

轴向随动分布载荷作用下简支梁杆的过屈曲

李世荣^{1,2}, 吴 莹¹, 周又和²

(1. 甘肃工业大学理学院, 兰州 730050; 2. 兰州大学力学系, 兰州 730000)

摘 要: 基于可伸长梁的大变形理论, 建立了受沿轴线分布切向随动载荷作用简支梁的弹性过屈曲控制方程。这是一个包含七个未知函数的强非线性常微分方程两点边值问题, 其中将变形后的轴线弧长也作为基本未知量之一。采用打靶法和解析延拓法数值求解所得非线性边值问题, 获得了梁的过屈曲平衡路径和平衡构形。结果表明, 非保守载荷作用梁的平衡路径与保守载荷作用梁的平衡路径有着明显不同。

关键词: 非保守力; 可伸长梁; 打靶法; 过屈曲; 平衡路径

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

1 引言

工程实际中存在大量受非保守力作用的结构或构件。例如, 在有阻尼介质中运动的物体表面所受摩擦力的方向随物体变形而改变。因此, 变形体的表面摩擦力为非保守力。再如, 储油罐内液体的压力, 输送管道中介质的粘滞阻力等都属于非保守力。有关非保守力作用结构变形的较早研究可见 Bolotin 的专著^[1]和 Herrmann 的综述文章^[2]。Leipholtz 在文献[3]中采用 Liapunov 方法分别分析了梁和矩形板结构在切向随动载荷作用下的弹性稳定性问题, 并给出了结构小振幅振动的固有频率与载荷参数的特征关系曲线。武际可^[4]、Vitaliani^[5]、Detinko^[6]等采用有限元法分别计算了端部集中非保守力作用悬臂梁和半圆拱的静态大变形问题, 给出了不同载荷值所对应的平衡构形。上述的理论分析和数值计算, 均采用了轴线不可伸长假设。然而, 关于受沿轴线分布随动切向力作用可伸长梁的非线性稳定性, 或过屈曲分析, 却很少见有文献报道。在这种情况下, 梁上的分布荷载与变形有关, 这就使得描述梁的变形和平衡的微分方程的非线性和耦合程度都大大增强了。本文拟采用可伸长梁(杆)的基本理论^[7-9], 建立任意分布随动载荷作用下梁(杆)的

大变形数学模型, 采用打靶法^[8-11]分别数值求解细长简支梁受沿轴线均匀分布的切向随动荷载作用下的过屈曲问题, 给出相应的静平衡构形和过屈曲平衡路径。

2 问题的控制方程

考虑一长为 l 的简支梁, 受沿轴线均匀分布切向荷载 q 作用(见图 1)。设梁在过屈曲变形过程中, 分布荷载 q 的方向始终与轴线相切, 即为随动载荷。因此, 载荷 q 是非保守的。记梁在未变形时的轴线为 $(x, 0)$, $x \in [0, l]$ 。梁进入过屈曲状态后的轴线为 $(x+u, w)$, 其中 $u(x)$ 和 $w(x)$ 分别为梁变形前轴线上的点在在 x 和 y 方向的位移。假设变形后梁轴线仍在 $x \sim y$ 平面内, 且变形服从平截面假设。由轴线可伸长梁的大变形理论^[7-9]可得下列基本方程:

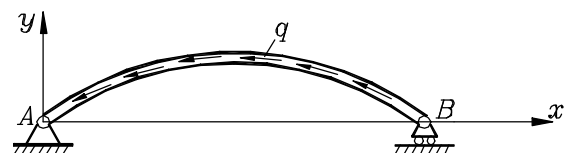


图 1 结构和变形示意图

Fig.1 Schematic diagram of the structure and deformation
几何方程:

收稿日期: 2001-11-20; 修改日期: 2002-01-18

基金项目: 甘肃工业大学学术梯队及特色研究方向重点资助计划基金、国家杰出青年科学基金(1005200)资助项目

作者简介: 李世荣(1957), 男, 教授, 博士生, 主要从事结构非线性分析和数值计算研究;

