文章编号：1000-4750(2002)01-139-08

求解一类非线性粘弹性问题的弹性回复对应原理

张淳源，张为民

(湘潭大学建筑工程系，湖南 湘潭 411105)

摘　要：本文提出了一个全新的粘弹性理论体系，它把传统的线粘弹性理论作为特殊情况包括在内。其主要结果是两个用于求解一类物理非线性粘弹性问题的弹性回复对应原理。利用它，只要知道相应的非线性弹性问题的解，就可以求出非线性粘弹性问题的解答。对应原理不是基于本构关系的相似性，而是基于从粘弹性现时响应到瞬时弹性响应的可回复性[1]。首先找到非线性粘弹性与非线性弹性本构关系之间的对应，然后导出了两个弹性回复对应原理。通过对改性聚丙烯材料的实验验证了该对应原理的正确性和对此类材料的实用性。

关键词：非线性粘弹性理论；本构关系；对应原理
中图分类号：O345　　**文献标识码**：A

1　引言

在线粘弹性理论中对应原理大大简化了问题的求解[2, 3]。寻求几何和物理非线性粘弹性问题的解析解难度很大。在小变形的情况下，Rabotnov[4]提出了一种简化非线性粘弹性本构关系，基于修正应力的概念对非线性弹塑性遗传性问题的求解作过讨论，但未具体给出对应原理。在有限变形情况下，Schapery[5, 6]基于伪应力和伪应变的概念提出过一个对应原理。他将现时应力和现时应变通过遗传性积分化为伪应力与伪应变，试图找到服从非线性弹性关系的伪应力和伪应变。但他的目的没有真正实现，伪应变和应力的所有加载－卸载曲线不能做到完全重合，而且伪应变与应力不能同时回到原点，不符合弹性性能的要求。这样，他提出的对应原理的正确性成为可疑。胡强[7]等人在小变形情况下，基于多重积分形式的本构关系和多重 Laplace 变换提出了一个对应原理。但由于本构关系包含太多材料函数，很难应用于实际问题的求解。本文限于讨论物理非线性问题(下文中非线性一词均指物理非线性)，即在小变形的范围内，基于简化的非线性本构关系试图找到一个求解非线性粘弹性问题的对应原理。该原理采用了与经典对应原理完全不同的思路。

2　粘弹性本构关系与弹性本构关系的对应

2.1 现时应力(或现时应变)与回复弹性应力(或回复弹性应变)之间的关系

采用正交笛卡儿坐标系 $\{x_i\}$。设 $s_{ij}(x_k,t)$、$e_{ij}(x_k,t)$ 和 $u_i(x_k,t)$ $(i, j=1,2,3)$ 分别表示现时应力张量、现时应变张量和现时位移矢量的分量。假设粘弹性材料具有瞬时弹性响应。$s^e_{ij}(x_k,t)$ 与 $e^e_{ij}(x_k,t)$ 和 $u^e_i(x_k,t)$ 分别表示瞬时弹性应力张量、瞬时弹性应变张量和瞬时弹性位移矢量的分量。材料具有弹性性能的定义为[8]：材料服从热力学第一和第二定律，而且其加载过程是可逆的。由此推得，存在应变能函数 $W=W(e^e_{ij},x_k,t)$，以及余能函数 $W_c=-W+s^e_{ij}e^e_{ij}=W_c(s^e_{ij},x_k,t)$ 使得

$$s^e_{ij}=\partial W/\partial e^e_{ij},\qquad e^e_{ij}=\partial W_c/\partial s^e_{ij}\tag{1}$$

式(1)定义了非线性(含线性)弹性应力应变关系。非线性粘弹性材料的瞬时弹性应力、应变分量服从非线性弹性力学的规律，而其现时应力、应变分量服

———————————————

收稿日期：2000-07-05；修改日期：2000-11-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19772045)
作者简介：张淳源(1934)，男，湖南醴陵人，教授，《物理化学力学进展》副主编，主要从事力学研究
张为民(1968)，男，讲师，硕士，从事力学研究

从非线性粘弹性力学的规律。为了建立非线性粘弹性–非线性弹性对应原理，首先来寻求 $s_{ij}-s_{ij}^{e}$ 或 $e_{ij}-e_{ij}^{e}$ 关系。为了得到一个简单实用的对应原理，有必要对非线性粘弹性本构关系进行简化。在一维情况下的 Volterra-Frechet 展开关系式

$$
\begin{aligned}
e(t) &= \int_{-\infty}^{t} D_1(t-t_1)\mathrm{d}s(t_1) \\
&+ \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} D_2(t-t_1,t-t_2)\mathrm{d}s(t_1)\mathrm{d}s(t_2)+\cdots
\end{aligned} \tag{2}
$$

或其逆式

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{t} E_1(t-t_1)\mathrm{d}e(t_1) \\
&+ \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} E_2(t-t_1,t-t_2)\mathrm{d}e(t_1)\mathrm{d}e(t_2)+\cdots
\end{aligned} \tag{3}
$$

