

面积坐标法构造含转角自由度的四结点膜元

陈晓明, 龙驭球, 须 寅

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 以四边形面积坐标作为工具, 构造了两个含转角自由度的广义协调四边形单元 AQ4^e 和 AQ4^e I。它们通过强式分片检验, 与同类单元相比, 具有很高的计算精度, 能消除梯形闭锁现象, 有很强的抗网格畸变的能力。

关键词: 有限元; 四边形面积坐标; 广义协调; 转角自由度

中图分类号: TU311 **文献标识码:** A

CONSTRUCTION OF QUADRILATERAL MEMBRANE ELEMENTS WITH DRILLING DOF USING AREA COORDINATE METHOD

CHEN Xiao-ming, LONG Yu-qiu, XU Yin

(Department of civil engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Two generalized conforming quadrilateral membrane elements with drilling degree-of-freedom named AQ4^e and AQ4^e I are developed. In the formulation, the quadrilateral area coordinates are used instead of the isoparametric coordinates. Both elements pass the strict patch test and their convergence is assured. Numerical examples show that the proposed elements exhibit better efficiency and accuracy than other elements. Both elements are insensitive to mesh distortion and lock-free for the MacNeal test problem of trapezoidal locking.

Key words: finite element; quadrilateral area coordinate; generalized conforming; drilling degree of freedom

1 引言

文献[1][2]建立了四边形面积坐标的系统理论, 为构造四边形单元提供了新工具和新途径。文献[3]中采用增加转角自由度的方法, 在四节点等参元的基础上增加转角位移场构造了一个平面单元 GQ12, 取得了较高的计算精度。

文献[4]在四边形面积坐标下, 采用优选的协调条件构造了一个保证收敛的四边形二次单元 ACGQ4。本文首先在 ACGQ4 单元的基础上采用文

献[3]中转角自由度的定义模式, 利用面积坐标构造转角位移场, 构造出含转角自由度的四节点平面单元 AQ4^e; 其次, 在 AQ4^e 元的基础上, 引入内部自由度, 构造出含内参的单元 AQ4^e I。

2 单元 AQ4^e 的推导

考虑四结点四边形单元, 并将角点转角也看作单元的自由度。单元结点位移向量为:

$$\{q\}^e = [\{q_1\}^T \quad \{q_2\}^T \quad \{q_3\}^T \quad \{q_4\}^T]^T$$

收稿日期: 2003-02-17; 修改日期: 2003-06-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272063); 高等学校博士点基金资助项目; 清华大学基础研究基金资助项目(JC2002003)

作者简介: 陈晓明(1973), 男, 山东莱西人, 博士研究生, 从事计算力学研究;

龙驭球(1926), 男, 湖南安化人, 中国工程院院士, 工学学士, 从事结构工程研究; (E-mail: Longyq@mail. Tsinghua.edu.cn)

须 寅(1962), 男, 江苏无锡人, 副教授, 工学博士, 从事结构工程研究

其中每个角点的自由度为

$$\{q_i\} = [u_i \quad v_i \quad q_i]^T \quad (i=1,2,3,4)$$

式中 u_i 和 v_i 是角点线位移, 而 q_i 是角点附加刚体转角。

单元位移场由两部分组成

$$u = u^0 + u^q \quad (1)$$

右边第一项是由角点线自由度确定的位移场, 第二项是由角点平面内刚体转角自由度产生的附加位移场。

(1) 位移场 u^0 的确定

位移场 u^0 是由角点线自由度引起的, 可利用[4]

$$P = \frac{3(L_3 - L_1)(L_4 - L_2) - (g_2 - g_3)(L_3 - L_1) - (g_1 - g_2)(L_4 - L_2) - \frac{1}{2}(g_2g_4 - g_1g_3)}{1 + g_1g_3 + g_2g_4} \quad (4)$$

(2) 位移场 u_q 的确定

位移场 u_q 是由角点转角自由度 q_i ($i=1,2,3,4$)