吴 莹(1967), 女, 副教授, 硕士, 从事固体力学研究;

周又和(1957), 男, 博士, 博士生导师, 长江学者, 主要从事电磁固体力学及力、热、电、磁多场耦合研究

$$\frac{ds}{dx} = L, \quad \frac{du}{dx} = L \cos q - 1, \quad \frac{dw}{dx} = L \sin q \quad (1)$$

物理方程：

$$N = EA(L - 1), \quad M = EI \frac{dq}{dx} \quad (2a,b)$$

平衡方程：

$$\frac{dH}{dx} = -Lq \cos q, \quad \frac{dV}{dx} = -Lq \sin q \quad (3a,b)$$

$$\frac{dM}{dx} = L(-H \sin q + V \cos q) \quad (4)$$

其中, L 为轴线的伸长率(stretching), q 为弹性曲线的切线与 x 轴正向的夹角, H 、 V 分别为横截面上沿水平和铅垂方向的内力, M 为弯矩, A 、 I 分别为梁横截面的面积和惯性矩。横截面的轴向内力 N 可表示为

$$N = -H \cos q - V \sin q \quad (5)$$

将方程(2a)代入(5)中可得

$$L = 1 - (H \cos q + V \sin q) / EA \quad (6)$$

引入无量纲量：

$$(X, S, U, W) = (x, s, u, w) / l \quad (7a)$$

$$(P_H, P_V) = (H, V) l^2 / EI \quad (7b)$$

$$m = Ml / EI, \quad \bar{q} = ql^3 / EI \quad (7c)$$

并将其代入(1)-(4), (6) 可得到以下无量纲控制方程：

$$\frac{dS}{dX} = L, \quad \frac{dU}{dX} = L \cos q - 1 \quad (8a,b)$$

$$\frac{dW}{dX} = L \sin q, \quad \frac{dq}{dX} = m \quad (9a,b)$$

$$\frac{dP_H}{dX} = -L\bar{q} \cos q, \quad \frac{dP_V}{dX} = -L\bar{q} \sin q \quad (10a,b)$$

$$\frac{dm}{dX} = L(-P_H \sin q + P_V \cos q) \quad (11)$$

$$L = 1 - (P_H \cos q + P_V \sin q) / l^2 \quad (12)$$

其中 $l = l\sqrt{A/I}$ 为梁(杆)的长细比。对图 1 所示简支梁杆, 相应的无量纲边界条件为

$$S(0) = U(0) = W(0) = m(0) = 0, q(0) = b \quad (13a)$$

$$W(1) = 0, m(1) = 0, P_H(1) = 0 \quad (13b)$$

其中 b 为梁的左端转角, 将它作为过屈曲控制参数。这样, 简支梁在非保守载荷 q 作用下的过屈曲问题就归结为在边界条件(13)下求解非线性常微分方程组(8)-(12)。基本未知量分别为 S 、 U 、 W 、 q 、 P_H 、 P_V 和 m , 它们均被看作 X 的函数。

对于保守分布荷载作用情形, 即在梁变形过程中载荷 q 的方向始终沿坐标 x 的负方向, 平衡方程(10b,c)变为

$$\frac{dP_H}{dX} = -L\bar{q}, \quad \frac{dP_V}{dX} = 0. \quad (14a,b)$$

3 数值方法及结果

由于方程(8)-(12)是相互耦合的强非线性方程, 无法求得解析解。这里采用文打靶法^[8-11]求其数值解。由分叉理论^[12]可知, 非线性边值问题(8)-(12)的线性化问题($b \rightarrow 0$)的最小特征值 $\bar{q}_{cr}$ 即为梁失稳的临界载荷。当 $\bar{q} < \bar{q}_{cr}$ 时, 杆处于未屈曲状态, 当 $\bar{q} > \bar{q}_{cr}$ 时, 杆进入过屈曲状态。方程(8)-(12)连续依赖于控制参数 b 的解可以通过解析延拓法获得。从而可得过屈曲状态平衡路径或过屈曲状态全局解。