中，为了与实验拟合，常常需要较多的核函数 D_i (或 E_i)，而且很难求出其逆式，不便于应用。仿照 Rabotnov[4]，假设 D_i 可以写为 i 个不同变量的类函数的乘积：

$$
D_i(t-t_1,t-t_2,\ldots t-t_i)=a_i\prod_{k=1}^{i}D_s^r(t-t_k) \tag{4}
$$

式中 $D_s^r(t)\equiv D_s(t)/D_s$ 称为相对蠕变柔量，$D_s(t)$ 为蠕变柔量，$D_s\equiv D_s(0)$ 为瞬时柔量，a_i 为系数，下标“ s ”表示它用于 s^e-s 的关系式。以(4)代入式(2)，并定义 $s^e(t)$ 为如下 Stieltjes 积分：

$$
s^e(t)=\int_{-\infty}^{t} D_s^r(t-t)\,\mathrm{d}s(t) \tag{5}
$$

则式(2)可以重写为

$$
e(t)=a_1 s^e(t)+a_2[s^e(t)]^2+a_3[s^e(t)]^3+\ldots \tag{6}
$$

级数(6)定义了作为 $s^e(t)$ 函数的 $e(t)$ 。设其反函数为

$$
s^e(t)=j[e(t)] \tag{7}
$$

上式只与 t 有关而与过去时刻 t 无关，它定义了瞬时弹性应力应变关系。由式(5)和(7)，有

$$
s^e(t)=j[e(t)]=\int_{-\infty}^{t} D_s^r(t-t)\mathrm{d}s(t) \tag{8}
$$

式(8)就是 Rabotnov 提出的简化一维非线性粘弹性本构关系。它的实用性已经被许多材料的实验所证实[4, 9]。式(7)可以解释为：若已知应变 $e(t)$ ，视它为输入，则现时应变 $e(t)$ 本身就是瞬时应变，即 $e(t)=e^e(t)$ ，相当于下面式(10)中 $E_e^r(t)=H(t)$ ，$H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数(参见式(16))。由现时应力 $s(t)$ 通过遗传性积分式(5)求出回复弹性应力 $s^e(t)$ ，则它与瞬时应变的关系就是回复弹性应力应变关系式(7)。类似地，假设

$$
E_i(t-t_1,t-t_2,\ldots t-t_i)=b_i\prod_{k=1}^{i}E_e^r(t-t_k) \tag{9}
$$

式中 $E_e^r(t)\equiv E_e(t)/E_e$ 称为相对松弛模量，$E_e(t)$ 称为松弛模量，$E_e\equiv E_e(0)$ 为瞬时模量，b_i 为系数，下标“ e ”表示它用于 e^e-e 的关系式。定义

$$
e^e(t)=\int_{-\infty}^{t} E_e^r(t-t)\mathrm{d}e(t) \tag{10}
$$

不难推得

$$
e^e(t)=y[s(t)] \tag{11}
$$

$$
e^e(t)=y[s(t)]=\int_{-\infty}^{t} E_e^r(t-t)\mathrm{d}e(t) \tag{12}
$$

式(11)可解释为：若已知应力 $s(t)$ ，视它为输入，则 $s(t)=s^e(t)$ ，相当于式(5)中 $D_s^r(t)=H(t)$ 。由现时应变 $e(t)$ 按式(10)求出回复弹性应变 $e^e(t)$ ，则它与瞬时应力的关系就是回复弹性应力应变关系式(11)，它是式(7)的逆式。这样，已知现时应力响应 $s(t)$ (或现时应变响应 $e(t)$)，依式(5)（或式(10)）可以求出回复弹性应力 $s^e(t)$ (或回复弹性应变 $e^e(t)$)。

比较 Rabotnov、Schapery 和我们对于式(7)的解释是有益的。除记号略有不同外，Rabotnov 或 Schapery 分别称式(7)的左端为修正应力或伪应力。与 Schapery 工作的主要不同点在于：在给定应变 $e(t)$ 时，他将输入的应变 $e(t)$ 通过类似式(10)的遗传性积分化为伪应变 e^0 (或 e^R)。然后，希望 e^0 与现时应力 s 的关系成为弹性关系，但他的目的未真正实现。与此相反，我们认为输入应变本身就是瞬时应变 $e(t)=e^e(t)$ ，而将现时应力 $s(t)$ 通过遗传性积分(5)化为回复弹性应力，然后将式(7)视为回复弹性应力－应变关系。

按照 Gurtin 和 Sternberg[10]的处理方法，采用 Stieltjes 卷积的记号，并假设当 $t<0$ 时 $s(t)=e(t)=0$ ；由于非逆行公理，$t<0$ 时，$D_s(t)=D_e(t)=E_s(t)=E_e(t)=0$ 。一般，设两个函数 $j(t)$ 和 $y(t)$ 于 $0\le t<\infty$ 连续；$t<0$ 时，$j(t)=y(t)=0$ ；在 $t=0$ 时函数的值可以有跳跃：$t=0^+$ 时，$j(t)=j(0^+)$ ，$y(t)=y(0^+)$ ，则两个函数的 Stieltjes 卷积定义为：

$$
\begin{aligned}
j*\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{t} j(t-t)\,\mathrm{d}y(t) \\
&= y(0^+)j(t)+\int_{0^+}^{t} j(t-t)\,\mathrm{d}y(t)
\end{aligned} \tag{13}
$$

