng-jun¹, ZHANG Yu-chun¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Armored Force Engineering Institute, Beijing 100072, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The shape optimization of a rigid inclusion in an elastic plane under concentrated loads is considered. The conformal mapping technique and extended Schwarz principle integrated with the analysis of singularity of complex stress functions are adopted. A number of examples of the rigid inclusion with different shapes, such as elliptical, triangular and square inclusion, to account for a wide range of shape variations are discussed. Numerical results and graphs are presented, showing that the maximum interface stresses vary with the shape of inclusion. The shape resulting in minimum interface principal stress is obtained. Some suggestions are made in regard to the design of the shape of rigid inclusion.

Key words: rigid inclusion; concentrated loads; shape optimization; interface stress; plane elasticity

1 引言

夹杂对工程材料特别是复合材料的力学行为有着重要的影响。从固体非均匀相的观点来看, 当

夹杂的弹性模量比基体的弹性模量大得多时, 可将其看成刚性夹杂, 如玻璃纤维/环氧树脂 (Glass/Epoxy) 或弥散强化 SAP 复合材料。刚性夹杂

收稿日期: 2003-03-01; 修改日期: 2003-09-08

作者简介: *杨班权(1972), 男, 湖南永州人, 讲师, 硕士, 从事复合材料力学的研究(E-mail: yangbq1022@tom.com);

刘又文(1948), 男, 湖南益阳人, 教授, 硕士, 从事断裂、损伤及复合材料力学的研究;

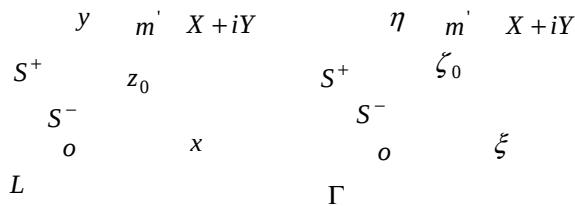
薛孟君(1962), 男, 山西万荣县人, 副教授, 博士, 从事机械结构强度数值分析的研究;

张玉春(1977), 男, 湖南永州人, 博士, 从事车辆工程和控制系统的研究

的复合材料力学模型是有实际工程意义的,特别是相间界面处的最大应力场随夹杂形状的变化规律对于复合材料的强度分析和结构设计能提供有价值的参考依据,因为复合材料中损伤或裂纹的萌生机理很多情形下主要取决于夹杂与基体界面上的最大应力。随着复合材料细观机理研究的不断深入,对于一些裂纹、孔洞、夹杂问题的研究已有许多成果^[1-7],文[8]研究了含椭圆孔压电材料的平面问题,导出了在椭圆孔外任一点作用集中载荷时的复应力函数基本解,文[9,10]研究了集中载荷下不同材料的界面裂纹问题。本文在此基础上,采用复变函数方法中的保角映射技术和推广的 Schwarz 延拓原理,并结合对复应力函数的奇性主部分析,求解了无限平面内任意位置在集中力与集中力偶作用下刚性夹杂的形状优化问题。本文所得的结论,可为硬夹杂与软基体的复合材料的强度分析和结构优化设计提供有价值的参考依据,同时所得的基本解不但可作为 Green 函数,求得任意分布载荷下的相应解答,而且还可为边界元法提供一基本解,获得弹性平面任意有限域的相应解答。

2 模型及理论公式的推导

如图 1(a)所示,在无限大各向同性弹性基体中,含有任意形状边界所围成的外部区域 S^+ ,在 S^- 内焊接了与边界形状完全相同的刚性夹杂,在 S^+ 内任意位置 z_0 处作用集中力 $X + iY$ 与集中力偶 m' 。



(a) 物理平面

(b) 相平面

图 1 保角映射

Fig.1 Conformal mapping

采用任意形域到单位圆形域的保角映射式^[1]

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \zeta^{-k}) \quad (1)$$

其中 $\zeta = \xi + \eta i = \rho \exp[i\theta]$, R 为常数,且 $R > 0$, m_k 为级数中的系数。式(1)将物理平面 z 中基体所占区域映射成 ζ 平面单位圆的外部区域,如图 1(b)所示。经保角映射,物理平面上的任意形边界 L 外(含边界