表 1 不同转角 b 所对应的无量纲载荷参数 $\bar{q}$ ($l = 120$)

Table 1 Non-dimensional load parameter $\bar{q}$ ($l = 120$)

corresponding to different values of b (centigrade)

b / °							
0.001	30	60	90	120	150	178	
18.590	18.58 ^[3]	18.993	20.287	22.257	22.575	21.301	17.171 保守
18.978	18.97 ^[3]	20.566	25.551	32.661	36.080	31.067	20.408 随动

数值计算时, 取 $l = 120$, 相对误差限为 10^{-5} 。

表 1 中分别给出了在保守载荷和非保守载荷作用下梁的左端转角 b 与过屈曲载荷参数 $\bar{q}$ 的对应关系。

其中 $b = 0.001^\circ$ 时的载荷值为临界载荷, 与文献[3]中的近似结果十分接近。由表中结果可见, 同样杆端转角对应的随动载荷值大于保守载荷值。图 2 绘出了表 1 中的各组 ($b, \bar{q}$) 值所对应的过屈曲构形曲线 ($U + X, W$)。由于载荷作用方式不同, 杆端转角相同时的过屈曲平衡构形存在差异。图 3~图 6 中分别给出了有关物理量与无量纲载荷 $\bar{q}$ 之间的特征关系, 这些曲线均可看作梁在某种意义下的平衡路径。其中 $d = |U(1)|$ 为右端水平位移的大小; $P_H(0)$ 和 $P_V(0)$ 分别为左端水平和铅垂束力。这些曲线关于载荷参数 $\bar{q}$ 均为非单调的。因此, 同一载荷参数值可对应两个不同的平衡构形。保守载荷和非保守载荷所对应的平衡路径形状不同, 非保守载荷作用梁的平衡路径的载荷变化范围与保守载荷相比要大得多。对非保守载荷作用情形, 杆端水平反力 $P_H(0)$ 与载荷参数 $\bar{q}$ 为线性关系, 并且有 $P_H(0) = \bar{q}S(1)$ 。由于轴线伸长微小, 有 $S(1) \approx 1$, 因此 $P_H(0) \approx \bar{q}$ 。图 7 给出了轴线伸长 $d = (S(1) - 1)$ 与载荷参 $\bar{q}$ 的关系曲线。从图 3~图 7 中的这些平衡路径曲线可知, 过屈曲变形在增大的过程中载荷参数先从临界值

开始单调增大, 达到一最大值。然后随变形增大载荷却单调减小。对非保守载荷作用梁, $\bar{q}_{\max} = 36.11$, 对保守载荷作用梁 $\bar{q}_{\max} = 22.58$ 。