式中第一项为瞬时项，它反映 $t=0^+$ 的瞬时跳跃值 $y(0^+)$ 对 Stieltjes 积分的贡献，第二项为遗传性项，

它反映t 时刻的$y(t)$ 值对t时刻的$j*\mathrm{d}y$ 值的贡献的总和。下面的推导中将用到 Stieltjes 卷积的交换律、结合律及函数与单位阶跃函数的 Stieltjes 卷积的性质：

$$j*\mathrm{d}y = y*\mathrm{d}j \tag{14}$$

$$j*\mathrm{d}(y*\mathrm{d}w) = (j*\mathrm{d}y)*\mathrm{d}w = j*\mathrm{d}y*\mathrm{d}w \tag{15}$$

$$j*\mathrm{d}H = H*\mathrm{d}j = j \tag{16}$$

式中 $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数。

对式(5)和(10)求解第二类 Volterra 积分方程：分别以 E_s^r 和 D_e^r 对等式(5)和(10)的两端作 Stieltjes 卷积，利用式(14)~(16)并要求 $E_s^r(t)$ (或 $E_e^r(t)$)与 $D_e^r(t)$ (或 $D_e^r(t)$)的 Stieltjes 卷积为 Heaviside 单位阶跃函数 $H(t)$ ：

$$\begin{aligned} E_s^r*\mathrm{d}D_s^r &= D_s^r*\mathrm{d}E_s^r = H(t) \\ E_e^r*\mathrm{d}D_e^r &= D_e^r*\mathrm{d}E_e^r = H(t) \end{aligned} \tag{17}$$

得

$$s(t) = E^r{}_s*\mathrm{d}s^e = \int_{-\infty}^{t} E^r{}_s(t-t)\mathrm{d}s^e(t) \tag{18}$$

$$e(t) = D^r{}_e*\mathrm{d}e^e = \int_{-\infty}^{t} D^r{}_e(t-t)\mathrm{d}e^e(t) \tag{19}$$

将式(5)、(10)、(18)和(19)推广到三维情况，并假设材料是各向同性的。因为弹性体或相应的粘弹性体只有两个独立常数或材料函数，若假设两个材料函数成比例(如假设 Poisson 比为常数、或体变模量为常数或不可压缩假设等)，则只需用一个材料核函数 $E_s(t)$ (或 $E_e(t)$)描写，而 $D_s(t)$ (或 $D_e(t)$)可以由式(17)确定，此时有

$$\begin{aligned} s_{ij}^e(t) &= D_s^r*\mathrm{d}s_{ij} = \int_{-\infty}^{t} D_s^r(t-t)\,\mathrm{d}s_{ij}(t) \\ s_{ij}(t) &= E_s^r*\mathrm{d}s_{ij}^e = \int_{-\infty}^{t} E_s^r(t-t)\,\mathrm{d}s_{ij}^e(t) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} e_{ij}^e(t) &= E_e^r*\mathrm{d}e_{ij} = \int_{-\infty}^{t} E_e^r(t-t)\mathrm{d}e_{ij}(t) \\ e_{ij}(t) &= D_e^r*\mathrm{d}e_{ij}^e = \int_{-\infty}^{t} D_e^r(t-t)\mathrm{d}e_{ij}^e(t) \end{aligned} \tag{21}$$

瞬时柔量和瞬时模量有关系式： $E_s = 1/D_s$ 或 $E_e = 1/D_e$ 。式(20)、(21)给出了现时应力(或应变)与回复弹性应力(或应变)之间的对应关系。

必须着重指出：在应力关系式(20)和应变关系式(21)中，相对松弛模量采用了不同的记号 $E_s^r(t)$ 和 $E_e^r(t)$ ，它们不必相等；同样，相对蠕变柔量 $D_s^r(t)$ 和 $D_e^r(t)$ 也不必相等。这一方面是由于本构关系采用单积分的近似性。另一方面主要是因为 $s-e$ 关系中，一个是给定的输入量，其现时值就是瞬时值。另一个是响应量，它的现时值有遗传性效应。例如若已知 $s_{ij}(t)$ ，则输入量 $s_{ij}(t) = s_{ij}^e(t)$ ，由(20)、(16)可见， $D_s^r(t) = E_s^r(t) = H(t)$ ，而响应量 $e_{ij}(t) \neq e_{ij}^e(t)$ ，即式(21)中的 $D_e^r(t) \neq H(t)$ ， $E_e^r(t) \neq H(t)$ 。若已知 $e_{ij}(t)$ ，则输入量 $e_{ij}(t) = e_{ij}^e(t)$, 由(21)、(16)可见， $D_e^r(t) = E_e^r(t) = H(t)$ ，而响应量 $s_{ij}(t) \neq s_{ij}^e(t)$ ，即式(20)中 $D_s^r(t) \neq H(t)$ ， $E_s^r(t) \neq H(t)$ 。这一事实在下节中将用到。

这里蠕变柔量 $D_s(t)$ 的定义不依赖于应力，松弛模量 $E_s(t)$ 的定义不依赖于应变。它与线性粘弹性力学的定义在形式上不同，但意义是一致的。例如在一维线性粘弹性情况下，已知应变 $e(t)$ 时，将 $s^e(t) = E_s e(t)$ 代入式(18)，便得到线粘弹性力学的本构关系：

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} [E_s(t-t)/E_s]\mathrm{d}[E_s e(t)] = E_s*\mathrm{d}e \tag{22}$$

2.2 简化的非线性粘弹性本构方程

小变形情况下，对于服从假设式(4)和(9)的一类物理非线性粘弹性材料，其本构关系是首先依式(20)$_1$或(21)$_1$求出回复弹性应力或回复弹性应变，然后通过非线性弹性应力应变关系式(1)将非线性粘弹性体中的现时应力应变相关联的(见图 1，图 2)。

