

文章编号: 1000-4750(2006)09-0114-06

# 二维土-结构地震动力相互作用时域有限元分析

\*邱流潮<sup>1</sup>, 刘 桦<sup>1</sup>, 金 峰<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学工程力学系, 上海 200030; 2. 清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

**摘 要:** 土与结构动力相互作用是地震工程研究中的一个十分重要的课题。给出了分析地震作用下二维土-结构动力相互作用的时域有限元方法。重点放在如何模拟瞬态波在无穷介质中的传播以及如何实现地震动的输入方面。在给出的有限元过程中, 地震动的输入方法以及用于截断无穷介质以获得有限计算域的局部透射人工边界都是基于柱面波动方程推导建立的, 这种方法非常简单有效, 结合 Newmark 时间积分法是无条件稳定的, 使得时域计算有效而可靠。数值算例验证了这种方法的精度和有效性。

**关键词:** 土-结构相互作用; 人工边界; 地震动输入; 地震反应; 时域分析; 有限元法

中图分类号: TU311.3 文献标识码: A

## TIME-DOMAIN FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF TWO DIMENSIONAL SEISMIC SOIL-STRUCTURE INTERACTIONS

\*QIU Liu-chao<sup>1</sup>, LIU Hua<sup>1</sup>, JIN Feng<sup>2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;

2. Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The dynamic soil-structure interaction (SSI) is one of the most important subjects in earthquake engineering. A time-domain finite element method (FEM) for analysis of two dimensional dynamic soil-structure interactions due to seismic excitations is presented. Emphasis is placed on how to simulate transient wave propagation in unbounded media and how to realize the earthquake input. In the proposed finite element procedure, both the method for earthquake input and the local transmitting artificial boundaries for finite analysis domain are established based on the cylindrical wave equation. The proposed method is simple and efficient, and the time-stepping scheme using Newmark's method in conjunction with the method is unconditionally stable, allowing for efficient and reliable time-domain computations. Numerical examples are presented to illustrate the validity and accuracy of the proposed method.

**Key words:** soil-structure interaction (SSI); artificial boundary; earthquake input; seismic response; time-domain analysis; finite element method (FEM)

近年来, 我国工程建设正处于蓬勃发展时期, 其中, 许多已建和正在建设的重大工程项目都处于强震高发区<sup>[1]</sup>, 对这些工程进行深入的地震反应分析具有极其重要的现实意义。影响结构地震反应的

因素很多且十分复杂, 其中, 土-结构动力相互作用是最重要的影响因素之一。因而, 土与结构动力相互作用问题一直都是地震工程研究中的一个十分重要的课题。由于问题十分复杂, 常常采用数值方法

收稿日期: 2004-11-22; 修改日期: 2005-04-28

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(2002CB412709)

作者简介: \*邱流潮(1971), 男, 云南彝良人, 博士后, 主要从事结构工程抗震及流固耦合振动研究(E-mail: qiuliuchao@tsinghua.org.cn);

刘 桦(1964), 男, 浙江临海人, 教授, 博士, 船舶海洋与建筑工程学院常务副院长, 从事水动力学及海岸工程研究;

金 峰(1966), 男, 贵州遵义人, 教授, 博士, 土木水利学院副院长, 从事水利水电工程结构抗震研究。

进行分析,其中,有限元法的应用最为广泛。在实际工程中,大体积建筑物和地基的相互作用,不仅影响结构的动力特性,而且,结构振动的反馈又影响地震动输入。更为重要的是结构振动的能量将沿地基向远处逸散,形成所谓的辐射阻尼效应<sup>[2]</sup>。所以,在土-结构地震动力相互作用分析中,正确实现地震动的输入和地基辐射阻尼的模拟是十分重要的。

