

用 Mises 屈服条件求内边界固支环板的极限荷载

刘福林

(辽宁大学数学系力学教研室, 沈阳 110036)

摘 要: 对于环板的塑性极限分析, 通常应用最大弯矩极限条件。本文应用 Mises 屈服条件分析内边界固支环板在线性荷载与均布荷载共同作用下的极限荷载。考虑到 Mises 屈服条件的非线性, 文中采用加权余量法进行分析。根据环板屈服时弯矩的边界条件和平衡方程, 选取合适的试函数, 并用加权余量法中的子域法进行求解。针对线性荷载的不同分布形式, 给出极限荷载的计算公式与数值结果, 画出极限荷载的影响曲线, 并与最大弯矩极限条件的数值结果进行了比较, 说明本文结果是合理的。

关键词: Mises 屈服条件; 内边界固支环板; 线性荷载; 均布荷载; 极限荷载

中图分类号: O344.1 **文献标识码:** A

1 引言

对环板进行塑性极限分析时, 通常选用最大弯矩极限条件^[1]。如果选用 Tresca 屈服条件或 Mises 屈服条件, 则计算很困难。特别是由于 Mises 屈服条件是非线性的, 故很少应用于环板的塑性极限分析问题。尤其是对于内边界固支环板的塑性极限分析问题, 迄今尚未见到 Mises 屈服条件的应用例子, 连单独承受均布荷载或线性荷载的例子也未见到, 更未见到上述两种荷载共同作用的例子。

考虑到 Mises 屈服条件的非线性及荷载的复杂性, 本文在分析方法上采用加权余量法和极值条件, 求出了承受线性荷载与均布荷载共同作用的内边界固支环板在 Mises 屈服条件下极限荷载所满足的方程式, 并由此求出近似值及画出极限荷载的影响曲线。文中环板的材料是理想刚塑性的。

2 在线性荷载的第一种分布形式下的解

设作用于内边界固支环板上的线性荷载与均布荷载如图 1 所示, 图中 a_0 、 a 为环板的内、外半径, R_0 、 M_0 为内边界支承处的环形支反力与反力矩, q_0 为均布荷载集度及线性荷载的最大集度, R 为有量纲的径向坐标, r 为无量纲的径向坐标。

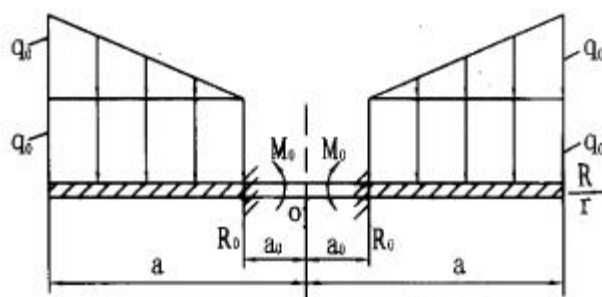


图 1 环板和荷载示意图

Fig.1 Annular plate and load type one

环板的平衡方程为

$$\frac{d(RM_R)}{dR} - M_q = a_0 R_0 - \frac{q_0}{6(a-a_0)} \cdot [2R^3 + 3(a-2a_0)R^2 - 3aa_0^2 + 4a_0^3]$$

式中 M_R 、 M_q 为板内径向与横向弯矩。由平衡条件可求出环板支承处环形支反力 R_0 为

$$R_0 = (5a + 4a_0)(a - a_0)q_0 / (6a_0)$$

将 R_0 代入平衡方程, 并为了求解的方便将其化为无量纲形式。无量纲形式的平衡方程为

$$(rm_r)_{,r} - m_q = p(5 + 4b)(1 - b) - \frac{p}{1 - b} [2r^3 + 3(1 - 2b)r^2 - 3b^2 + 4b^3] \quad (1)$$

式中各量均为无量纲量:

$$\begin{cases} m_r = M_R / M_p, m_q = M_q / M_p, p = q_0 a^2 / (6M_p) \\ b = a_0 / a, b \leq r = R / a \leq 1, (rm_r)_{,r} = d(rM_r) / dr \end{cases} \quad (2)$$

式中 M_p 为塑性极限弯矩。

Mises 屈服条件为

$$m_r^2 - m_r m_q + m_q^2 = 1 \quad (3)$$

环板屈服时的边界条件为

$$\begin{cases} m_r(b) = M_0 / M_p = -1, & m_r(1) = 0 \\ m_q(b) = m_q(1) = -1 \end{cases} \quad (4)$$