已知应变 $e_{ij}(t)$ 时， $e_{ij}(t) = e_{ij}^e(t)$ ，相当于式(21)中 $E_e^r(t) = D_e^r(t) = H(t)$ ，由式(20)、(1)$_1$ 及 Stieltjes 卷积的交换律得

$$\begin{aligned} & s_{ij}(t)*\mathrm{d}D_s^r = \partial W/\partial e_{ij} \\ \text{或}\quad & s_{ij}(t) = (\partial W/\partial e_{ij})*\mathrm{d}E_s^r \end{aligned} \tag{23$_1$}$$

在线性粘弹性的特殊情况下，以 Poisson 比为常数的情况为例，上式化为：

$$s_{ij}(t) = (l e_{kk} d_{ij} + 2G e_{ij})*\mathrm{d}E_s^r \tag{23$_2$}$$

式中 d_{ij} 为 Kronecker 符号。 $d_{ij} = 1, (i = j); d_{ij} = 0, (i \neq j)$ 。

已知应力 $s_{ij}(t)$ 时， $s_{ij}(t) = s_{ij}^e(t)$ ，相当于式(20)中 $D_s^r(t) = E_s^r(t) = H(t)$ ，由式(21)、(1)$_2$ 及 Stieltjes 卷积的交换律得

$$\begin{aligned} & e_{ij}(t)*\mathrm{d}E_e^r = \partial W_c/\partial s_{ij} \\ \text{或}\quad & e_{ij}(t) = (\partial W_c/\partial s_{ij})*\mathrm{d}D_e^r \end{aligned} \tag{24$_1$}$$

在线性粘弹性的特殊情况下，以 Poisson 比为常数的情况为例，上式化为：

$$e_{ij}(t) = [(1+n)D_s s_{ij} - nD_s s_{kk} d_{ij}]*\mathrm{d}D_e^r \tag{24$_2$}$$

不难验证(23)$_2$、(24)$_2$ 和线粘弹性力学中 $n =$ 常数时的畸变方程及体变方程是等价的。

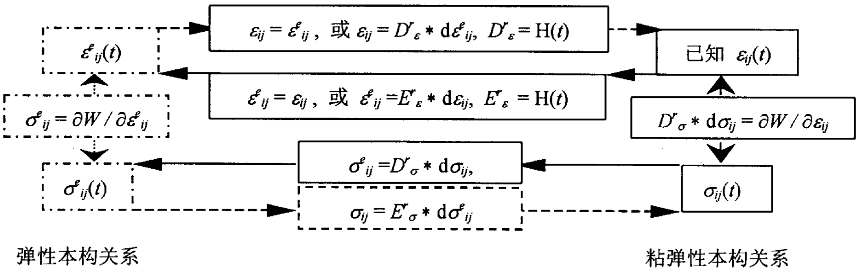

图 1 已知 e_{ij} 时，粘弹性本构关系可以通过(20)、(21)及弹性本构关系$(1)_1$建立起来

Fig.1 If the strains e_{ij} are known, the viscoelastic constitutive relations can be established through (20),(21) and the elastic constitutive relations $(1)_1$

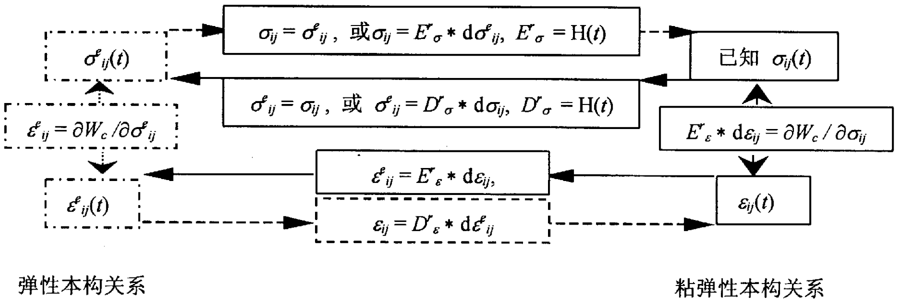

图 2 已知 s_{ij} 时，粘弹性本构关系可以通过(20)、(21)及弹性本构关系$(1)_2$建立起来

Fig.2 If the stresses s_{ij} are known, viscoelastic constitutive relations can be established through (20),(21) and the elastic constitutive relations $(1)_2$

3 弹性回复对应原理

线性粘弹性力学中对应原理有两类推导方法：基于积分变换的对应原理和基于积分算子的 Volterra 原理，将其推广到非线性情况均有困难。所以下面的对应原理将基于完全不同的思路：不是利用本构关系之间的相似性，而是利用非线性粘弹性现时应力(或应变)到瞬时弹性应力(或应变)的可回复性，即式$(20)_1$、$(21)_1$。现在我们来建立非线性粘弹性–非线性弹性对应原理。该原理同样适用于线性粘弹性问题的特殊情况，其正确性也可通过线性粘弹性问题来验证。

3.1 非线性弹性问题的基本方程

设物体为单连通体(对于多连通平面问题则假设物体每一边界围线上的主矢量均为零)，体内给定了体力 F_i^e，表面上给定了面力 T_i^e 或给定了位移 U_i^e，则小变形、准静态、各向同性非线性弹性问题的基本方程如下：