对于建在非常刚硬的岩石地基上的轻型柔性建筑结构,结构底部的地震动输入与地表自由场地震运动相同的假设常常是合理的,即刚性地基假设。但是,当建筑结构非常庞大且刚度较大,如混凝土重力坝,而地基又相对较软时,上述刚性地基假设显然是不合理的。在这种情况下,传统的方法是采用 Clough<sup>[3]</sup>提出的无质量地基模型。但无质量地基模型只考虑了地基的柔性,而忽略了地基的惯性和阻尼效应。近来很多研究表明地基惯性和阻尼效应的影响是比较显著的<sup>[1]</sup>,必须在分析中加以考虑。

典型的土-结构动力相互作用问题一般包括任意形状的结构和无限地基。为了进行有限元数值分析,首先要对无限地基进行人工截断以获得有限的计算模型,它由结构和近场地基组成(见图1)。在人工截断边界上需要施加适当的吸收边界条件来模拟无限地基的辐射阻尼效应。这样的边界条件目前发展了很多<sup>[4]</sup>,但在实际的时域有限元分析中,由于 Lysmer<sup>[5]</sup>粘性边界物理意义清晰、处理简单且易于在程序中实现,因而得到广泛的应用。但这种粘性边界通常只适合透射平面波,因而要求人工边界与初始扰动源之间具有足够远的距离才能获得满意的精度<sup>[6]</sup>。本文从柱面波动方程出发,提出了能同时实现地震动输入和透射散射波的方法,由于是直接时域中推求的,因而,本文方法可直接应用于土-结构系统非线性地震反应分析中。

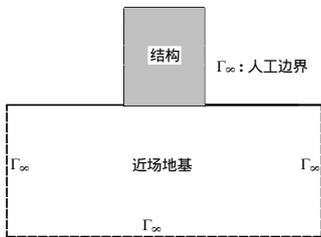


图1 土-结构系统计算模型

Fig.1 Computational model for soil-structure system

## 1 数学公式

对于二维平面应变问题,体波是沿着圆柱波阵

面径向传播的<sup>[7]</sup>。极坐标下的圆柱波动方程为:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1)$$

其中,  $u$  为总场位移,  $r$  表示到散射源的距离,对于柱面 P 波,  $c$  对应压缩波速  $c_p$ ,对于柱面 S 波,  $c$  对应剪切波速  $c_s$ 。

对于沿  $r$  方向传播的柱面 P 波或柱面 S 波,方程(1)的通解可近似表示为<sup>[8]</sup>:

$$v = v_o + v_i \quad (2)$$

$$w = w_o + w_i \quad (3)$$

其中,

$$v_o = f(r - c_s t) / \sqrt{r}, \quad v_i = g(r + c_s t) / \sqrt{r}$$

$$w_o = f(r - c_p t) / \sqrt{r}, \quad w_i = g(r + c_p t) / \sqrt{r}$$

式中  $f$  和  $g$  为任意函数。 $v_o, w_o$  分别表示以速度  $c_s, c_p$  沿  $r$  正方向传播的波,而  $v_i, w_i$  分别表示以速度  $c_s, c_p$  沿  $r$  负方向传播的波。所以,  $v_i$  和  $w_i$  可以看作进入计算域的入射波,  $v_o$  和  $w_o$  可以看作外行波。

人工边界上的微分方程可通过应力应变关系得到。对于沿  $r$  方向传播的 S 波,在任意点处有如下的本构关系成立:

$$\tau(r, t) = G\gamma = \rho c_s^2 \frac{\partial v}{\partial r} = \rho c_s^2 \left( \frac{f'}{\sqrt{r}} - \frac{f}{2r\sqrt{r}} + \frac{g'}{\sqrt{r}} - \frac{g}{2r\sqrt{r}} \right) \quad (4)$$

式中,  $\tau$  为剪应力,  $G$  剪切模量,  $\gamma$  为剪应变,  $\rho$  为密度。联合式(2)、式(4)可得:

$$\tau(r, t) = -\rho c_s \dot{v} - \frac{\rho c_s^2}{2r} v + 2\rho c_s \dot{v}_i \quad (5)$$

式中上标点表示对时间的导数。

如果考虑入射角  $\alpha$ ,即代表波传播方向的单位矢量  $r(r_x, r_y)$  与边界外法向单位矢量  $n(n_x, n_y)$  的夹角(见图2),则式(5)可更一般地表示为:

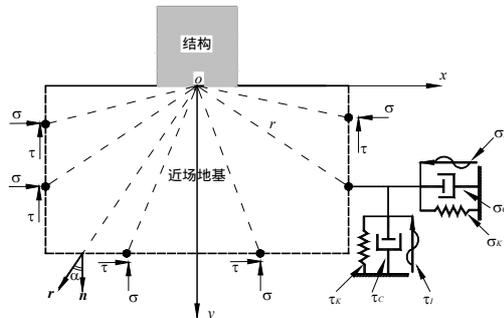


图2 地震动输入与吸收边界示意图

Fig.2 Sketch of absorbing boundary and earthquake input

$$\tau(r,t) = \tau_K + \tau_C + \tau_I \quad (6)$$

其中,  $\tau_K = -\frac{\rho_c^2 \cos \alpha}{2r} v$ ,  $\tau_C = -\rho_c \cos \alpha \dot{v}$ ,  
 $\tau_I = 2\rho_c \cos \alpha \dot{v}_i$ 。

按照上述类似的方式可得到边界上 P 波引起的法向应力:

$$\sigma(r,t) = E\varepsilon = \rho_p^2 \frac{\partial w}{\partial r} = \sigma_K + \sigma_C + \sigma_I \quad (7)$$

其中,  $\sigma_K = -\frac{\rho_p^2 \cos \alpha}{2r} w$ ,  $\sigma_C = -\rho_p \cos \alpha \dot{w}$ ,  
 $\sigma_I = 2\rho_p \cos \alpha \dot{w}_i$ ,  $\sigma$  为法向应力,  $E$  为杨氏模量,  
 $\varepsilon$  为法向应变。

从上述推导中我们注意到  $v$  (或  $w$ ) 以及  $\dot{v}$  (或  $\dot{w}$ ) 分别代表地基总场位移和速度。而  $\dot{v}_i$  (或  $\dot{w}_i$ ) 代表地基入射速度。所以, 式(6)、式(7)中右端第一、二项分别等价于系数为  $\rho_c^2 \cos \alpha / 2r$  (或  $\rho_p^2 \cos \alpha / 2r$ ) 的弹簧产生的力以及由系数为  $\rho_c \cos \alpha$  (或  $\rho_p \cos \alpha$ ) 的阻尼器产生的力, 而第三项为与入射波速成正比的等效力。所以, 在土-结构地震动力相互作用有限元分析中, 首先将无限地基进行人工截断获得有限计算域, 而被截去的远场地基可用一系列沿人工边界布置的弹簧、阻尼器和等效力来代替, 其中, 等效力用来定义地震动输入, 图 2 中给出了详细的示意图。另外, 式(6)、式(7)中  $r$  为人工边界节点到散射源中点的距离, 对于圆形边界,  $r$  为常数, 对于其他形状的边界, 各个边界节点处的  $r$  是不同的, 为散射源中点到相应边界节点的距离。

## 2 有限元实现

根据上述推导, 地震动输入以及吸收边界条件的实现是沿人工边界施加应力来实现的。在如图 2 所示的直角坐标系下, 边界应力式(6)、式(7)可统一表示为:

$$\{\sigma\} = [D_C]\{\dot{u}\} + [D_K]\{u\} + [D_I]\{\dot{u}_i\} \quad (8)$$

其中,

$$[D_C] = -\rho_p \cos \alpha [T] - \rho_c \cos \alpha ([I] - [T])$$

$$[D_K] = -\frac{\rho_p^2}{2r} \cos \alpha [T] - \frac{\rho_c^2}{2r} \cos \alpha ([I] - [T])$$

$$[D_I] = 2\rho_p \cos \alpha [T] + 2\rho_c \cos \alpha ([I] - [T])$$

$$[T] = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_y n_x & n_y^2 \end{bmatrix}$$

