

超弹性材料过盈配合的解析解和数值解

范成业,* 庄 茁, 黄克智

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘 要: 给出了轴对称平面应变情况下, 超弹性材料与线弹性材料过盈配合的解析解。给出一个解析解算例并与有限元解进行了比较。同时用有限元分析方法讨论了可压缩性在过盈配合中对应力水平的影响。

关键词: 过盈配合; 超弹性材料; 体积模量; 大变形

中图分类号: TU318 **文献标识码:** A

THE THEORETICAL AND FINITE ELEMENT SOLUTIONS OF AN INTERFERENCE PROBLEM OF HYPERELASTIC MATERIALS

FAN Chengye, ZHUANG Zhuo, HWANG Ke-Zhi

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: This paper gives the theoretical solution of axisymmetric interference problem of hyperelastic (or Green elastic) materials under the condition of plane strain, based on the constitutive relations of large-strain hyperelasticity. An example is presented to compare the theoretical solution with the finite element solution. The effect of hyperelastic material's compressibility on stress level is discussed.

Key words: interference; hyperelastic materials; bulk modulus; large deformation

1 引言

过盈配合是橡胶工业中的一种常见的配合方式。轴对称的过盈配合在圆柱铰、球铰等减震橡胶元件中经常出现。通常橡胶被假定为超弹性材料, 由于超弹性本构模型的复杂性和高度的非线性, 文献中很少用解析的方法研究橡胶过盈配合大变形问题。本文首先给出一种平面应变条件下, 超弹性不可压的橡胶与线弹性材料过盈配合的大变形解析解。此解析解未限制特定的超弹性本构, 可以对工业上不可压橡胶有过盈配合元件的应力应变给出定量的结果。在有限元计算中, 一般假定橡胶为超弹性不可压缩本构模型, 在过盈配合问题中, 材

料受到高度的约束, 计算中采用的橡胶的体积模量可能对有限元分析的结果有重要影响^[1], 因此, 本文进一步探讨在这种过盈配合中橡胶的可压缩性对应力应变的影响。

2 不可压模型解析解

解析解模型如图 1, 内层 Part1 为钢, 中间层 Part2 为不可压橡胶, 内外半径分别为 R_s 与 R_r , 最外层 Part3 材料同 Part1, 外层钢的外半径为 b , 给出 Part2 和 Part3 之间的过盈量 d , 同时假设平面应变状态, 钢为线弹性材料, 橡胶材料服从超弹性本构关系, 求整个结构经过过盈配合后的应力应变状

收稿日期: 2002-03-25; 修改日期: 2003-02-14

作者简介: 范成业(1978), 男, 内蒙古人, 清华大学工程力学系硕士毕业, 从事固体力学研究;

*庄 茁(1952), 男, 辽宁人, 清华大学工程力学系教授, 博士生导师, 从事固体力学研究; (Email: zhuangz@tsinghua.edu.cn)

黄克智(1927), 男, 江西人, 中国科学院院士, 清华大学工程力学系教授, 博士生导师, 从事固体力学研究

态。

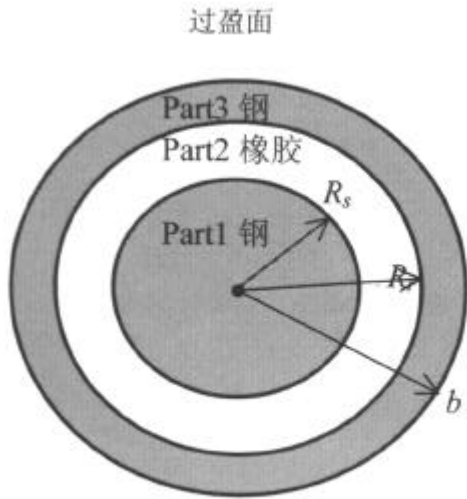


图 1 解析解模型

Fig.1 Model of the theoretical solution

以 p_s 表示内层钢在 R_s 处钢受到的压力, 则内层钢中应力应变状态为:

$$\begin{aligned} s_{rr} &= s_{qq} = -p_s, \quad s_{zz} = -2n_s p_s \\ e_{qq} &= e_{rr} = \frac{1-n_s^2}{E_s} (s_{rr} - \frac{n_s}{1-n_s} s_{qq}) \\ &= -\frac{(1+n_s)(1-2n_s)}{E_s} p_s \end{aligned} \quad (1)$$

