第 21 卷第 5 期 工 程 力 学 Vol.21 No.5
2004 年 10 月 ENGINEERING MECHANICS Oct. 2004

文章编号：1000-4750(2004)05-0188-05

在复杂应力状态下厚壁圆筒的极限分析

*冯剑军[1,2]，张俊彦[2]，张 平[2]，谭援强[1]，韩利芬[1]

(1. 湘潭大学机械学院，湖南 湘潭 411105; 2. 湘潭大学一般力学与材料工程研究所，湖南 湘潭 411105)

摘 要：应用双剪统一强度理论，考虑材料的拉压异性和同性，推导了在内压力和轴力联合作用下的厚壁圆筒的塑性极限载荷计算公式，并且绘制了其极限载荷线图。在这些计算公式中，当其系数取不同的值时，就能得到按 Tresca 屈服准则、线性逼近的 Mises 屈服准则和双剪应力屈服准则的计算结果。应用其极限载荷线图，根据其承受的载荷大小，就能判断厚壁圆筒是否达到了屈服极限状态。绘制了在不同屈服准则下的极限载荷线图，以便对其差异进行比较。

关键词：极限分析；屈服准则；双剪统一强度理论；厚壁圆筒；极限载荷

中图分类号：O344.5 **文献标识码**：A

LIMIT ANALYSIS OF THICK-WALLED TUBES IN COMPLEX STRESS STATE

*FENG Jian-jun[1,2] , ZHANG Jun-yan[2] , ZHANG Ping[2] , TAN Yuan-qiang[1] , HAN Li-fen[1]

(1. College of Mechanical Engineering, Xiangtan University, Hunan, Xiangtan 411105, China;

2. Institute of General Mechanics & Material Engineering, Xiangtan University, Hunan, Xiangtan 411105, China)

Abstract: The limit loading formulae of thick-walled tubes under the action of combined inner pressure with axial force, are derived based on the twin shear unified strength theory. The strength differential effect in tension and compression is considered and the curve of limit loadings is plotted. In these formulae, the results given by Tresca criterion, linear approximate Mises criterion and twin shear stress yielded criterion can be obtained respectively when different coefficients are chosen. Whether the whole thick-walled tube has entered into the yield state can be decided based on the curve. Limit loading curves of thick-walled tubes under different yield criteria are plotted so that differences among them can be compared.

Key words: limit analysis; yield criterion; twin shear unified strength theory; thick-walled tube; limit loading

1 引言

厚壁圆筒是工程中经常使用的一种结构，对其进行极限分析，就其工程应用意义上来说是很重要的。以前，对其进行极限分析主要是采用 Tresca 屈服准则、Mises 屈服准则和双剪应力屈服准则等，如文[1~3]等。文[4]虽然采用了双剪统一强度理论

收稿日期：2003-01-20；修改日期：2003-05-28

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目(01JJY2001)

作者简介：*冯剑军(1959)，男，湖南人，副教授，从事一般力学方面的研究(E-mail: fengjianjun@xtu.edu.cn)；
张俊彦(1960)，男，湖南人，副教授，博士，从事材料破坏理论方面的研究；
张 平(1955)，男，湖南人，教授，博士生导师，从事材料破坏理论方面的研究；
谭援强(1965)，男，湖南人，教授，博士，从事机械设计及理论方面的研究；
韩利芬(1963)，女，湖南人，副教授，博士，从事非线性有限元方面的研究

对厚壁筒进行极限分析，但只是简单受载情况。当采用 Tresca 屈服准则进行极限分析时，没有考虑中间主应力 s_2 对材料强度的影响；而采用 Mises 屈服准则进行极限分析时，由于它的非线性带来了数学上的求解困难；同时，也没有考虑材料的 SD 效应(即拉伸和压缩强度差效应)。文[1]虽然采用双剪应力屈服准则进行了极限分析，但没有考虑材料的 SD 效应。采用双剪统一强度理论对工程结构进行极限分析具有许多优势，克服了以上所述的不足，因此，双剪统一强度理论的应用将越来越广泛。从双剪应力屈服准则的提出到双剪统一强度理论的形成已经取得了很大的成就，如文[4~8]等。本文采用双剪统一强度理论，对在内压力和轴力联合作用下的厚壁圆筒进行了塑性极限分析，同时考虑了材料的 SD 效应对材料承载能力的影响，从而获得了极限载荷计算式，为工程应用提供了分析计算的理论依据。