引起的单元内部位移场, 可按下列步骤确定。

首先, 根据角点转角 q_i 来确定单元各边的边界位移。边界位移采用三次插值。边 ij 的位移用其两端转角 q_i 和 q_j 表示如下:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{q12} \\ \bar{v}_{q12} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -b_4 \\ -c_4 \end{Bmatrix} L_1 L_3 \left(\frac{1}{g_1 g_2^2} L_1 q_1 - \frac{1}{g_1^2 g_2} L_3 q_2 \right) \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_{q23} \\ \bar{v}_{q23} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -b_1 \\ -c_1 \end{Bmatrix} L_2 L_4 \left(\frac{1}{g_2 g_3^2} L_2 q_2 - \frac{1}{g_2^2 g_3} L_4 q_3 \right) \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_{q34} \\ \bar{v}_{q34} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -b_2 \\ -c_2 \end{Bmatrix} L_1 L_3 \left(\frac{1}{g_3 g_4^2} L_3 q_3 - \frac{1}{g_3^2 g_4} L_1 q_4 \right) \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_{q41} \\ \bar{v}_{q41} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -b_3 \\ -c_3 \end{Bmatrix} L_2 L_4 \left(\frac{1}{g_4 g_1^2} L_4 q_4 - \frac{1}{g_4^2 g_1} L_2 q_1 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $b_i = y_{i+1} - y_{i+2}$, $c_i = x_{i+2} - x_{i+1}$

其次, 根据上式的边界位移来确定由角点转角 q_i 引起的单元内部位移场 u_q 。先设 u_q 和 v_q 分别为用四边形面积坐标 L_i ($i=1,2,3,4$) 表示的完全二次式:

中 ACGQ4 元的结果用四边形面积坐标表示如下:

$$\begin{aligned} u^0 &= \sum_{i=1}^4 N_i^0 u_i \\ v^0 &= \sum_{i=1}^4 N_i^0 v_i \end{aligned} \quad (2)$$

其中形函数 N_i^0 为

$$N_i^0 = -\frac{1}{2} g_{i+2} + L_i + L_{i+1} + x_i h_i g_{i+2} P \quad (3)$$

($i=1,2,3,4$)

式中

$$\begin{aligned} u_q &= a_1 + a_2(L_3 - L_1) + a_3(L_4 - L_2) \\ &\quad + a_4(L_3 - L_1)(L_4 - L_2) + a_5 L_1 L_3 + a_6 L_2 L_4 \\ v_q &= b_1 + b_2(L_3 - L_1) + b_3(L_4 - L_2) \\ &\quad + b_4(L_3 - L_1)(L_4 - L_2) + b_5 L_1 L_3 + b_6 L_2 L_4 \end{aligned} \quad (6)$$

对 u_q 引入下列 6 个广义协调条件: (对 v_q 也仿

此进行)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (u_q^i - \bar{u}_q^i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 x_i h_i (u_q^i - \bar{u}_q^i) &= 0 \\ \int_{l_{ij}} (u_q - \bar{u}_q) d\bar{s} &= 0 \quad (ij=12,23,34,41) \end{aligned} \quad (7)$$

将式(5)和式(6)代入上式, 得:

$$\begin{aligned} [L]\{\hat{a}\} &= [T]\{q^q\} \\ [L]\{\hat{a}\} &= [T']\{q^q\} \end{aligned} \quad (8)$$

由此解得

$$\begin{aligned} \{\hat{a}\} &= [L]^{-1}[T]\{q^q\} \\ \{\hat{a}\} &= [L]^{-1}[T']\{q^q\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$[L] = \begin{bmatrix} 4 & 2(g_1 - g_2) & 2(g_2 - g_3) & 2(g_2 g_4 - g_1 g_3) & 0 & 0 \\ 0 & 2(g_3 - g_2) & 2(g_2 - g_1) & 2(g_2 g_4 + g_1 g_3) & 0 & 0 \\ 1 & \frac{g_4 + g_1}{2} & \frac{g_2 - g_3}{2} & \frac{g_2(2g_4 + g_1) - g_3(g_4 + 2g_1)}{6} & 0 & \frac{g_2 g_3}{6} \\ 1 & \frac{g_4 - g_3}{2} & \frac{g_1 + g_2}{2} & \frac{g_4(2g_2 + g_1) - g_3(g_2 + 2g_1)}{6} & \frac{g_3 g_4}{6} & 0 \\ 1 & \frac{-g_2 - g_3}{2} & \frac{g_1 - g_4}{2} & \frac{g_4(2g_2 + g_3) - g_1(g_2 + 2g_3)}{6} & 0 & \frac{g_1 g_4}{6} \\ 1 & \frac{g_1 - g_2}{2} & \frac{-g_3 - g_4}{2} & \frac{g_2(2g_4 + g_3) - g_1(g_4 + 2g_3)}{6} & \frac{g_1 g_2}{6} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[T] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & 0 & -b_3 \\ -b_4 & b_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[T'] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 \\ c_3 & 0 & 0 & -c_3 \\ -c_4 & c_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\hat{a}\} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T$$