式中 E_s, n_s 为钢的杨氏模量和波桑比。图 1 中 R_s 处钢的位移 u_s 可以由拉梅公式得到^[2]:

$$u_s = e_{qq} R_s = -p_s R_s \frac{(1+n_s)(1-2n_s)}{E_s} \quad (2)$$

以 F 表示橡胶的变形梯度张量, 在直角坐标系下其行列式(第三不变量) $|F|$ 等于橡胶变形后与变形前之体积比 J , 即 $J = |F|$ 。如果我们专注于形状变化的影响, 而不顾及体积变化, 可以构造 $\bar{F} = J^{-1/3} F$, 称为“等容(isobaric)变形梯度张量”。类似于左 Cauchy-Green 张量 $B = F \cdot F^T$ (上标 T 表示转置), 可以构造等容左 Cauchy-Green 张量:

$$\bar{B} = \bar{F} \cdot \bar{F}^T = J^{-2/3} F \cdot F^T = J^{-2/3} B \quad (3)$$

橡胶本构关系通过应变能函数定义^[3]:

$$\delta' = \frac{2}{J} \text{DEV} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial U}{\partial \bar{I}_2} \right) \bar{B} - \frac{\partial U}{\partial \bar{I}_2} \bar{B} \cdot \bar{B} \right] \quad (4)$$

其中, δ 为 Cauchy 应力, δ' 为其偏量, $\text{DEV}[\]$ 表示取张量 $[\]$ 的偏量, U 为按变形前单位体积折算的应变能密度函数, $U = U(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)$, $\bar{I}_1$ 与 $\bar{I}_2$ 分别为 $\bar{B}$ 的第一与第二不变量。对于本节的解析解求解, 假设橡胶不可压缩, 即 $J=1$, 则 $\bar{B} = B$, $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 1 + r^2/R^2 + R^2/r^2$ 记做 $\bar{I}$, 由(4)可计算得:

$$s'_{qq} - s'_{rr} = 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I} \frac{\partial U}{\partial \bar{I}_2} \right) \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\partial U}{\partial \bar{I}_2} \left(\frac{r^4}{R^4} - \frac{R^4}{r^4} \right) \right] \quad (4)'$$

式中 R 表示变形前橡胶内某点的半径, r 表示过盈配合后该点的半径。利用轴对称平面问题的平衡方程^[2]:

$$\frac{ds_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (s_{rr} - s_{qq}) = 0 \quad (5)$$

和橡胶不可压的假设:

$$R^2 - R_s^2 = r^2 - (R_s + u_s)^2 \quad (R_s < R < R_r) \quad (6)$$

可以得到橡胶中应力计算公式:

$$\begin{aligned} s_{rr} &= -p_s + \int_{R_s}^R \frac{R}{R^2 - R_s^2 + (R_s + u_s)^2} (s'_{qq} - s'_{rr}) dR \\ s_{qq} &= s_{rr} + (s'_{qq} - s'_{rr}) \end{aligned} \quad (7)$$