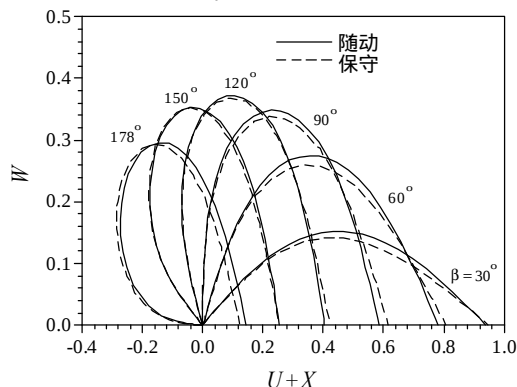


图 2 不同 b 值对应的过屈曲平衡构形

Fig.2 Equilibrium configurations corresponding to different values of b

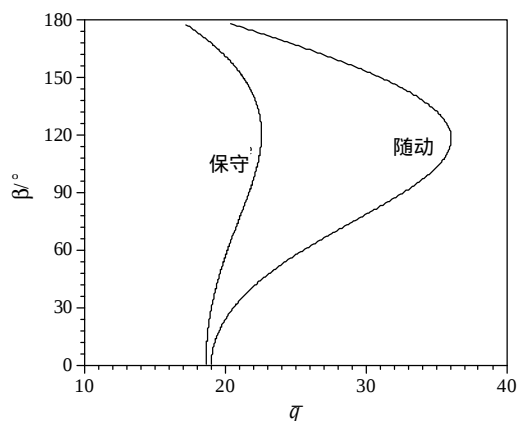


图 3 右端转角 b 与载荷 $\bar{q}$ 的特征曲线

Fig.3 Characteristic curves of the left rotation angle b versus load parameter $\bar{q}$

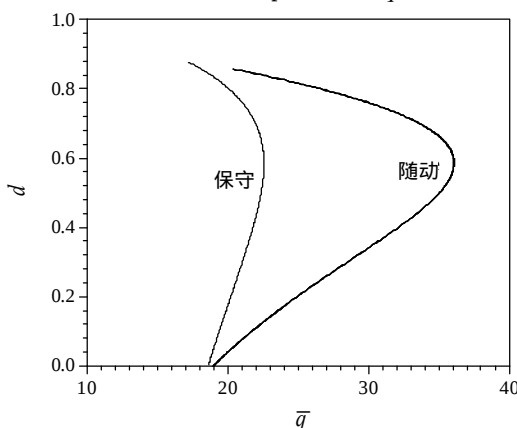


图 4 杆端位移 d 与载荷 $\bar{q}$ 的特征曲线

Fig.4 Characteristic curves of the end displacement d versus load parameter $\bar{q}$

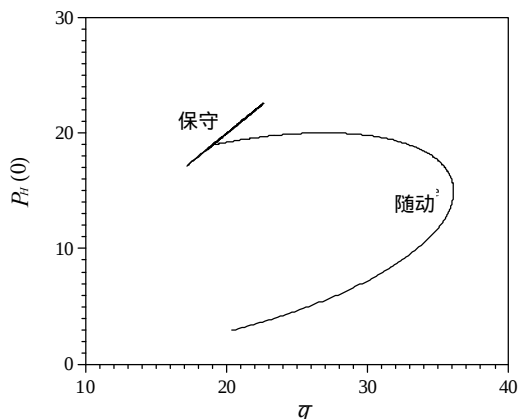


图 5 约束力 $P_H(0)$ 与 $\bar{q}$ 的特征曲线

Fig.5 Characteristic curves of constraint force $P_H(0)$ versus load parameter $\bar{q}$

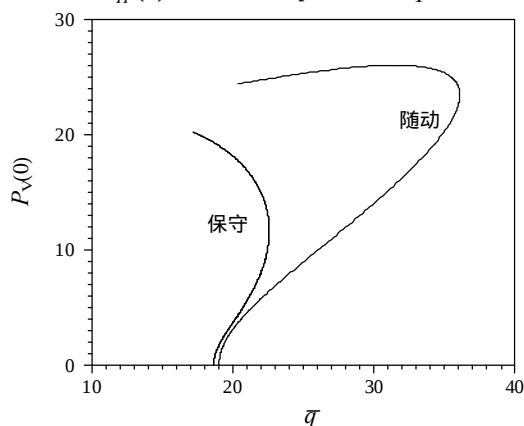


图 6 约束力 $P_V(0)$ 与载荷 $\bar{q}$ 的特征曲线

Fig.6 Characteristic curves of the constraint force $P_V(0)$ versus load parameter $\bar{q}$

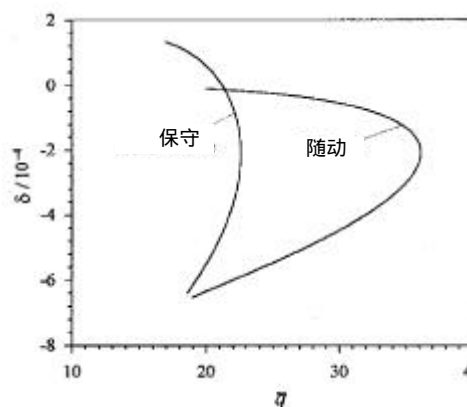


图 7 无量纲伸长 d 与载荷 $\bar{q}$ 的特征曲线

Fig.4 Characteristic curves of the dimensionless elongation d versus load parameter $\bar{q}$