下面用加权余量法的子域法来分析此非线性问题。根据边界条件(4)式, 设试函数为

$$\begin{cases} m_r = k_1 r(r-b)(r-1) + \frac{1}{1-b}(r-1) \\ m_q = k_2 r(r-b)(r-1) - 1 \end{cases} \quad (5)$$

式中 k_1 、 k_2 为待定系数。显然, 试函数已满足边界条件(4)式。

将试函数(5)式分别代入平衡方程(1)式与 Mises 屈服条件(3)式, 得余量:

$$\begin{aligned} R_1 &= (rm_r)_{,r} - m_q - p(5+4b)(1-b) \\ &+ \frac{p}{1-b} [2r^3 + 3(1-2b)r^2 - 3b^2 + 4b^3] \\ &= k_1 [4r^3 - 3(1+b)r^2 + 2br] - k_2 [r^3 - (1+b)r^2 \\ &+ br] + \frac{1}{1-b} (2r-1) - p(5+4b)(1-b) \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ \frac{p}{1-b} [2r^3 + 3(1-2b)r^2 - 3b^2 + 4b^3] + 1$$

$$\begin{aligned} R_2 &= m_r^2 - m_r m_q + m_q^2 - 1 \\ &= (k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2) [r^6 - 2(1+b)r^5 \\ &+ (1+4b+b^2)r^4 - 2b(1+b)r^3 + b^2r^2] \\ &+ (k_1 - 2k_2) [r^3 - (1+b)r^2 + br] \\ &+ (2k_1 - k_2) [r^4 - (2+b)r^3 + (1+2b)r^2 - br] \\ &+ \frac{1}{(1-b)^2} (r^2 - 2r + 1) + \frac{1}{1-b} (r-1) \end{aligned} \quad (7)$$

用加权余量法中的子域法消除余量^[2]:

$$\int_b^1 R_1 dr = 0: \quad k_2(1+b)(1-b)^3 - 6p(7+3b)(1-b)^2 + 12 = 0 \quad (8)$$

$$\int_b^1 R_2 dr = 0: \quad 2G(k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2) - 7k_1(1-b)^4 + 7k_2(8+7b)(1-b)^3 - 70(1-b) = 0 \quad (9)$$

式中

$$G = 2 - 7b + 7b^2 - 7b^5 + 7b^6 - 2b^7 \quad (10)$$

由(8)式, 得

$$k_2 = 6p \frac{7+3b}{(1+b)(1-b)} - \frac{12}{(1+b)(1-b)^3} \quad (11)$$

将 k_2 代入(9)式, 经整理得

$$\begin{aligned} &2Gk_1^2 - \left[\frac{12(7+3b)G}{(1+b)(1-b)} p + 7(1-b)^4 \right. \\ &- \frac{24G}{(1+b)(1-b)^3} k_1 + \frac{72(7+3b)^2 G}{(1+b)^2(1-b)^2} \\ &+ \left. \left[\frac{42(8+7b)(7+3b)(1-b)^2}{1+b} - \frac{288(7+3b)G}{(1+b)^2(1-b)^4} \right] p \right. \\ &+ \left. \left[\frac{12(7+3b)G}{(1+b)^2(1-b)^6} + 7(1-b)^4 - \frac{24G}{(1+b)(1-b)^3} \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

在(12)式中对 k_1 取极值, 由此可求出 k_1 :

$$k_1 = \frac{3(7+3b)}{(1+b)(1-b)} + \frac{7}{4G}(1-b)^4 - \frac{6}{(1+b)(1-b)^3} \quad (13)$$

再将 k_1 代入(12)式, 经整理就可得到环板屈服时无量纲极限荷载 p 所满足的方程式为

$$\begin{aligned} &\frac{54(7+3b)^2 G}{(1+b)^2(1-b)^2} p^2 - \left[\frac{216(7+3b)G}{(1+b)^2(1-b)^4} \right. \\ &- 315(7+3b)(1-b)^2 \left. \right] p - \left[\frac{49}{8G}(1-b)^8 \right. \\ &- \frac{216G}{(1+b)^2(1-b)^6} - 70b + 700 \left. \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