2 双剪统一强度理论

双剪统一强度理论[5]是一种体现了材料的拉压异性和同性，不同中间主应力效应以及能够适用于不同屈服准则的一种强度理论。其统一表达式为：

$$F = s_1 - \frac{a}{1+b}(bs_2 + s_3) = s_s \qquad \text{当} s_2 \le \frac{s_1 + a s_3}{1+a}$$
$$F' = \frac{1}{1+b}(s_1 + bs_2) - a s_3 = s_s \qquad \text{当} s_2 \ge \frac{s_1 + a s_3}{1+a} \tag{1}$$

图 1 双剪统一强度理论在 p 平面上的屈服极限线图

Fig.1 Yielding limit curves of twin shear unified strength theory in π plane

式中：$b(0 \le b \le 1)$为反映中间主应力的系数。当它取不同的值时，双剪统一强度理论就成为了不同的强度准则。a 为拉伸极限强度 s_s 与压缩极限强度 s_c 之比。当 a =1，b=0、0.5 和 1 时，可分别得到：Tresca 屈服准则，线性逼近的 Mises 屈服准则和双剪应力屈服准则。双剪统一强度理论在 p 平面上的屈服线图形如图 1 所示。

3 厚壁圆筒的极限分析

设厚壁圆筒的内、外半径分别为 R_0、R，受均匀内压力 q 及轴向载荷 P 的联合作用；其中轴向载荷 P 为独立载荷，并设内半径较小，忽略由内压力 q 引起三维应力大小关系的变化。于是，可得空间轴对称问题的应力平衡微分方程如下：

$$r\frac{\partial s_r}{\partial r} + s_r - s_q = 0 \tag{2}$$

由于轴力允许是拉力或压力，s_r 始终小于或等于 0，而 s_q 始终大于 0，则 s_z, s_q 和 s_r 按大小排列次序有下列五种情况：$s_z \ge s_q \ge s_r$，$s_q \ge s_z \ge s_r$、$s_q \ge s_r \ge s_z$ 三种情况以及介于 $s_z \ge s_q \ge s_r$ 与 $s_q \ge s_z \ge s_r$ 之间和介于 $s_q \ge s_z \ge s_r$ 与 $s_q \ge s_r \ge s_z$ 之间二种情况。

3.1 求屈服应力函数及其极限载荷

把双剪统一强度理论与应力平衡方程联立，并且利用边界条件，即可求得以上五种情况下，半径为 r 的任意圆柱面上屈服应力函数及其极限载荷之间的关系式如下：

(1) 在 $s_z \ge s_q \ge s_r$ 的情况下，如果 $s_q \le \frac{s_z + a s_r}{1+a}$，屈服应力函数及其极限载荷为：

$$\begin{cases} s_r = \frac{1}{a}(s_z - s_s)[1 - (\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b}{b}}] - q(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b}{b}} \\ s_q = [\frac{1+b}{ab}(s_z - s_s) + \frac{1}{b}q](\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b}{b}} \end{cases} \tag{3}$$

$$q = \frac{1}{a}(s_z - s_s)(b^{\frac{1+b}{b}} - 1) \tag{4}$$

其中：$b = R/R_0$。如果 $s_q \ge \frac{s_z + a s_r}{1+a}$，屈服应力函数及其极限载荷为：

$$\begin{cases} s_r = \frac{1}{b-(1+b)a}[(1+b)s_s - s_z][1 \\ -(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}}] - q(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}} \\ s_q = \frac{1}{b}[(1+b)s_s - s_z] - \frac{a(1+b)}{b}\{[(1+b)s_s \\ -s_z][1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}}] - q(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}}\} \end{cases} \tag{5}$$