4 结论

基于轴线可伸长梁的几何非线性理论, 建立了受轴向随动分布载荷作用简支梁杆弹性过屈曲问题的数学模型。采用打靶法^[8-11]数值求解所得边值

问题, 分别获得了保守载荷和非保守载荷作用简支梁杆的过屈曲数值解。结果表明, 过屈曲平衡路径不是载荷 $\bar{q}$ 的单调函数和单值函数。与保守载荷作用梁的平衡路径相比较, 非保守载荷作用梁的平衡路径表现出显著不同, 其载荷变化范围要大得多。

参考文献:

- [1] V V Bolotin. Non-conservative Problems of the Theory of Elastic Stability[M]. Oxford: Pergamon Press, 1963.
- [2] G Herrmann. Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces[J]. Applied Mechanics Review, 1967, 20(1): 103-108.
- [3] H Leipholz. Stability of elastic systems[M]. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [4] 武际可, 苏先樾. 弹性系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
Wu Jike and Su Xianye. Stability of elastic systems [M]. Beijing: Science Press, 1994.
- [5] R V Vitaliani, A M Gasparini and A V Seatta. Finite element solution of the stability problem for nonlinear undamped and damped system under nonconservative loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34: 2497-2516.
- [6] F M Detinko. On the elastic stability of uniform beams and circular arches under non-conservative loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37: 5505-5515.
- [7] C P Filipich and M B Rosales. A Further study on the post-buckling of extensible elastic rods[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2000, 35: 997-1022.
- [8] 李世荣, 程昌钧. 加热弹性杆的热过屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(2): 119-125.
Li Shirong, Cheng Changjun. Thermal post-buckling analysis of heated elastic rods[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(2): 119-125.
- [9] 李世荣. 非对称支承弹性杆的热屈曲[J]. 工程力学, 2000, 17(5): 115-120.
Li Shirong. Thermal post-buckling of asymmetrically supported rods[J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(5): 115-120.
- [10] Li Shirong, Zhou Youhe. A shooting method for non-linear vibration and thermal post-buckling of heated orthotropic circular plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 248(2), 379-380.
- [11] H P William, P F Brain and A T Sau et al. Numerical Recipes-The Art of Scientific Computing[M]. London: Cambridge University Press, 1986.
- [12] 程昌钧, 朱正佑. 结构的分叉与屈曲[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991.
Cheng Changjun and Zhu Zhengyou. Bifurcation and buckling of structures[M]. Lanzhou: Lanzhou University Press, 1991.

POST-BUCKLING OF A SIMPLY SUPPORTED ELASTIC CULOMN-BEAM UNDER AXIALLY DISTRIBUTED FOLLOWER LOAD

LI Shi-rong^{1,2}, WU Ying¹, ZHOU You-he²

(1. School of Sciences, Gansu University of Technology, Lanzhou 730050, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

Abstract: Based on the large deformation theory for the extensible elastic beams, the governing equations of post-buckling of a simply supported elastic beam subjected to a distributed tangential follower force along the central axis are established. They consist of a boundary value problem of ordinary differential equations with strong non-linearity, in which seven unknown functions are included and the arc length of the deformed axis is considered as the one of the basic unknown functions. By using shooting method and analytical continuation, the nonlinear boundary-value problem is numerically solved and the equilibrium paths as well as the post-buckling configurations of the deformed beam are obtained. The results show that the features of the equilibrium paths of the beam subjected to a non-conservative load are evidently different from those to a conservative one.

Key words: nonconservative load; extensible beam; shooting method; post-buckling; equilibrium path