3 在线性荷载的第二种分布形式下的解

设作用于内边界固支环板上的线性荷载与均布荷载如图 2 所示, 图中各量如图 1 中的说明。此时, 内边界支承处的环形支反力为:

$$R_0 = (4a + 5a_0)(a - a_0)q_0 / (6a_0)$$

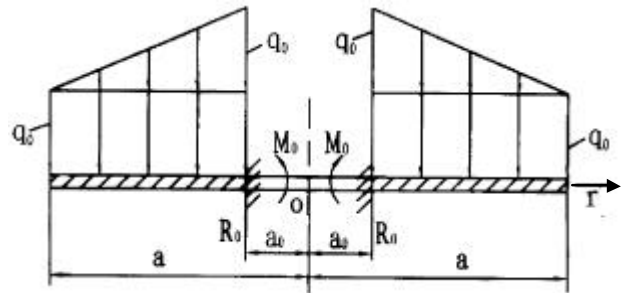


图 2 环板和荷载示意图

Fig.2 Annular plate and Load type two

于是, 环板无量纲形式的平衡方程为

$$\begin{aligned} &(rm_r)_{,r} - m_q = p(4+5b)(1-b) \\ &- \frac{p}{1-b} [3(2-b)r^2 - 2r^3 - 6b^2 + 5b^3] \end{aligned} \quad (15)$$

式中各无量纲量 m_r 、 m_q 、 p 、 b 、 r 及 $(rm_r)_{,r}$ 仍

如(2)式的说明。

除平衡方程不同外, Mises 屈服条件和边界条件仍如(3)、(4)式。因边界条件相同, 故仍选取(5)式为试函数。将试函数(5)式分别代入此问题的平衡方程(15)式与 Mises 屈服条件(3)式, 得余量:

$$R_3 = (rm_r)_{,r} - m_q - p(4+5b)(1-b) + \frac{p}{1-b}[3(2-b)r^2 - 2r^3 - 6b^2 + 5b^3]$$

$$= k_1[4r^3 - 3(1+b)r^2 + 2br] - k_2[r^3 - (1+b)r^2 + br] + \frac{1}{1-b}(2r-1) - p(4+5b)(1-b)$$

$$+ \frac{p}{1-b}[3(2-b)r^2 - 2r^3 - 6b^2 + 5b^3] + 1$$

$$R_4 = m_r^2 - m_r m_q + m_q^2 - 1 = R_2 \quad (17)$$

消除余量:

$$\int_b^1 R_3 dr = 0: k_2(1+b)(1-b)^3 - 6p(5+3b)(1-b)^2 + 12 = 0 \quad (18)$$

$$\int_b^1 R_4 dr = 0: 2G(k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2) - 7k_1(1-b)^4 + 7k_2(8+7b)(1-b)^3 - 70(1-b) = 0 \quad (19)$$

由(18)、(19)式消去 k_2 , 得

$$2Gk_1^2 - \left[\frac{12(5+3b)G}{(1+b)(1-b)} p + 7(1-b)^4 - \frac{24G}{(1+b)(1-b)^3} \right] k_1$$

$$+ \frac{72(5+3b)^2 G}{(1+b)^2 (1-b)^2} p^2 + \left[\frac{42(8+7b)(5+3b)(1-b)^2}{1+b} \right. \quad ($$

$$\left. - \frac{288(5+3b)G}{(1+b)^2 (1-b)^4} \right] p + \left[\frac{288G}{(1+b)^2 (1-b)^6} - 84 \frac{8+7b}{1+b} - 70(1-b) \right] = 0 \quad (20)$$

在(20)式中对 k_1 取极值, 由此求出 k_1 。再将 k_1 代回(20)式, 经整理可得到此环板屈服时无量纲极限荷载 p 所满足的方程式为

$$\frac{54(5+3b)^2 G}{(1+b)^2 (1-b)^2} p^2 - \left[\frac{216(5+3b)G}{(1+b)^2 (1-b)^4} - 315(5+3b)(1-b)^2 \right] p - \left[\frac{49}{8G} (1-b)^8 - \frac{216G}{(1+b)^2 (1-b)^6} - 70b + 700 \right] = 0 \quad (21)$$