L)的 z 点相应的变换成相平面的单位圆边界 Γ 外(含边界 Γ)的 ζ 点(图中未标出)。令

$$z = x + yi = r \cdot \exp[i\beta], \quad \zeta = \rho \cdot \exp[i\theta] \quad (2)$$

$$\text{式中 } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \beta = \frac{y}{x}, \quad \beta = \arctg \frac{y}{x}$$

由式(1)、(2)可确定相平面中单位圆的 θ 角与物理平面(真实平面)的 β 角的对应关系,“ $\arctg$ ”表示反正切,用 σ_ρ 、 σ_θ 、 $\tau_{\rho\theta}$ 表示正交曲线坐标系下的应力分量, u_θ 、 u_ρ 表示位移分量,它们分别由两个复应力函数 $\Phi(\zeta)$ 、 $\Psi(\zeta)$ 表示^[1]

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] \quad (3)$$

$$\sigma_\rho - i\tau_{\rho\theta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\rho^2} [\omega(\zeta)\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)] \quad (4)$$

$$2\mu[\omega'(\zeta)(u_\rho + iu_\theta)] = \frac{\zeta}{\rho} \omega'(\zeta) \{ \kappa \varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - \psi(\zeta) \} \quad (5)$$

其中 $\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega''(\zeta)}$, $\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$, $\Phi(\zeta)$ 、 $\omega(\zeta)$ 分别表示 $\Phi(\zeta)$ 、 $\omega(\zeta)$ 的共轭式, $\varphi'(\zeta)$ 、 $\psi'(\zeta)$ 、 $\omega'(\zeta)$ 、 $\Phi'(\zeta)$ 分别表示 $\varphi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ 、 $\omega(\zeta)$ 、 $\Phi(\zeta)$ 对 ζ 的导数。对于平面应变问题, $\kappa = 3 - 4\nu$; 对于平面应力问题, $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$, ν 为泊松比。

对于焊接刚性核的连续边界条件,即在 $|\zeta| = |\sigma| = 1$ 上,位移为零,由式(5)有

$$\kappa \varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 0 \quad (6)$$

在集中载荷作用处,必存在一奇点 ζ_0 ,且 $\varphi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ 的奇性主部分别为

$$G(\zeta) = M \ln(\zeta - \zeta_0) \quad (7)$$

$$G'(\zeta) = N \ln(\zeta - \zeta_0) - \frac{M\zeta_0}{\zeta - \zeta_0} + \frac{im'}{2\pi(\zeta - \zeta_0)} \quad (8)$$

$$\text{式中 } M = -\frac{X + Yi}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad N = -\frac{\kappa(X - Yi)}{2\pi(1 + \kappa)}$$

为求解方便,在 S^+ 内定义一函数

$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) \quad (9)$$

由式(7)、(8)、(9),得 $\Phi^*(\zeta)$ 在点 ζ_0 的奇性主部为

$$G^*(\zeta) = \frac{Ma_0}{\zeta - \zeta_0} + N \ln(\zeta - \zeta_0) - \frac{M\zeta_0}{\zeta - \zeta_0} + \frac{im'}{2\pi(\zeta - \zeta_0)} \quad (10)$$

其中 a_0 为 $\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$ 在点 ζ_0 展开成幂级数的常数项。

于是 $\varphi(\zeta)$ 、 $\Phi^*(\zeta)$ 在 S^+ 内除无穷远处和奇点 ζ_0 外, 为全纯函数, 可将 $\varphi(\zeta)$ 、 $\Phi^*(\zeta)$ 向 S^- 内解析延拓, 即

$$\kappa\varphi(\zeta) = \Phi^*(R^2/\zeta) \quad (11)$$

$$\Phi^*(\zeta) = \kappa\varphi(R^2/\zeta) \quad (12)$$

由式(11)、(12), 并结合式(7)、(10), 得 $\varphi(\zeta)$ 与 $\Phi^*(\zeta)$ 在 S^- 内, 由于奇点 ζ_0 的对称延拓点 R^2/ζ_0 的奇性主部分别为

$$G(\zeta) = \frac{1}{\kappa} [N \ln(\zeta - R^2/\zeta_0) + (M\zeta_0 - Ma_0 + \frac{im'}{2\pi})R^2 + (\zeta - R^2/\zeta_0)\zeta_0^2] \quad (13)$$