平衡方程：

$$s^e_{ij,j}+F_i^e=0 \tag{25}$$

几何方程：

$$e^e_{ij}=\frac{1}{2}(u^e_{i,j}+u^e_{j,i}) \tag{26}$$

本构方程：

$$e^e_{ij}=\partial W_c/\partial s^e_{ij} \tag{27}$$

或

$$s^e_{ij}=\partial W/\partial e^e_{ij} \tag{28}$$

第一类边界条件：S_T 上给定面力；S_U 上位移分量(或法向位移，或切向位移)为零

$$\begin{cases} s^e_{ij}n_j=T_i^e, & \text{在 } S_T \text{上} \\ u_i^e=U_i^e=0, (\text{或} U_n^e=0, \text{或} U_s^e=0), & \text{在 } S_U \text{上} \end{cases} \tag{29}$$

第二类边界条件：S_U 上给定位移；S_T 上面力分量(或法向面力，或切向面力)为零

$$\begin{cases} s^e_{ij}n_j=T_i^e=0, (\text{或} T_n^e=0, \text{或} T_s^e=0), & \text{在 } S_T \text{上} \\ u_i^e=U_i^e, & \text{在} S_U \text{上} \end{cases} \tag{30}$$

3.2 非线性粘弹性问题的基本方程

设物体几何形状与上面完全相同；边界条件也完全相同，即体内给定了体力 $F_i=F_i^e$，表面上给定了面力 $T_i=T_i^e$ 或给定了位移 $U_i=U_i^e$，则小变形、准静态、各向同性(设各材料函数成比例)非线性粘弹性问题的基本方程如下：

平衡方程：

$$s_{ij,j}+F_i=0 \tag{31}$$

几何方程：

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{32}$$

本构方程：

$$e_{ij}(t)=(\partial W_c/\partial s_{ij})*\mathrm{d}D_e^e \tag{33}$$

或

$$s_{ij}(t)=(\partial W/\partial e_{ij})*\mathrm{d}E_s^r \tag{34}$$

第一类边界条件：S_T **上给定面力；**S_U **上位移分量(或法向位移，或切向位移)为零**

$$\begin{cases} s_{ij}n_j=T_i, & \text{在}S_T\text{上} \\ u_i=U_i=0\ (\text{或}\,u_n=0,\text{或}\,u_s=0), & \text{在}\,S_U\text{上} \end{cases} \tag{35}$$

式中 $S_T\cup S_U=S$，S **为总表面。设边界区域不随时间而变，特殊情况下** S_U **可以为零。**

第二类边界条件：S_U **上给定位移；**S_T **上面力分量(或法向面力，或切向面力)为零**

$$\begin{cases} s_{ij}n_j=T_i=0\ (\text{或}T_n=0,\text{或}\,T_s=0), & \text{在}S_T\text{上} \\ u_i=U_i, & \text{在}\,S_U\text{上} \end{cases} \tag{36}$$

设边界区域不随时间而变，特殊情况下 S_T **可以为零。**

3.3 弹性回复对应原理

由式(21)、(26)、(32)**以及对于空间变量** x_j **的微分和对于遗传性积分变量** t **的积分的可交换性,不难得到现时位移和回复弹性位移之间的关系：**

$$u_i^e(t)=E_e^r(t)*\mathrm{d}u_i(t),\quad u_i(t)=D_e^r(t)*\mathrm{d}u_i^e(t) \tag{37}$$

类似地，由式(20)、(29)$_1$、(35)$_1$**及**(37)、(30)$_2$、(36)$_2$ **分别有**

$$T_i^e(t)=D_s^r(t)*\mathrm{d}T_i(t),\quad T_i(t)=E_s^r(t)*\mathrm{d}T_i^e(t) \tag{38}$$

$$U_i^e(t)=E_e^r(t)*\mathrm{d}U_i(t),\ U_i(t)=D_e^r(t)*\mathrm{d}U_i^e(t) \tag{39}$$

对应原理一：对于物体内部给定体力 F_i **、表面上给定第一类边界条件的非线性粘弹性问题（式**(31)~(33)**和**(35)**）的解是：**

$$\begin{aligned} &s_{ij}(t)=s^e{}_{ij}(t) \\ &e_{ij}(t)=D_e^r(t)*\mathrm{d}e_{ij}^e(t) \\ &u_i(t)=D_e^r(t)*\mathrm{d}u_i^e(t) \end{aligned} \tag{40}$$

式中 e_{ij}^e,s_{ij}^e,u_i^e **为受力和几何情况完全相同的相应非线性弹性问题(式**(25)~(27)**和**(29))**中取** $F_i^e=F_i$ **；**S_T **上取** $T_i^e=T_i$**，** S_U **上** U_i^e **(或** U_n^e **或** U_s^e **)=**U_i **(或** U_n **或** U_s **)=0 所求得的解。**

由于这类问题的体力 F_i **和面力** T_i **是给定的，他们就是瞬时值：** $F_i=F_i^e$ **；** $T_i=T_i^e$ **，从而由式**(38)**和**(16)**推出** $D_s^r(t)=E_s^r(t)=H(t)$**。以此代入式**(20)**并利用式**(16)**便得到式**(40)$_1$**，即这种情况下非线性粘弹性问题的应力与非线性弹性问题的应力相同。由于** S_U **上给定的表面位移为零** $U_i=U_i^e=0$**，从式**(39)**不能对** $D_e^r(t)$ **和** $E_e^r(t)$ **有任何限制。**