$$\{\hat{b}\} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6]^T$$

$$\{q^q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$$

另设

$$[G] = [L]^{-1}[T] \quad (12)$$

$$[G'] = [L']^{-1}[T']$$

最后, 得

$$u_q = \sum_{i=1}^4 N_{uqi} q_i \quad (13)$$

$$v_q = \sum_{i=1}^4 N_{vqi} q_i$$

其中形函数为

$$N_{uqi} = G_{1i} + G_{2i}(L_3 - L_1) + G_{3i}(L_4 - L_2) + G_{4i}(L_3 - L_1)(L_4 - L_2) + G_{5i}L_1L_3 + G_{6i}L_2L_4$$

$$N_{vqi} = G'_{1i} + G'_{2i}(L_3 - L_1) + G'_{3i}(L_4 - L_2) + G'_{4i}(L_3 - L_1)(L_4 - L_2) + G'_{5i}L_1L_3 + G'_{6i}L_2L_4 \quad (14)$$

$$(i=1,2,3,4)$$

(3) 单元位移与刚度矩阵

叠加 u^0 和 u_q , 即得单元位移:

$$\{u\} = \{u_0\} + \{u_q\} = [N]\{q\}^e = \sum_{i=1}^4 [N_i]\{q_i\}^e \quad (15)$$

其中

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (16)$$

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i^0 & 0 & N_{uqi} \\ 0 & N_i^0 & N_{vqi} \end{bmatrix}$$

单元的应变为:

$$\{\hat{a}\} = [B_q]\{q\}^e \quad (17)$$

其中

$$[B_q] = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^0}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{uqi}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i^0}{\partial y} & \frac{\partial N_{vqi}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^0}{\partial y} & \frac{\partial N_i^0}{\partial x} & \frac{\partial N_{uqi}}{\partial y} + \frac{\partial N_{vqi}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (18)$$

AQ4 单元刚度矩阵表示为:

$$[k_{qq}] = \iint_A [B_q]^T [D] [B_q] t dA \quad (19)$$

3 单元 AQ4 的推导

在 AQ4 元的基础上, 引入内部自由度, 导出含内参的新单元 AQ4 $\bar{l}$ 。

内部自由度有关的位移先设为:

$$u_l = a_1 + a_2(L_3 - L_1) + a_3(L_4 - L_2) + a_4L_1L_3 + l_1L_2L_4 + l_2(L_3 - L_1)(L_4 - L_2)$$

$$v_l = b_1 + b_2(L_3 - L_1) + b_3(L_4 - L_2) + b_4L_1L_3 + l'_1L_2L_4 + l'_2(L_3 - L_1)(L_4 - L_2) \quad (20)$$

然后对 u_l 和 v_l 分别引入与零边界位移保持广义协调的四个边协调条件:

$$\int_{l_{ij}} \{u_l\} ds = 0 \quad (21)$$

最后得到

$$u_l = l_1N_{l1} + l_2N_{l2} \quad (22)$$

$$v_l = l'_1N_{l1} + l'_2N_{l2}$$

其中 l_1, l'_1, l_2, l'_2 是四个内参, N_{l1} 和 N_{l2} 是内参形函数:

$$N_{l1} = \frac{(6g_1g_2g_3g_4 - g_1g_3 - g_2g_4)}{6(1 - g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{g_1 - g_2}{6}(L_3 - L_1) + \frac{(g_1 - g_4)(g_1g_4 + g_2g_3)}{6(1 - g_1g_4 - g_2g_3)}(L_4 - L_2) + \frac{g_1g_4 + g_2g_3}{1 - g_1g_4 - g_2g_3}L_1L_3 + L_2L_4$$

$$N_{l2} = \frac{1}{3}(g_3 - g_2)(L_3 - L_1) - 2(g_1 - g_2)(L_4 - L_2) + (L_3 - L_1)(L_4 - L_2) \quad (23)$$