$$G^*(\zeta) = \kappa M \ln(\zeta - R^2/\zeta_0) \quad (14)$$

在无穷远处, 函数 $\varphi(\zeta)$ 与 $\psi(\zeta)$ 的奇性主部分别为 $G(\zeta) = M \ln \zeta$ 、 $G^*(\zeta) = N \ln \zeta$, 由式(11)、(12), 得 $\varphi(\zeta)$ 与 $\Phi^*(\zeta)$ 在 S^- 内, 由于无穷远处所对应的原点的奇性主部分别为 $G(\zeta) = -\frac{N}{\kappa} \ln \zeta$ 、 $G^*(\zeta) = -\kappa M \ln \zeta$ 。除上述各奇点外, $\varphi(\zeta)$ 与 $\Phi^*(\zeta)$ 不再有其它奇点, 由 Liouville 定理, 得 $\varphi(\zeta)$ 与 $\Phi^*(\zeta)$ 的表达式分别为

$$\varphi(\zeta) = M \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{\kappa} [N \ln(\zeta - R^2/\zeta_0) - N \ln \zeta + (M\zeta_0 - Ma_0 + im'/2\pi)] \quad (15)$$

$$\Phi^*(\zeta) = N \ln(\zeta - \zeta_0) - \kappa M \ln \zeta + \kappa M \ln(\zeta - R^2/\zeta_0) + (Ma_0 - M\zeta_0 + im'/2\pi) \quad (16)$$

最后, 由式(9)可确定 $\psi(\zeta)$, 再由式(3)、(4)、(5)可确定整个弹性平面应力和位移场。

3 算例

令 $X + iY = 1.000 + 1.000i$ (MPa), $m' = 0$, $\kappa = 2$, $R = 1$, $\zeta_0 = 1.25 \cdot \exp(i\pi/4) = 0.8838 + 0.8838i$, 得 $M = -0.0531 - 0.0531i$; $N = 0.1061 - 0.1061i$ 。

3.1 椭圆形夹杂

如图 2 所示, 保角映射式为

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta})$$

其中 $R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$, 且 $R > 0$,

$0 \leq m < 1$, a 、 b 分别为椭圆半长、短轴, 当 $a = b$, 即 $m = 0$ 时, 夹杂形状为圆形。由已知条件, 可得 $z_0 = 1.1667 + 0.6010i$, $a_0 = a_1/b_1$, 其中 $a_1 = m \cdot \zeta_0^3 + R^4 \zeta_0$, $b_1 = R^2 \zeta_0^2 - mR^2$; 且有 $a_0 = 0.8781 - 0.4047i$ 。令 $a/b = 3$, $m = 0.5$, 界面应力随 θ 的变化规律由图 3 所示。界面应力绝对值最大值与界面主应力最大值 $\sigma'_{\max}$ 及其在物理平面的作用位置 β (θ 表示在相平面的位置) 由表 1 所示。

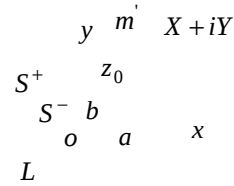


图 2 椭圆形夹杂

Fig.3 Elliptical inclusion

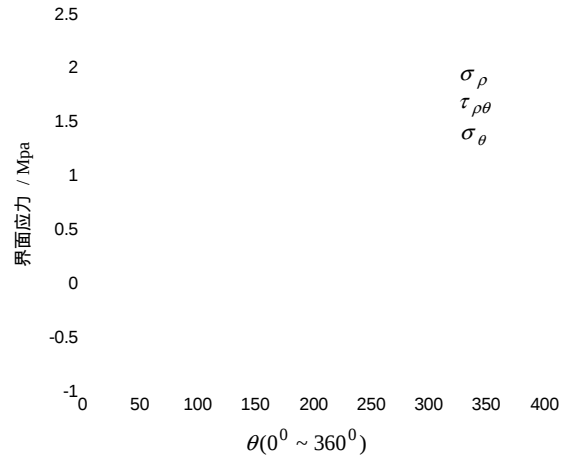


图 3 椭圆刚性夹杂界面应力随 θ 角度的变化规律

Fig.3 The interface stresses of elliptical inclusion versus θ

表 1 椭圆刚性夹杂界面应力最大值、界面主应力最大值及其作用位置

Table 1 The maximum value and position of interface stresses and principal stress of the elliptical inclusion