(8)式中 $(s'_{qq} - s'_{rr})$ 见(4)'。以 p_r 表示 Part3 部分外层钢内径 $R_r - d$ 处受到的压力, 可以根据平面应变拉梅公式^[2]、平面应变的本构方程及几何方程求出外层钢的应力应变及位移状态。

$$\begin{cases} s_{rr} = \frac{(R_r - d)^2}{b^2 - (R_r - d)^2} \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right) p_r \\ s_{qq} = \frac{(R_r - d)^2}{b^2 - (R_r - d)^2} \left(1 + \frac{b^2}{R^2} \right) p_r \end{cases} \quad (9)$$

$$e_{qq} = \frac{1+n_s}{E_s} \frac{(R_r - d)^2}{(R_r - d)^2 - b^2} \left[1 - 2n_s + \frac{b^2}{R^2} \right] (-p_r) \quad (10)$$

$$u = R e_{qq} \quad (11)$$

由于过盈面两侧径向应力连续, 利用(2), 由(7)令 $R = R_r$ 可以求得 p_r :

$$\begin{aligned} -p_r &= u_s \frac{E_s}{R_s} \frac{1}{(1+n_s)(1-2n_s)} \\ &+ \int_{R_s}^{R_r} 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I} \frac{\partial U}{\partial \bar{I}_2} \right) \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\partial U}{\partial \bar{I}_2} \left(\frac{r^4}{R^4} - \frac{R^4}{r^4} \right) \right] \\ &\frac{R dR}{R^2 - R_s^2 + (R_s + u_s)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

以 r_r 表示 R_r 对应的过盈后的半径, $u|_{R=R_r-d}$ 表示外层钢半径为 $R_r - d$ 处的位移。利用(11)(令 $R = R_r - d$)和(6)(令 $R = R_r$)以及过盈面处位移的关系:

$$r_r = R_r - d + u|_{R=R_r-d} \quad (13)$$

可以得到:

$$\begin{aligned} & \sqrt{R_r^2 - R_s^2 + (R_s + u_s)^2 - (R_r - d)} \\ &= (R_r - d) \frac{1+n_s}{E_s} \left[\frac{2(1-n_s)(R_r - d)^2}{(R_r - d)^2 - b^2} - 1 \right] (-p_r) \end{aligned} \quad (14)$$

把(12)代入上式得到关于 d 和 u_s 的关系式, 该关系式较复杂, 可以使用 Matlab、Maple 等数值软件根据给定的 d 求出 u_s , 于是利用(6)可以得到橡胶中的位移 u , $u = r - R$, 代入(4)得到 $s'_{qq} - s'_{rr}$, 再代入(7)(8)即可得到橡胶中的应力。由(12)可以求出 p_r , 代入(9)可求得外层钢的应力。利用 u_s 和(1)、(2)即可容易的求出内层钢中的应力。

以上我们得到了这个结构中的应力应变的解析的表达式, 橡胶超弹性本构模型的形式很多, 此解析解没有限定特殊的超弹性本构形式, (3)式中的 U 可以为任意形式的 $\bar{I}_1, \bar{I}_2$ 的函数。

3 解析解与 ABAQUS 数值解的比较

选取一组特殊的材料本构关系参数和模型的几何尺寸, 使用有限元软件 ABAQUS/Standard 进行计算, 并与解析解计算结果进行比较。由于模型轴对称, 在有限元计算中取完整模型的 1/4。几何尺寸如图 2: $R_{59.50}$ 为内层钢的半径和中间层橡胶的内半径, $R_{73.00}$ 为中间层橡胶的外半径, $R_{71.10}$ 为外层钢的内半径, 过盈量为 1.9mm, 有限元计算中此接触面定义为无滑动过盈配合。 $R_{80.00}$ 为外层钢的外半径。在 ABAQUS 中有专门为接触对过盈配合计算用的选项*CONTACT INTERFERENCE。