证明：要证明式(40)**确是所论问题的解，只需将它代入相应的方程即可。以** $s_{ij}=s_{ij}^e$ **代入式**(31)、(33)**和**(35)$_1$ **并注意到式**(21)$_2$**，及** $F_i=F_i^e$ **；** $T_i=T_i^e$**，得到与式**(25)、(27)**和**(29)$_1$ **完全相同的方程，自然是满足的；以式**(40)$_{2,3}$**代入式**(32)**，**(35)$_2$**得**

$$D_e^r*\mathrm{d}e_{ij}^e=D_e^r*[\frac{1}{2}u_{i,j}^e+u_{j,i}^e];\quad u_i=D_e^r*\mathrm{d}u_i^e=0,$$

在S_U**上**

这里用到对空间变量的微分和对时间变量的遗传性积分的可交换性，由于式(26)、(29)$_2$**，上两式也是满足的。所以式**(40)**的确是所论非线性粘弹性问题的解。**

对应原理二：对于物体内部无体力 $F_i=0$ **、表面上给定第二类边界条件的非线性粘弹性问题(式**(31)、(32)、(34)**和**(36))**的解是：**

$$u_i=u_i^e,\quad e_{ij}=e_{ij}^e,\quad s_{ij}(t)=E_s^r(t)*\mathrm{d}s_{ij}^e(t) \tag{41}$$

式中 e_{ij}^e,s_{ij}^e,u_i^e **为受力和几何情况相同的相应非线性弹性问题(式**(25)、(26)、(28)**和**(30))**中取** $F_i^e=F_i=0$ **；**S_U **上取** $U_i^e=U_i$ **，** S_T **上取** T_i^e **(或** T_n^e **或** T_s^e **) =** T_i **(或** T_n **或** T_s **) = 0 所求得的解。**

由于这类问题的位移 U_i **是给定的，他们就是瞬时值：** $U_i=U_i^e$ **，从而由式**(39)**和**(16)**推出** $E_e^r(t)=D_e^r(t)=H(t)$**。以此代入式**(37)、(21)**并利用式**(16)**便得到式**(41)$_{1,2}$**，即这种情况下非线性粘弹性问题的位移和应变与非线性弹性问题的位移和应变相同。由于** S_T **上给定的面力为零(** $T_i=T_i^e=0$ **)，从式**(38)**不能对** $D_s^r(t)$ **和** $E_s^r(t)$ **有任何限制。给定的体力** $F_i=F_i^e=0$**，也未对材料函数加以限制。**

证明：要证明式(41)**确是所论问题的解，只需将它代入相应的方程即可。以式**(41)$_{1,2}$ **代入式**(32)**和**(36)$_2$**，并注意到** $U_i=U_i^e$ **可得到与式**(26)、(30)$_2$ **完全相同的方程。以式**(41)$_3$**代入式**(31)、(34)、(36)$_1$**，注意到** $F_i=F_i^e=0$ **，** S_T **上** $T_i^e=T_i=0$ **及式**(41)$_2$**，可得**

$$[E_s^r*\mathrm{d}s_{ij}^e]_{,j}=E_s^r*\mathrm{d}s_{ij,j}^e=0$$

$$E_s^r*\mathrm{d}s_{ij}^e=s_{ij}^e*\mathrm{d}E_s^r=(\partial W/\partial e_{ij}^e)*\mathrm{d}E_s^r$$

$$[E_s^r*\mathrm{d}s_{ij}^e]n_j=E_s^r*\mathrm{d}[s_{ij}^e n_j]=E_s^r*\mathrm{d}[T_i^e]=0$$

由于式(25)、(28)、(30)$_1$，上述各式都是满足的。所以式(41)的确是所论非线性粘弹性问题的解。

4　实验验证

为了验证上述理论，对改性聚丙烯材料进行了单轴应力状态实验，包括松弛、蠕变、及准静态等幅循环应变等。下面给出等幅循环应变实验与理论的比较。采用 250mm×50mm×3.8mm **的改性聚丙烯试件，标距为** 50mm，**横截面面积** A=192.66mm^2，**在** INSTRON **试验机上采用应变速率±**0.00127/s **和应变幅度** 0.029 **作九个等应变幅单轴加载－卸载试验(图** 3)。**实验数据直接输入计算机，采用** Origin **软件进行数据整理，采用** MathCAD **软件进行数值计算。现时应力－时间关系的实验点见图**4**中的◇。现时应力－应变关系的实验点见图** 5 **中的◇。依对应原理二，无体积力的单轴应力状态下，在试件长度方向的两个端面给定位移，其他表面为自由时，物理非线性粘弹性问题的解由式**(41)**确定。此时，**$e(t)=e^e(t)$**。以瞬时弹性应力应变关系** $s^e=j(e)$ **(式**(7))**代入式**(41)$_3$ **并利用** Stieltjes **卷积的交换律得到横截面上的现时应力如下：**

$$
\begin{aligned}
s(t) &= j[e(t)] * \mathrm{d}E_s^r(t) \\
&= j[e(t)] + \int_{0^+}^{t} j[e(t-t)] * \mathrm{d}E_s^r(t)
\end{aligned}
\tag{42}
$$