$\sigma_{\rho \max}$ /MPa	$\sigma_{\theta \max}$ /MPa	$\tau_{\rho\theta \max}$ /MPa	$\sigma'_{\max}$ /MPa
2.1781	0.7260	0.9391	2.3967
β (°)	β (°)	β (°)	β (°)
18.4°	18.4°	22.4°	19.7°
θ (°)	θ (°)	θ (°)	θ (°)
45°	45°	51	47°

同时, 还计算了椭圆夹杂界面最大主应力 $\sigma'_{\max}$ 随椭圆形形状系数 m 的变化规律, 如图 4 所示。

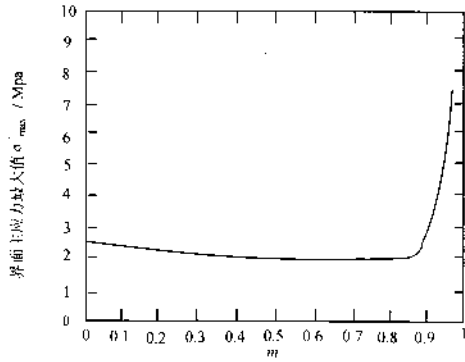
图4 椭圆刚性夹杂界面最大主应力 $\sigma'_{\max}$ 随 m 的变化规律

Fig.4 The interface maximum principal stress $\sigma'_{\max}$ of elliptical inclusion versus m

3.2 正三角形夹杂

由图5所示, 保角映射式为

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{1}{3\zeta^2} + \frac{1}{45\zeta^5} + \dots)$$

取上式右边的前三项, 能得满意的结果, 其中 R 为与正三角形面积有关的常数。由已知条件, 可得 $z_0 = 0.8839 + 0.6706i$, $a_0 = a_1 / b_1$, 其中 $a_1 = 45 \cdot R^{12} \zeta_0^5 + 15R^6 \zeta_0^8 + \zeta_0^{11}$, $b_1 = R^{10} (45\zeta_0^6 - 30\zeta_0^3 - 5)$, 且得 $a_0 = 0.3928 - 0.1419i$, 界面应力随 θ 的变化规律由图6所示。界面应力绝对值最大值与界面主应力最大值 $\sigma'_{\max}$ 及其在物理平面的作用位置 β (θ 表示在相平面的位置) 由表2所示。

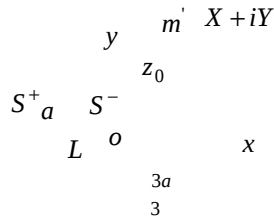


图5 正三角形夹杂

Fig.5 Equilateral triangular inclusion

表2 正三角形刚性夹杂界面应力绝对值最大值、界面主应力最大值及其作用位置

Table 2 The maximum value and position of interface stresses and principal stress $\sigma'_{\max}$ of the triangle inclusion

$\sigma_{\rho \max}$ /MPa	$\sigma_{\theta \max}$ /MPa	$\tau_{\rho\theta \max}$ /MPa	$\sigma'_{\max}$ /MPa
2.2167	0.7389	0.9065	2.3237
β ($^\circ$)	β ($^\circ$)	β ($^\circ$)	β ($^\circ$)
30	30	42.4	32.8
θ ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	θ ($^\circ$)
45 $^\circ$	45 $^\circ$	52 $^\circ$	47 $^\circ$

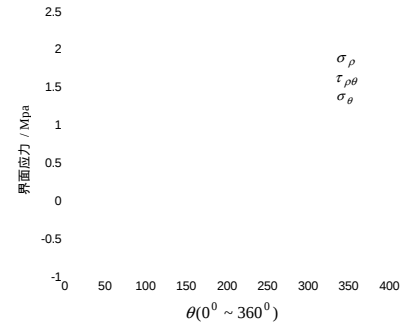
图6 正三角形刚性夹杂界面应力随 θ 角度的变化规律

Fig.6 The interfacial stresses of triangle inclusion versus θ

3.3 正方形夹杂

由图7所示, 保角映射式为

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{1}{56\zeta^7} - \frac{1}{176\zeta^{11}} + \dots)$$