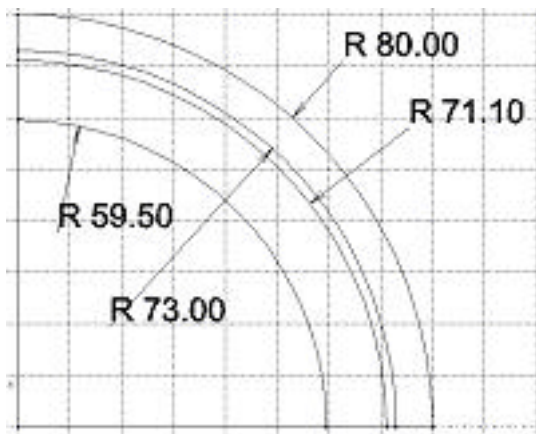


图 2 算例几何尺寸

Fig.2 Geometry of the example

计算中橡胶使用三次减缩多项式应变能本构模型, 应变能表达式为:

$$U = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i \quad (15)$$

取 $C_{10}=0.461312$, $C_{20}=0.01752$, $C_{30}=8.81 \times 10^{-5}$ (单位为 MPa)。钢的弹性常数取值为 $E_s=2.1 \times 10^5$ MPa, $n_s=0.3$ 。

图 3 是 Part1 和 Part2 部分径向位移 u_r 的解析解和有限元计算解的比较, 由于假设 Part2 橡胶不可压缩, 与 Part1 部分不同, Part2 部分的位移的绝对值随半径的增大而减小。外层钢的内径处的位移占过盈量的大部分, 约为 1.82mm。图 4 为 Part1~3 径向应力 s_r 的比较, 图中横坐标为过盈配合前半径, 可以看到, 两种解得到的径向应力在过盈面两侧是连续的; 在 Part3 部分最外侧, 径向应力均为 0。图 5 为 Part1~2 内环向应力 s_q 的比较, 图 6 为 Part3 内环向应力 s_q 的比较, 由图 5~6 可以看到环向应力在过盈面两侧不连续, 过盈面内侧为压应力, 外侧为拉应力。

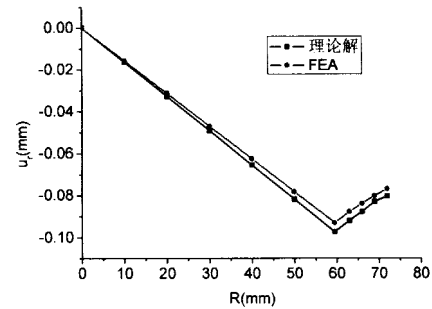


图 3 Part1~Part2 部分解析解与 FEA 解径向位移的比较

Fig.3 The comparison of the displacement in Part1 and Part 2 between the theoretical solution and the FEA solution

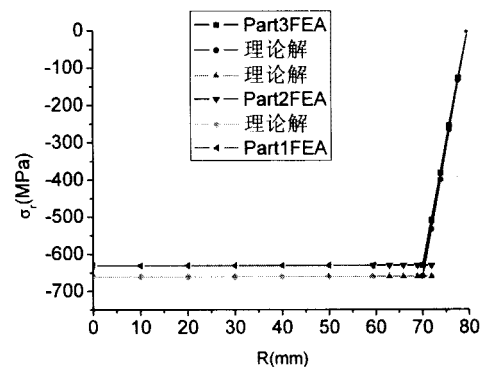


图 4 Part1~Part3 部分解析解与 FEA 解径向应力的比较

Fig.4 The comparison of the s_r between the theoretical solution and the FEA solution

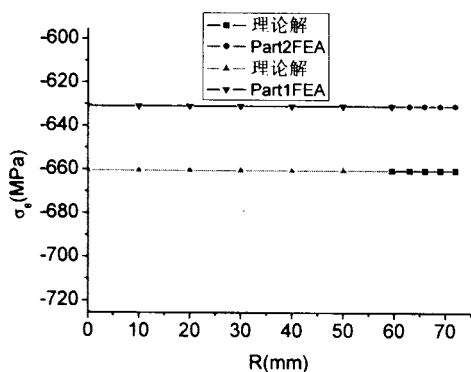


图 5 Part1~Part2 部分解析解与 FEA 解环向应力的比较

Fig.5 The comparison of the s_q between the theoretical solution and the FEA solution