$$q=\frac{1}{a(1+b)A}[A(1+b)s_s-P](b^{\frac{b-a(1+b)}{b}}-1) \tag{6}$$

(2) 在 $s_q\ge s_z\ge s_r$ 的条件下，如果 $s_z\le\frac{s_q+as_r}{1+a}$，屈服应力函数及其极限载荷为：

$$\begin{cases} s_r=\frac{1+b}{1+b-a}(s_s+\frac{ab}{1+b}s_z)[1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-a}{1+b}}] \\ -q(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-a}{1+b}} \\ s_q=(s_s+\frac{ab}{1+b}s_z)\{1+\frac{a}{1+b-a}[1 \\ -(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-a}{1+b}}]\}-\frac{a}{1+b}q(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-a}{1+b}} \end{cases} \tag{7}$$

$$q=\frac{b+1}{(b+1-a)A}(s_sA+\frac{ab}{1+b}P)(b^{\frac{1+b-a}{1+b}}-1) \tag{8}$$

如果 $s_z\ge\frac{s_q+as_r}{1+a}$，屈服应力函数及其极限载荷为：

$$\begin{cases} s_r=\frac{1}{1-a-ab}[(1+b)s_s-bs_z][1-(\frac{R_0}{r})^{1-a-ab}] \\ -q(\frac{R_0}{r})^{1-a-ab} \\ s_q=[(1+b)s_s-bs_z]+\frac{a(1+b)}{1-a-ab}[(1+b)s_s-bs_z] \\ [1-(\frac{R_0}{r})^{1-a-ab}]-a(1+b)q(\frac{R_0}{r})^{1-a-ab} \end{cases} \tag{9}$$

$$q=\frac{1}{(1-a-ab)A}[(1+b)As_s-bP](b^{1-a-ab}-1) \tag{10}$$

(3) 在介于 $s_z\ge s_q\ge s_r$ 与 $s_q\ge s_z\ge s_r$ 之间的情况下，当 $r\le r_0$ 时，则 $s_z\ge s_q\ge s_r$，只有：$s_q\ge\frac{s_z+as_r}{1+b}$ 成立，$s_q\le\frac{s_z+as_r}{1+b}$ 不成立。屈服应力函数为：

$$\begin{cases} s_r=\frac{1}{b-a(1+b)}[(1+b)s_s-s_z] \\ [1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}}]-q(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}} \\ s_q=\frac{1}{b}[(1+b)s_s-s_z]+\frac{a(1+b)}{b} \\ \{\frac{1}{b-a(1+b)}[(1+b)s_s-s_z][1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}}] \\ -q(\frac{R_0}{r})^{\frac{b-a(1+b)}{b}}\} \end{cases} \tag{11}$$

当 $r\ge r_0$ 时,则 $s_q\ge s_z\ge s_r$,也只有 $s_z\ge\frac{s_q+as_r}{1+b}$ 成立，而 $s_z\le\frac{s_q+as_r}{1+b}$ 不成立。屈服应力函数为：

$$\begin{cases} s_r=\frac{1}{1-a-ab}[(1+b)s_s-bs_z][1 \\ -(\frac{r_0}{r})^{(1-a-ab)}]-\frac{1}{a}(s_s-s_z)(\frac{r_0}{r})^{(1-a-ab)} \\ s_q=[(1+b)s_s-bs_z]+a(1+b) \\ \{\frac{1}{1-a-ab}[(1+b)s_s-bs_z] \\ [1-(\frac{r_0}{r})^{(1-a-ab)}]-\frac{1}{a}(s_s-s_z)(\frac{r_0}{r})^{(1-a-ab)}\} \end{cases} \tag{12}$$