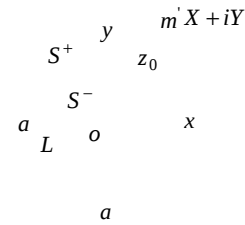


图7 正方形夹杂

Fig.7 Square inclusion

取上式右边的前4项, 能得到满意的结果, 其中 R 为与正方形面积有关的常数。由已知条件, 经计算得 $z_0 = 0.9442 + 0.9442i$, $a_0 = a_1 / b_1$, 其中 $a_1 = 176R^{24} \zeta_0^{11} - \frac{88}{3} R^{16} \zeta_0^{15} + \frac{22}{7} R^8 \zeta_0^{19} - \zeta_0^{23}$, $b_1 = R^{22} (176\zeta_0^{12} + 88\zeta_0^8 - 22\zeta_0^{14} - 11)$, 且得 $a_0 = 1.3261 - 0.8055i$, 界面应力随 θ 的变化规律由图8所示, 界面应力绝对值最大值与界面主应力最大值 $\sigma'_{\max}$ 及其在物理平面的作用位置 β (θ 表示在相平面的位置) 由表3所示。

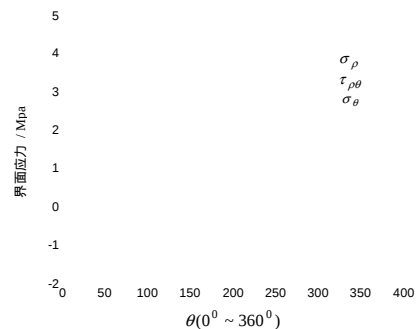
图8 正方形刚性夹杂界面应力随 θ 角度的变化规律

Fig.8 The interfacial stresses of square inclusion versus θ

表 3 正方形刚性夹杂界面应力绝对值最大值、界面主应力最大值及其作用位置

Table 3 The maximum value and position of interface stresses and principal stress $\sigma'_{\max}$ of the square inclusion

$\sigma_{\rho_{\max}} / \text{MPa}$	$\sigma_{\theta_{\max}} / \text{MPa}$	$\tau_{\rho\theta_{\max}} / \text{MPa}$	$\sigma'_{\max} / \text{MPa}$
4.8899	1.6300	2.6147	5.4194
$\beta (^{\circ})$	$\beta (^{\circ})$	$\beta (^{\circ})$	$\beta (^{\circ})$
45.3	45.5	44.6	45
$\theta (^{\circ})$	$\theta (^{\circ})$	$\theta (^{\circ})$	$\theta (^{\circ})$
46 $^{\circ}$	47 $^{\circ}$	43.5 $^{\circ}$	45

4 结论

(1) 对于椭圆形刚性夹杂的情形：由图 3 与表 1 中可看出，当 $a/b=3$ 时，在集中力作用附近，界面应力都有明显的应力集中，表现最突出的是 σ_{ρ} ，其最大值为 2.1781MPa； $\sigma'_{\max}$ 为 2.3967MPa。

由图 4 可看出：当 $0 \leq m \leq 0.8571$ ，即 $1 \leq a/b \leq 13$ 时， $\sigma'_{\max}$ 随 a/b 的增加而减少，当 $a/b=13$ 时，界面主应力最大值 $\sigma'_{\max}$ 为最小；当 $0.8571 < m < 1 (a/b > 13)$ 时， $\sigma'_{\max}$ 随 a/b 的增加而急剧增加，当 $m \rightarrow 1 (a/b \rightarrow \infty)$ 时，即夹杂为刚线性，应力具有奇异性，理论上的应力值表现为无穷大。

(2) 对于正三角形与正方形刚性夹杂的情形：由图 6、图 8、表 2、表 3 得，在集中力作用附近和夹杂尖角处，界面应力都有明显的应力集中，表现最突出的是 σ_{ρ} ，正三角形的 $|\sigma_{\rho}|_{\max}$ 为 2.2167MPa， $\sigma'_{\max}$ 为 2.3237MPa；正方形的 $|\sigma_{\rho}|_{\max}$ 为 4.8899MPa， $\sigma'_{\max}$ 为 5.4194MPa。