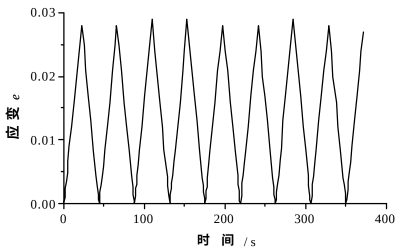

图 3　**等应变幅单轴加载－卸载曲线**

Fig.3　Prescribed uniaxial equal-strain-amplitude loading-unloading curve

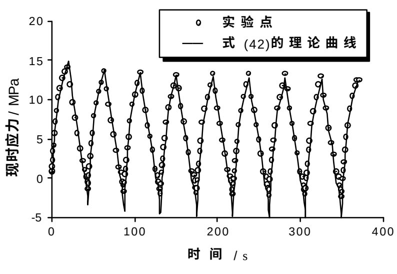

图 4　**现时应力－时间曲线**

Fig.4　Current stress-time curve

相对蠕变柔量和相对松弛模量采用可以与实验结果吻合得很好的如下方程[11]**：**

$$
\begin{aligned}
D^r{}_s(t) &= D_s(t)/D_s \\
&= 1+[(D_{s\infty}/D_s)-1][1-\exp(-b[(1+a)t]^{1-a})]
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
E_s^r(t) &= E_s(t)/E_s \\
&= 1-[1-(E_{s\infty}/E_s)][1-\exp(-b_1[(1+a)t]^{1-a})]
\end{aligned}
\tag{44}
$$

式中有参数 $a, b, b_1 (0<a<1, b>0, b_1>0)$ **，瞬时柔量** D_s **，长期柔量** $D_{s\infty}$ **，瞬时模量** E_s **，长期模量** $E_{s\infty}$ **等。式**(42)**中的瞬时弹性应力应变关系** $s^e=j(e)$ **通常可以通过不同应力(或不同应变)下一系列的蠕变曲线(或松弛曲线)作** $t=0$ **的等时曲线而得到**[4, 9]**。这里采用另一种简单的方法：调整蠕变柔量式**(43)**中的参数** $a, b, D_{s\infty}/D_s$ **，使得由实验得到的** $s(t)-e(t)$ **实验点(图** 5 **中的◇）通过式**(5)**求出的九个循环的回复弹性应力－应变关系的实验点(图** 6 **中的◇)尽可能重合，这些点离瞬时弹性应力应变曲线应该不远，今取其平均值(图** 6 **中的实线)作为瞬时弹性应力应变曲线** $s^e=j(e)$ **。这些点可用以下方程来拟合：**

$$
\begin{aligned}
s^e &= j(e) \\
&= ke\{1-c[1-\exp(-b[(1+a)e]^{(1-a)})]\}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

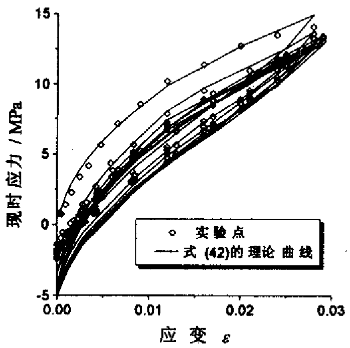

图 5　**现时应力－应变曲线**

Fig.5　Current stress-strain curve

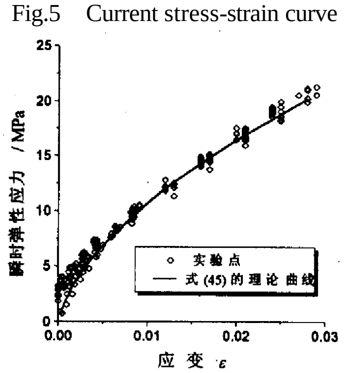

图 6　**瞬时弹性应力－应变曲线**

Fig.6　Instantaneous stress-strain curve

式中 k = 4300MPa, a = 0.63, b =8.6, c =0.89。按式(45)画出的瞬时弹性应力应变曲线即图 6 和图 7 中的实线。再调整式(44)中的参数 b_1 使式(17)得到满足。按此方法确定的式(43)和(44)中的参数为：

$$a = 0.52,\quad b = 0.099s^{a-1},\quad b_1 = 0.18s^{a-1}$$
$$E_{s\,\infty} / E_s = D_s / D_{s\,\infty} = 0.445$$

以式(45)代入式(42)求出的现时应力与时间的曲线见图 4 中的实线，现时应力－应变曲线见图 5 中的实线，在九个循环中它们分别与图 4 和图 5 中的实验点◇吻合得相当好。这就证明了单积分形式的本构关系式(33)、(34)的实用性和弹性回复对应原理的正确性。

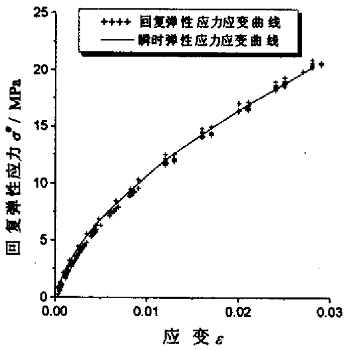

图 7　回复弹性应力－应变曲线

Fig.7　Recovered elastic stress-strain curve

回复弹性应力由式(5)确定

$$\begin{aligned} s^{e}(t) &= \int_{-\infty}^{t} D_s^r (t-t)\,\mathrm{d}s(t) \\ &= D_s^r(t)s(0) + \int_{0^+}^{t} D_s^r (t-t)\,\mathrm{d}s(t) \end{aligned} \tag{46}$$