取 N_{l1} 作为 AQ4 $\bar{l}$ 元最后的内参形函数, 则最终的内参位移式可以表示为

$$u_l = N_l \bar{e} \quad (24)$$

其中

$$\bar{e} = [l_1 \ l'_1]^T$$

$$N_l = \begin{bmatrix} N_{l1} & 0 \\ 0 & N_{l1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

由内参位移 u_l 可导出内参应变

$$\dot{a}_l = B_l \ddot{e} \quad (26)$$

对内参 $\{\ddot{e}\}$ 进行凝聚, 最后得到单元 AQ4è l 刚

度矩阵:

$$[k]^e = [k_{qq}] - [k_{lq}]^T [k_{ll}]^{-1} [k_{lq}] \quad (27)$$

其中

$$[k_{qq}] = \iint [B_q]^T [D] [B_q] t dA$$

$$[k_{ll}] = \iint [B_l]^T [D] [B_l] t dA$$

$$[k_{lq}] = \iint [B_l]^T [D] [B_q] t dA$$

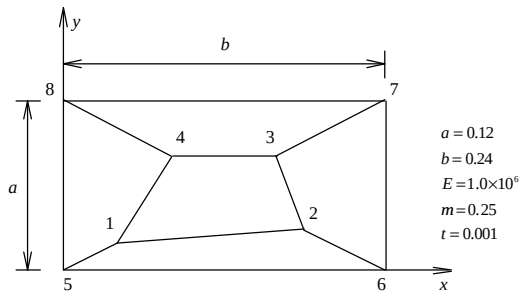


图 1 常应力分片检验

Fig.1 Patch test of constant stress

4 数值算例

例 1: 分片检验: 对图 1 所示网格进行常应力下的分片检验, 计算结果与精确解符合, 表明这个单元通过强式分片检验。

例 2: Cook 问题

图 2 是一不规则悬臂短梁在端部受剪问题(即 Cook 问题)。图示为 2×2 网格

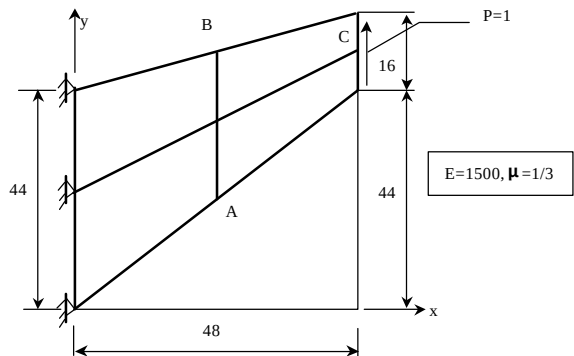


图 2 Cook 梁

Fig.2 Cook's beam

表 1 Cook 问题计算结果(图 2)

Table 1 Results of Cook problem(Fig.2)

单元	V_c			S_{Amax}			S_{Bmin}		
	2×2	4×4	8×8	2×2	4×4	8×8	2×2	4×4	8×8
Q4	11.80	18.29	22.08	0.1217	0.1873	0.2242	-0.0960	-0.1524	-0.1869
Q6 ^[5]	21.61	23.04	23.69	0.1930	0.2237	0.2345	-0.1783	-0.1867	-0.1992
D-type ^[6]	20.68	22.98	23.63	-	-	-	-	-	-
GQ12	20.89	23.06	23.67	0.1802	0.2209	0.2315	-0.1784	-0.1950	-0.2007
GQ12M8	22.49	23.44	23.78	0.2083	0.2338	0.2361	-0.2216	-0.2045	-0.2028
AQ4 è	21.00	23.05	24.28	0.1917	0.2241	0.2377	-0.1877	-0.1939	-0.2060
AQ4è l	22.91	23.66	24.18	0.2498	0.2338	0.2358	-0.1729	-0.1896	-0.2018

例 3: 采用不规则网格计算悬臂梁(图 3)。考虑两种荷载情况: 载荷 1 作用下的纯弯曲; 载荷 2 作用下的横向弯曲($E=1500$, $\mu=0.25$)。

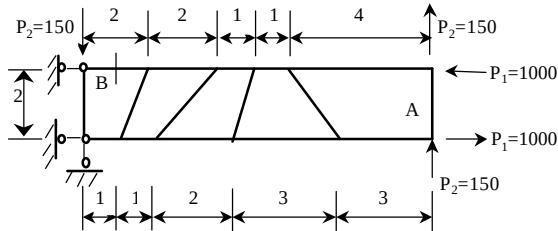


图 3 5 单元悬臂梁

Fig.3 Cantilever beam modeled with five elements

例 4: 含 4 个四边形的梁(图 4)