(3) 在相平面集中载荷位置确定的情形下，圆形夹杂并非为最优形状，而是当椭圆形夹杂的半长、短轴之比 $a/b=13$ 时，夹杂形状是最优的，因为此时的夹杂界面主应力最大值 $\sigma'_{\max}$ 是最小的。至于椭圆形、正三角形与正方形夹杂形状的比较，经精确计算有：正方形的最大主应力是正三角形的 2.33 倍，所以三角形优于正方形；当椭圆半长、短轴之比 $5 \leq a/b \leq 17$ 时，即 $0.6667 \leq m \leq 0.8571$ ，椭圆形优于正三角形；当椭圆半长、短轴之比 $a/b \leq 32$ 时，即 $0 \leq m \leq 0.94$ ，椭圆形优于正方形；当 $a/b \rightarrow \infty$ ，即 $m \rightarrow 1$ 时，应力值表现为无穷大，此时的正三角形与正方形都要优于椭圆形。故在复合材料结构的设计中，应避免含有尖角或边界非光滑曲线的夹杂是十分必要的，否则将会产生严重的应

力集中，进而可能引起界面损伤和裂纹的萌生。

参考文献：

- [1] Muskhelishvili. Some basic problems of the mathematical of elasticity [M]. Norrhhoff Ltd. Gromnngen, Holland, 1975. 257-263.
- [2] 萨文 G N, 卢鼎霍, 译. 孔附近的应力集中[M]. 北京: 科学出版社, 1958.
Savin G N. Translated by Lu Dinghuo. Stress concentration around holes[M]. Beijing: Science Press, 1958. (in Chinese)
- [3] 樊大钧. 数学弹性力学[M]. 北京: 新时代出版社, 1983.
Fan Dajun. Mathematical elasticity [M]. Beijing: New Times Press, 1983. (in Chinese)
- [4] 刘又文, 宁志华, 蒋持平. 弹性椭圆夹杂纵向剪切问题[J]. 力学季刊, 2002, 23(3): 417-421.
Liu Youwen, Ning Zhihua, Jiang Chiping. On the longitudinall shear problems of elastic elliptical inhomogeneity [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2002, 23(3): 417-421.
- [5] 仲政. 压电材料椭圆夹杂界面开裂的电弹性耦合解[J]. 上海力学, 1998, 19(1): 9-14.
Zhong Zheng. An electro-elastic solution for the interfacial cracking of an elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1998, 19(1): 9-14. (in Chinese)
- [6] Gong S X, Meguid S A. A general treatment of elastic field of an elliptical inhomogeneity under anti-plane shear [J]. ASME, J of Appl Mech., 1992, 59: 131-135.
- [7] 陆建飞, 沈为平, 杨辉. 圆形域多圆孔多裂纹反平面问题[J]. 上海力学, 1998, 19(4): 360-366.
Lu Jianfei, Shen Weiping, Yang Hui. A study of the crack problem in a circular region of a solid with antiplane multiple holes [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1998, 19(4): 360-366. (in Chinese)
- [8] 高存法, 董登科. 含椭圆孔压电材料平面问题的复变函数解[J]. 工程力学, 1998, 15(3): 98-104.
Gao Cunfa, Dong Dengke. The complex function for plane problems of piezoelectric material with an elliptical hole[J]. Engineering Mechanics, 1998, 15(3): 98-104. (in Chinese)
- [9] 侯密山, 杨秀娟. 集中载荷作用下的不同压电材料反平面应变状态的共圆弧界面裂纹问题[J]. 工程力学, 1998, 15(1): 110-114.
Hou Mishan, Yang Xiujuan. Anti-plane strain problems of circular-arc cracks between bonded dissimilar piezoelectric materials under concentrated forces [J]. Engineering Mechanics, 1998, 15(1): 110-114. (in Chinese)
- [10] 刘又文, 蒋持平. 在集中力与集中力偶作用下不同弹性材料圆形界面裂纹问题[J]. 应用数学与力学, 1987, 8(3): 267-276.
Liu Youwen, Jiang Chiping. Problem on circular-arc cracks between bonded dissimilar materials under concentrated force and moment [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1987, 8(3): 267-276. (in Chinese)