极限载荷 q、P 之间的关系为：

$$\begin{aligned} q=b^{\frac{b-a(1+b)}{b}}&\frac{b}{a(1+b)}\{\frac{1}{b-a(1+b)}[(1+b)s_s-s_z]-s_z\} \\ &\{\frac{a[(1+b)s_s-bs_z]}{a[(1+b)s_s-bs_z]+(1-a-ab)(s_s-s_z)}\}^{\frac{b-a(1+b)}{[1-a(1+b)]b}} \\ &-\frac{1}{[b-a(1+b)]}[(1+b)s_s-s_z] \end{aligned} \tag{13}$$

(4) 在 $s_q\ge s_r\ge s_z$ 的情况下，如果 $s_r\le\frac{s_q+as_z}{1+a}$，屈服应力函数以及极限载荷 q、P 之间的关系为：

$$\begin{cases} s_r=\frac{1+b}{1+b-ab}(s_s+\frac{a}{1+b}s_z)[1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-ab}{1+b}}] \\ -q(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-ab}{1+b}} \\ s_q=(s_s+\frac{a}{1+b}s_z)+\frac{1+b}{1+b-ab}(s_s+\frac{a}{1+b}s_z) \\ [1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-ab}{1+b}}]-\frac{a}{1+b}q(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-ab}{1+b}} \end{cases} \tag{14}$$

$$q=\frac{1+b}{A(1+b-ab)}(As_s+\frac{a}{1+b}P)(b^{\frac{1+b-ab}{1+b}}-1) \tag{15}$$

若 $s_r\ge\frac{s_q+as_z}{1+a}$，屈服应力函数以及极限载荷 q、P 之间的关系为：

$$\begin{cases} s_r=(s_s+as_z)[1-(\frac{R_0}{r})^{1+b}]-q(\frac{R_0}{r})^{1+b} \\ s_q=(1+b)(s_s+as_z)+b(s_s+as_z) \\ [1-(\frac{R_0}{r})^{1+b}]-bq(\frac{R_0}{r})^{1+b} \end{cases} \tag{16}$$

$$q=\frac{As_s+aP}{A}(b^{1+b}-1) \tag{17}$$

(5) 在介于 $s_q\ge s_z\ge s_r$ 与 $s_q\ge s_r\ge s_z$ 之间的情况下，当 $r<r_0$ 时，则 $s_q\ge s_z\ge s_r$，此时只有

$s_z \le \frac{s_q + a s_r}{1+a}$ 成立，而 $s_z \ge \frac{s_q + a s_r}{1+a}$ 的条件不成立。按 $s_z \le \frac{s_q + a s_r}{1+a}$，可求得应力函数为：

$$\begin{cases} s_r = \frac{1+b}{1+b-a}(s_s + \frac{ab}{1+b}s_z)[1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-a}{1+b}}] \\ -q(\frac{R_0}{r})^{\frac{b+1-a}{1+b}} \\ s_q = (s_s + \frac{ab}{1+b}s_z) + \frac{a}{1+b}\{\frac{1+b}{1+b-a} \\ (s_s + \frac{ab}{1+b}s_z)[1-(\frac{R_0}{r})^{\frac{1+b-a}{1+b}}] - q(\frac{R_0}{r})^{\frac{b+1-a}{1+b}}\} \end{cases} \tag{18}$$

而在 $r > r_0$ 时，$s_q \ge s_r \ge s_z$，此时，按 $s_z \le \frac{s_q + a s_r}{1+a}$ 可求得应力函数为：

$$\begin{cases} s_r = \frac{1+b}{1+b-ab}(s_s + \frac{a}{1+b}s_z) + \frac{1}{1+b-ab} \\ \{[(1+b)(1-a)-ab]s_z - (1+b)s_s\}(\frac{r_0}{r})^{\frac{1+b-ab}{1+b}} \\ s_q = (s_s + \frac{a}{1+b}s_z) + \frac{ab}{1+b}\frac{1+b}{1+b-ab} \\ (s_s + \frac{a}{1+b}s_z) + \frac{ab}{1+b}\frac{1}{1+b-ab} \\ \{[(1+b)(1-a)-ab]s_z - (1+b)s_s\}(\frac{r_0}{r})^{\frac{1+b-ab}{1+b}} \end{cases} \tag{19}$$