式中 G 如(10)式。

4 结果分析与结束语

4.1 对于内边界固支环板在图 1 所示的荷载作用下, 本文 Mises 屈服条件解为(14)式; 而用最大弯矩极限条件求解时, 其解为^[3]:

$$p = \frac{q_0 a^2}{6M_p} = \frac{2}{(7+3b)(1-b)^2} \quad (22)$$

两者随 b 变化的值及其比较如表 1, 由表 1 画出极限荷载影响曲线如图 3 中的曲线。

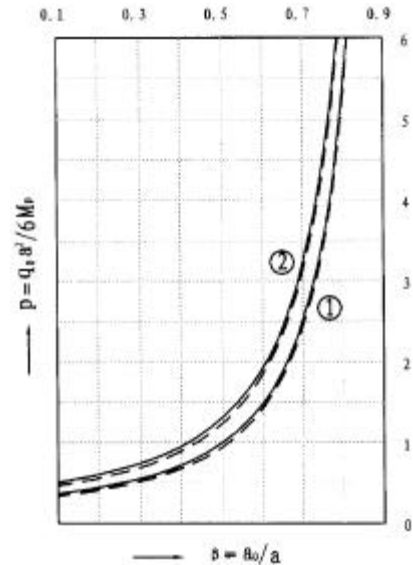
表 1 图 1 所示荷载作用下的极限荷载 ($a^2 q_0 / 6M_p$)
Table 1 Ultimate load ($a^2 q_0 / 6M_p$) under the load pattern given in Fig.1

b	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
最大弯矩极限条件解	0.338	0.411	0.517	0.678	0.914	1.421	2.442	5.319	20.619
本文 Mises 屈服条件解	0.371	0.446	0.555	0.720	0.991	1.480	2.519	5.430	20.834

4.2 对于内边界固支环板在图 2 所示的荷载作用下, 本文 Mises 屈服条件解为(21)式; 而最大弯矩极限条件解为^[3]:

$$p = \frac{q_0 a^2}{6M_p} = \frac{2}{(5+3b)(1-b)^2} \quad (23)$$

两者随 b 变化的值及其比较如表 2, 由表 2 画出极限荷载影响曲线如图 3 中的曲线。



----- 最大弯矩极限条件解
—— 本文 Mises 屈服条件解
曲线 ①: 对应于图 1 所示的荷载
曲线 ②: 对应于图 2 所示的荷载
图 3 极限荷载影响曲线

Fig.3 Influence curve of ultimate load

4.3 由表 1、表 2 及图 3 看出: 本文 Mises 屈服条件解均稍高于最大弯矩极限条件解, 极限荷载影响曲线的变化是合理的, 这些说明本文方法及给出的计算公式(14)式, (21)式是合理的, 数值结果与变

化曲线是理想的。

表 2 图 2 所示荷载作用下的极限荷载 ($a^2q_0/6M_p$)
Table 2 Ultimate load ($a^2q_0/6M_p$) under the load pattern given
in Fig.2

b	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
最大弯矩 极限条件解	0.466	0.558	0.692	0.896	1.231	1.838	3.130	6.757	25.974
本文 Mises 屈服条件解	0.511	0.606	0.743	0.953	1.295	1.915	3.228	6.898	26.246

参考文献：

[1] 徐秉业，刘信声. 结构塑性极限分析[M]. 北京：中国
建筑工业出版社，1985.
Xu Bingye, Liu Xinseng. Plastic limit analysis of

structures [M]. Beijing: Chinese Architecture Industry
Press, 1985.
[2] 徐次达. 固体力学加权残值法[M]. 上海：同济大学
出版社，1987.
Xu Cida. Method of weighted residuals in solid
mechanics[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1987.
[3] 宋继侠，刘福林. 环板在局部均布和线性荷载共同
作用下的塑性极限分析[J]. 兵工学报，1996，17(2):
188-192.
Song Jixia, Liu Fulin. A plastic limit analysis of an annular
plate under combined action of localized uniform and
linearly varying loads [J]. Acta Armamentarii,
1996,17(2):188-192.

EVALUATION OF ULTIMATE LOAD OF INNER-EDGE-CLAMPED
ANNULAR PLATES BASED ON MISES YIELD CRITERION

LIU Fu-lin

(Mathematic Department in Liaoning University, Shenyang 110036)

Abstract: For ultimate strength analysis of annular plates, the maximum bending moment is usually considered as a criterion. In this paper, the ultimate load of inner-edge-clamped, annular plates is evaluated based on the von Mises yield condition. The weighted residual method is employed to deal with the non-linearity resulting from the Mises yield condition. With reference to the boundary conditions and the equilibrium equations of moment, an appropriate trial function is chosen and the subdomain method is used to find the solution. Formulas and numerical results of the ultimate load are given for two typical linearly varying loads. The influence curve diagram for the ultimate load is plotted. Comparison is made with the results based on the maximum bending moment. The present approach is shown to be reasonable.

Key words: Mises yield condition; annular plate with clamped inner boundary; linear load; uniform load; ultimate load