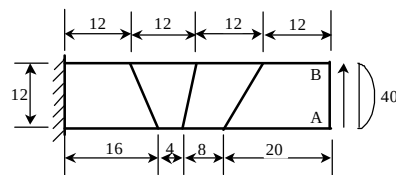


图 4 不规则网格悬臂梁(4 单元)

Fig.4 Cantilever beam modeled with four irregular elements

表 2 悬臂梁弯曲问题计算结果(图 3)

Table 2 Results of bending cantilever beam(Fig.3)

单元类型	荷载 1		荷载 2	
	位移 V_A	应力 s_{XB}	位移 V_A	应力 s_{XB}
Q4	45.7	-1761	50.7	-2448
Q6	98.4	-2428	100.4	-3354
GQ12	95.5	-2989	96.0	-4096
GQ12M8	100	-3000.5	101.0	-4147
AQ4 è	97.7	-2947	98.9	-3931
AQ4è l	100	-2999	101.0	-3907
精确解	100	-3000	102.6	-4050

表 3 4 单元悬臂梁计算结果(图 4)

Table 3 Results of cantilever beam modeled with four elements(Fig.4)

单元类型	梁端挠度绝对值			梁端挠度百分值%		
	A 点	B 点	平均值	A 点	B 点	平均值
D-type	-	-	0.3065	-	-	0.861
Q4S ^[7]	-	-	0.2978	-	-	0.837
Groenwold1995 ^[8]	-	-	0.3086	-	-	0.867
GQ12	0.3337	0.3324	0.3331	0.938	0.934	0.936
GQ12M	0.3420	0.3404	0.3412	0.961	0.957	0.959
AQ4 è	0.3376	0.3354	0.3365	0.949	0.943	0.946
AQ4è l	0.3497	0.3460	0.3479	0.983	0.972	0.978
参考值	0.3558			1.000		

例 5 :MacNeal 梁的计算($E=10^7, \mu=0.3, t=0.1$, 图 5)

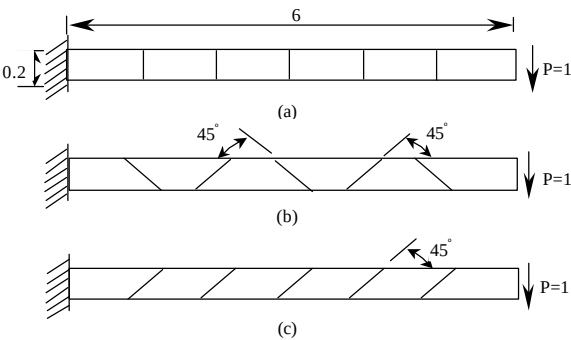


图 5 MacNeal 梁

Fig.5 MacNeal' s beam

例 6：薄曲梁弯曲问题(图 6)

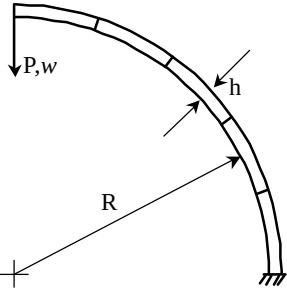


图 6 薄曲梁弯曲

Fig.6 Bending of thin curving beam

表 4 MacNeal 梁问题计算结果(图 5)

Table 4 Results of MacNeal' s beam(Fig.5)

单元	(a)网格	(b)网格	(c)网格
AQR8 ^[9]	0.993	0.986	0.977
Q4S	0.993	0.986	0.988
GQ12	0.904	0.767	0.860
GQ12M	0.977	0.884	0.923
GQ12M8	0.993	0.989	0.988
AQ4è	0.904	0.906	0.867
AQ4è l	0.993	0.988	0.984
标准值	-0.1081		

表 5 梁端挠度 w/p (图 6)

Table 5 Deflection at the tip of the beam w/p (Fig.6)

h/R	Q4	QM6 ^[10]	QUAD4 ^[11]	GQ12	GQ12M	AQ4 è	AQ4è l	精确解
0.03	0.024	0.339	0.615	0.670	0.897	0.712	1.000	1.000
0.006	0.001	0.022	0.163	0.612	0.896	0.645	1.008	1.000

例 7：网格畸变测试(图 7)