极限载荷 q、P 之间的关系为：

$$q = [\frac{1+b}{1+b-a}(s_s + \frac{ab}{1+b}s_z) - s_z](\frac{R}{R_0})^{\frac{b+1-a}{1+b}}$$
$$[\frac{s_s + \frac{a}{1+b}s_z}{s_s - (a-1)s_z}]^{\frac{1}{(1+b-ab)(b+1-a)}} - \frac{1+b}{1+b-a}(s_s + \frac{ab}{1+b}s_z) \tag{20}$$

以上推导了屈服面到达半径为 r 的某一圆柱面时，周向应力 s_q 和径向应力 s_r 的计算式：(3)、(5)、(7)、(9)、(11)、(12)、(14)、(16)、(18)和(19)式。由上述公式可知：周向应力 s_q 和径向应力 s_r 与 r_0/r (或 R_0/r)成幂函数关系。

2.2 厚壁圆筒相对塑性极限载荷线图

2.2.1 厚壁圆筒的相对极限载荷之间的关系式

为了更直观地表明塑性极限载荷 q、P 之间的关系以及分布情况，将塑性极限载荷改变成无量纲的形式：取 $h = q/s_s$，$x = P/(As_s)$；同时，为了便于分析，取 $a = 1, b = 0.5$ 分别代入(4)、(6)、(8)、(10)、(15)、(17)、(13)和(20)等式，可得一组关于 x，h 的方程，如下面的(21)式~(28)式：

$$h = (x-1)(b^3 - 1) \tag{21}$$

$$h = (x - \frac{2}{3})(b^{-2} - 1) \tag{22}$$

$$h = 3(1 + \frac{1}{3}x)(b^{\frac{1}{3}} - 1) \tag{23}$$

$$h = (-2)(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x)(b^{-\frac{1}{2}} - 1) \tag{24}$$

$$h = \frac{3}{2}(1 + \frac{2}{3}x)(b^{\frac{2}{3}} - 1) \tag{25}$$

$$h = (1+x)(b^{\frac{3}{2}} - 1) \tag{26}$$

$$h = \frac{1}{2}[3 - 2x - \frac{1}{16}b^{(-2)}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x)^4] \tag{27}$$

$$h = 3b^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{2}{3}x)^{\frac{1}{2}} - (3+x) \tag{28}$$

2.2.2 厚壁圆筒的相对塑性极限载荷线图

在 h、x 直角坐标系下，分别绘出每个方程所对应的曲线(取 β=2)，就可获得其屈服状态下，相对极限载荷 x、h 线图，如图 2 所示。图中所示的曲线 1、2、3、4、5 和 6 分别代表方程(21)、(27)、(23)、(28)、(25)和(26)的曲线。基于此极限应力线图，根据 q、P 的大小，就能判断厚壁圆筒是否达到屈服极限状态。当极限载荷 P、q 所对应的相对极限载荷 x、h 的坐标点落在封闭区域内时，则表示厚壁圆筒没有整体达到屈服极限应力状态；当 x、h 的坐标点落在曲线上或封闭区域外时，则表示厚壁圆筒已经整体达到屈服极限应力状态。在极限应力线图中，2 所表示的曲线是四次曲线；4 所表示的曲线是二次曲线，其余曲线均为直线。

图 2　极限载荷线图

Fig.2　The curve of limit loading

4　不同屈服准则的极限载荷线图

文[1]按 Mises、Tresca 等屈服条件分析了在内压力和轴力联合作用下的厚壁圆筒的极限载荷，并绘制了极限载荷线图。现在按在 Mises、Tresca 屈服条件下的极限载荷的参数方程[1]，绘制出线图，如图 3。由图 3 可知：应用双剪统一强度理论求得在线性逼近的 Mises 屈服条件下极限载荷线图与在 Mises、Tresca 屈服条件下的极限载荷线图之间相互重叠、交叉，但没有包容关系。