按式(46)求出的回复弹性应力－应变关系见图 7 中的+，它与瞬时弹性应力－应变曲线(图 7 中的实线)吻合很好。不仅九个循环加载卸载的回复弹性应力－应变关系完全与瞬时弹性应力－应变曲线重合，而且当回复弹性应力卸载到零时，应变也回复到零，完全符合弹性性能的要求。证明了物理非线性粘弹性本构关系与物理非线性弹性本构关系之间的对应性。很小的误差是由于封闭形式的蠕变柔量和松弛模量的解析表达式(43)和(44)在调整参数 b_1 用数值方法满足式(17)时存在 4%的最大误差。

我们与 Rabotnov 和 Schapery 工作的主要区别是：我们将给定的输入量等于瞬时值：$F_i^e = F_i$; $T_i^e = T_i; U_i^e = U_i$。我们建立的是现时粘弹性响应物体和瞬时弹性响应物体的解之间的对应关系。但 Rabotnov 和 Schapery 却把给定的体力或边界值通过遗传性积分作为相应伪弹性问题的体力或边界值。Schapery 建立的是粘弹性物体和伪弹性问题解之间的对应关系。因为伪应变－应力关系不是真正的弹性关系，他的对应原理的正确性成为可疑。

5　结论

本文采用简化单积分形式的物理非线性粘弹性本构关系。在此基础上提出了现时应力(或应变)与瞬时(或回复)应力(或应变)的对应关系以及求解非线性粘弹性问题的弹性回复对应原理。通过理论与改性聚丙烯材料实验结果的比较，验证了本文理论对于这类材料的实用性和弹性回复对应原理的正确性。弹性回复对应原理的正确性还可以通过已知的线性粘弹性问题这种特殊情况来证明。原则上说，只要材料性能满足式(4)和(9)的假设，上述理论即可以应用。基于这些假设得到的简化的单积分形式的物理非线性粘弹性本构关系对于某些聚合物、某些铝合金、高温下的某些合金钢、某些软粘土等许多材料的实用性在一维情况下已经得到实验证实[4, 9]。至于哪些具体材料可以应用还有待进一步实验。

参考文献：

[1] 张淳源，张为民．非线性粘弹性本构理论中的弹性回复对应原理[J]．湘潭大学自然科学学报，1998, 20(3): 59-65.
Zhang Chun-yuan, Zhang Weimin. Elasticity recovery correspondence principle in nonlinear constitutive theory[J]. Natural Sci. J. of Xiangtan University, 1998, 20(3): 59-65.

[2] 张淳源．粘弹性断裂力学[M]．武昌：华中理工大学出版社, 1994.
Zhang Chunyuan. Viscoelastic fracture mechanics[M]. Wuchang: Huazhong Univ. of Sci. and Tech. Press, 1994.

[3] R M Christensen. Theory of viscoelasticity-an introduction[M]. Academic Press, New York, 1982.

[4] Yu N Rabotnov. Elements of hereditary solid mechanics[M]. Moscow: Mir Publ., 1980.

[5] R A Schapery. Models for damage growth and fracture in nonlinear viscoelastic particulate composites[A]. In: Proc. Ninth U. S. National Congress of Applied Mechanics[C]. The American Society of Mechanical Engineering, 1982. 237-245.

[6] R A Schapery. Correspondence principle and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media [J]. Int. J. of Fracture, 1984,

25: 195-223.

[7] 胡强，童忠钫. 非线性粘弹性拟静态问题与非线性弹性静力问题对应原理[J]. 应用力学学报，1991, 8(1): 63-66.
Hu Qiang, Dong Zhongfang. Correspondence principle for nonlinear viscoelastic quasi-static problems and nonlinear elastic problems[J]. Chinese J. of Appl. Mech., 1991,8(1):63-66.

[8] Y C Fung. Foundations of solid mechanics [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1965.

[9] 孙均. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京：中国建筑出版社, 1999.
Sun Jun. Rheology of geotechnical materials and its applications[M]. Beijing: Architectural Industry Publisher, 1999.

[10] M E Gurtin and E Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity[J]. Arch. Ration. Mech. Anal., 1962,11:291-356.

[11] 张为民. 松弛模量与蠕变柔量的实用表达式[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1999, 21(3): 26-28.
Zhang Weimin. Practical expressions of relaxation modulus and creep compliance[J]. Natural Sci. J. of Xiangtan University, 1999,21(3): 26-28.

ELASTICITY RECOVERY CORRESPONDENCE PRINCIPLE FOR SOLVING A CLASS OF NONLINEAR VISCOELASTIC PROBLEMS

ZHANG Chun-yuan, ZHANG Wei-min

(Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105)

Abstract: A new theoretical system of viscoelasticity, which includes the traditional linear viscoelasticity as its special case, is proposed in this paper. The main results of this theory are two elasticity recovery correspondence principles, which are used for solving a class of physically nonlinear viscoelastic problems. By means of which, the solution of a nonlinear viscoelastic problem can be obtained if the solution of the corresponding nonlinear elastic problem is known. Correspondence principles are not based upon the similarity of the constitutive relations. Rather, they are based upon the recoverability from the present viscoelastic responses to the instantaneous elastic responses. The correspondence between the nonlinear viscoelastic and the nonlinear elastic constitutive relations is found first, and then two elasticity recovery correspondence principles are deduced. It is shown by the experiments for improved polypropylene that these principles are valid and are applicable to such class of materials.

Key words: nonlinear viscoelasticity; constitutive relations; correspondence principle