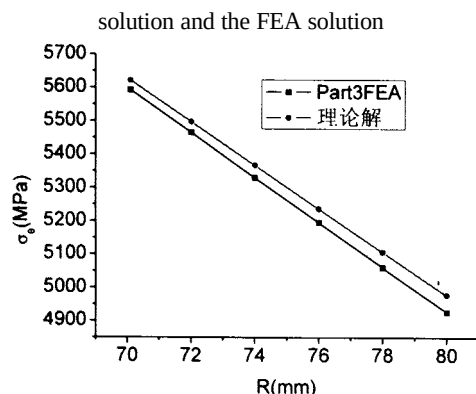


图 6 Part3 部分解析解与 FEA 解环向应力的比较

Fig.6 The comparison of the s_q in Part3 between the theoretical solution and the FEA solution

以上的两种解计算的结果吻合较好, 应力、位移差异均不超过 5%。

4 可压缩模型

在以上的算例中未考虑橡胶的可压缩性, 下面以二次多项式形式应变能本构模型为例, 用有限元软件 ABAQUS/Standard 进行计算, 讨论材料可压缩性对过盈配合的影响, 二次多项式形式应变能定义为:

$$U = \sum_{i+j=1}^2 C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (16)$$

静水压力 p 与 J 的关系如下:

$$p = -\frac{\partial U}{\partial J} \Rightarrow p = -\sum_{i=1}^2 2i \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i-1} \quad (17)$$

初始体模量与系数的关系:

$$K_0 = 2 / D_1 \quad (18)$$

取 5 组二次多项式系数进行分析, (16) 式中有 7 个系数, 与体积变形 J 无关的系数取值相同,

$C_{10} = 0.1699, C_{01} = 0.3629, C_{20} = 0.01197, C_{11} = 0.06863, C_{02} = -0.04918$ 与 J 有关项的系数 D_1, D_2 取值, 以及这 5 组系数对应的计算结果如表 1。

表 1 5 种系数对应的过盈面上的应力

Table 1 The comparison of s_r on the interference surface with 5 serial coefficients

	$D_1(\text{MPa}^{-1})$	$D_2(\text{MPa}^{-1})$	$K_0(\text{MPa})$	过盈面上 s_r (MPa)
1	2.5E-03	3.0E-03	800	-106.2
2	2.5E-04	3.0E-04	8000	-422.5
3	2.5E-05	3.0E-05	80000	-602.1
4	1.0E-05	1.0E-05	200000	-621.0
5	0	0	$+\infty$	-631.7

在以上计算中钢的体积模量 $K = 175000 \text{ MPa}$, 由此可以看出在橡胶的体积模量为线弹性钢的体积模量的 1/2 时(对应第 3 组数据)橡胶的可压缩性对应力的水平影响不大, 橡胶的体积模量较小时(1, 2 组数据)橡胶的可压缩性对过盈配合中的应力影响很大。因此使用有限元软件计算超弹性材料时, 如果材料受到高度约束(如橡胶过盈配合, 橡胶密封垫圈)并且材料的体积模量较小时, 在计算时应考虑材料的可压缩性。

参考文献:

- [1] 王登祥. 轮胎胶料有限元的实验基础及计算[J]. 轮胎工业, 1998, 12:721-729.
Wang Dengxiang. Experimental fundamentals and finite element analysis of tire components [J]. Tire Industry, 1998, 12: 721-729. (in Chinese)
- [2] 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础(第一版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
Lu Mingwan, Luo Xuefu. Fundamentals of Elasticity (Second Edition)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese)
- [3] ABAQUS/Theory Manual[M]. Version 5.8, HKS, Inc., RI, 1998.
- [4] 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系(第一版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
Hwang Keh-Chi, Huang Y. Solid Constitutive Relations (First Edition)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999. (in Chinese)