图 3 极限载荷线图的比较

Fig.3 The contrast of different limit loading curves

5 结论

(1) 利用双剪统一强度理论，在复杂应力状态下，考虑第二主应力以及材料的拉压异性和同性对材料屈服的影响，获得了半径为 r 的任意圆柱面上屈服应力函数及其极限载荷之间的关系式。应用这些公式时应注意内压力引起的轴向力较小，不至于改变三维应力之间的大小关系。

(2) 厚壁圆筒相对塑性极限载荷线图形成了一个外凸、封闭的图形。若 $h=0$，$x<0$，则整个厚壁圆筒达到塑性极限状态时，x 为-1；如果 $x>0$，则整个厚壁圆筒达到塑性极限状态时，x 为 1。若 $x=0$ 时，则整个厚壁圆筒达到塑性极限状态时，h 为 0.7798。这与材料屈服时的情况相符合。若 $x>0$，x、h 的坐标点位于图 2 中的 ABC 区域内时，虽然 $x>1$，但整个厚壁圆筒并未进入塑性极限状态。即在此区域内，h 的增大，x 可以大于 1。

(3) 基于双剪统一强度理论，在线性逼近的 Mises 屈服条件下的极限载荷线图与在 Mises、Tresca 屈服条件下的极限载荷线图相互重叠、交叉，但是，没有包容关系。

参考文献：

[1] 黄文彬，曾国平. 应用双剪应力屈服准则求解某些塑性力学问题[J]. 力学学报, 1989, 21(2): 249-256.
Huang Wenbin, Zeng Guoping. Solving some plastic problems[J]. Acta Mechanica, 1989, 21(4): 249-256. (in Chinese)

[2] 李跃明. 用一个新屈服准则进行弹塑性分析[J]. 机械强度, 1988, 10(3): 70-74.
Li Yueming. Elastoplastic analysis with a new yielding criterion [J]. Mechanical Strength, 1988, 10(3): 70-74. (in Chinese)

[3] 徐秉业，编. 塑性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.
Xu Bingye. Plastic Mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1988. (in Chinese)

[4] 赵均海，张永强，廖红建，尹征南. 用统一强度理论求厚壁圆筒和厚壁球壳的极限解[J]. 应用力学学报, 2000, 17(1): 157-161.
Zhao Junhai, Zhang Yongqiang, Liao Hongjian, Yin Zhengnan. The limit solusions of thick-walled tubes and thick-walled spherical shells with twin shear unified strength theory [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(1): 157-161. (in Chinese)

[5] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1-10.
Yu Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. Journal of Geomaterial Engineering, 1994, 16(2): 1-10. (in Chinese)

[6] 魏雪英，俞茂宏，王延斌，徐栓强. 考虑材料拉压异性的固支圆板塑性极限统一解[J]. 力学季刊, 2001, 22(1): 78-83.
Wei Xueying, Yu Maohong, Wang Yanbin, Xu Shuanqiang. Unified plastic limit of clamped circular plate with strength differential effect in tension and compression[J]. Chinese Quaterly of Mechanics, 2001, 22(1): 78-83.

[7] 俞茂宏，何丽南，刘春阳. 广义双剪应力屈服准则及其推广[J]. 科学通报, 1992, 37(2): 182-185.
Yu Maohong, He Linan, Liu Chunyang. Generalized twin shear stress yield criterion and its generalization[J]. Chinese Science Bulletin, 1992, 37(2): 182-185.

[8] 俞茂宏，何丽南，宋凌宇. 双剪强度理论及其推广[J]. 中国科学(A 辑), 1985, 28(12): 1113-1120.
Yu Maohong, He Linan, Song Lingyu. Twin shear stress strength theory and its generalization[J]. Science in China (Series A), 1985, 28(12): 1113-1120. (in Chinese)