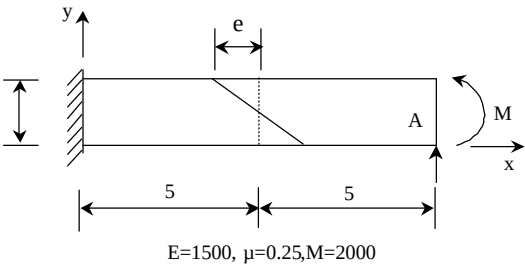


图 7 带畸变参数 e 的含两个单元的梁

Fig.7 Two-element beam with distorted parameter e

表 6 网格畸变测试计算结果(图 7)

Table 6 Test results of mesh distortion(Fig.7)

e	0	0.5	1	2	3	4	4.9
Q4	28.0	21.0	14.1	9.7	8.3	7.2	6.2
Q8	100	100	99.3	89.3	59.7	31.6	19.0
QM6	100	80.9	62.7	54.4	53.6	51.2	46.8
P-S ^[12]	100	81.0	62.9	55.0	54.7	53.1	49.8
GQ12	100	97.9	86.3	48.7	24.9	13.3	8.0
GQ12M	100	98.7	93.9	74.1	51.0	33.4	23.3
AQ4 ^è	100	99.9	98.9	99.8	102.0	102.2	100.3
AQ4 ^{è l}	100	100	100	100	100	100	100
精确解	100	100	100	100	100	100	100

5 结论

以上算例表明单元 AQ4^è 元和 AQ4^{è l} 元是两个收敛可靠的单元,通过强式分片检验,与其它四节点单元相比具有较高的计算精度和较好的抗网格畸变能力。

参考文献:

- [1] 龙驭球, 李聚轩, 龙志飞, 岑松. 四边形单元面积坐标理论[J]. 工程力学, 1997, 14(3):1-11.
Long Yuqiu, Li Juxuan, Long Zhifei, Cen Song. Area-coordinate theory for quadrilateral elements [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(3):1-11. (in Chinese)
- [2] 龙志飞, 李聚轩, 岑松, 龙驭球. 四边形单元面积坐标的微分和积分公式 [J]. 工程力学, 1997, 14(3):12-20.
Long Zhifei, Li Juxuan, Cen Song, Long Yuqiu. Differential and integral formulas for area coordinates in quadrilateral element [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(3):12-20. (in Chinese)
- [3] 须寅. 广义协调法及具有旋转自由度的膜元和板壳元研究[D]. 北京:清华大学土木工程系, 1994.
Xu Yin. The generalized conforming approach and the development of the membrane elements with thin plate and shell elements drilling degrees of freedom [D]. Beijing: Civil engineering department of Tsinghua University, 1994. (in Chinese)
- [4] 龙志飞, 陈晓明, 龙驭球. 采用面积坐标的四边形二次膜元[J]. 工程力学, 2001, 18(4):95-101.
Long Zhifei, Chen Xiaoming, Long Yuqiu. Second-order quadrilateral plane element using area coordinates [J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(4):95-101. (in Chinese)
- [5] E L Wilson, R L Taylor, W P Doherty, et al. Incompatible displacement models, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics [C]. In: S J Fennes et al., eds, Academic Press, New York, 1973. 43-57.
- [6] A Ibrahimovic, R L Taylor, E L Wilson. A robust quadrilateral membrane element with rotational degrees of freedom[J]. Int. J. Num. Meth. Engng., 1990, (30): 445-457.
- [7] R H MacMeal, R L Harder. A refined four-noded membrane element with rotation degrees of freedom [J]. Comput. Struct. 1988, 28(1): 75-84.
- [8] A A Groenwold and N Stander. An efficient 4-node 24 D.O.F. thick shell finite element with 5-point quadrature [J]. Engineering Computations, 1995, (12): 737-747.
- [9] M A Aminpour. An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom[J]. Int. J. Num. Meth. Engng., 1992, (33):19-38.
- [10] R L Taylor, P J Beresford and E L Wilson. A non-conforming element for stress analysis[J]. Int. J. Num. Meth. Engng., 1976, (10): 1211-1219.
- [11] R H MacNeal, R L Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy[J]. Finite Elements in Analysis and Design., 1985, (1): 3-20.
- [12] T H H Pian and K Sumihara. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. Int. J. Num. Meth. Eng., 1984, (20): 1685-1695.