式中,  $[I]$  为单位矩阵。

在有限元分析中, 由于上述人工边界条件引入

的应力对整个系统的贡献是通过一维有限元形函数来实现的。假设场运动方程是采用四边形二次等参单元来离散的, 于是与之对应的边界单元为一维二次等参单元, 其形函数很容易得到, 譬如, 对于侧向边界单元形函数可表示为:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\eta) - \frac{1}{2}N_3 \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1+\eta) - \frac{1}{2}N_3 \quad (10)$$

$$N_3 = 1 - \eta^2 \quad (11)$$

于是, 边界单元节点力向量可由下式求得:

$$\{F\}^e = \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\sigma\} d\Gamma \quad (12)$$

其中, 上标  $e$  表示单元,  $[N]$  为形函数矩阵。

将式(8)直接代入式(12)得到:

$$\{F\}^e = [K]^e \{u\}^e + [C]^e \{\dot{u}\}^e + \{P\}^e \quad (13)$$

其中,

$$[K]^e = \int_{\Gamma_e} [N]^T [D_K] [N] d\Gamma$$

$$[C]^e = \int_{\Gamma_e} [N]^T [D_C] [N] d\Gamma$$

$$\{P\}^e = \int_{\Gamma_e} [N]^T [D_I] \{\dot{u}_i\}^e d\Gamma$$

对于粘弹性土-结构系统, 其有限元动力方程可表示为:

$$[M]_{\Omega} \{\ddot{u}\}_{\Omega} + [C]_{\Omega} \{\dot{u}\}_{\Omega} + [K]_{\Omega} \{u\}_{\Omega} + [C]_{\Gamma_e} \{\dot{u}\}_{\Gamma_e} + [K]_{\Gamma_e} \{u\}_{\Gamma_e} = \{P\}_{\Omega} + \{P\}_{\Gamma_e} \quad (14)$$

其中,  $[M]$  为质量矩阵,  $[C]_{\Omega}$  表示材料阻尼矩阵,  $[C]_{\Gamma_e}$  为远场辐射阻尼矩阵,  $[K]_{\Omega}$ ,  $[K]_{\Gamma_e}$  分别表示近场刚度矩阵和远场刚度矩阵,  $\{P\}_{\Omega}$  表示外力向量,  $\{P\}_{\Gamma_e}$  表示地震动输入等效节点力向量。

最后, 求解有限元动力方程(14)时, 时间积分方法采用 Newmark 法, 该方法为无条件稳定的隐式方法。

## 3 算例分析

### 3.1 平面半空间瞬态响应分析

为了验证本文的吸收边界的性能, 首先分析没有地震输入情况下的瞬态动力问题, 即如图 3 所示的条形荷载下平面半空间问题, 荷载随时间的变化选用历时 3s 的三角形脉冲。分析的目的是想获得半空间表面各点的位移响应, 特别是荷载下左(A)、中(B)、右(C) 3 点的响应。

为了进行有限元分析, 将平面半空间人工截断为 2m 边长的正方形区域进行计算, 域内用四节点四边形平面应变单元离散, 并在边界上施加本文提

出的吸收边界条件，即沿人工边界布置一系列弹簧

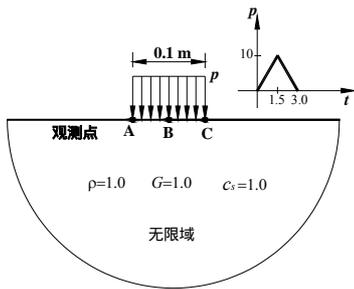


图 3 半空间平面问题示意图

Fig.3 A half-space plane strain problem

和阻尼器代替被截去的远场地基。计算中不考虑材料的阻尼，其它材料参数为：剪切模量 = 1Pa，密度 = 1kg/m<sup>3</sup>。时间积分步长取 0.01s。计算结果(见图 4)分别给出了各观测点处的位移响应时程，并与精确解和粘性边界解进行了比较，由于观测点 A、C 是对称的，因而 C 处的位移时程图略去。其中，粘性边界解是采用 Lysmer 的粘性边界求得的。而精确解用如下的半空间格林函数求得<sup>[9]</sup>：

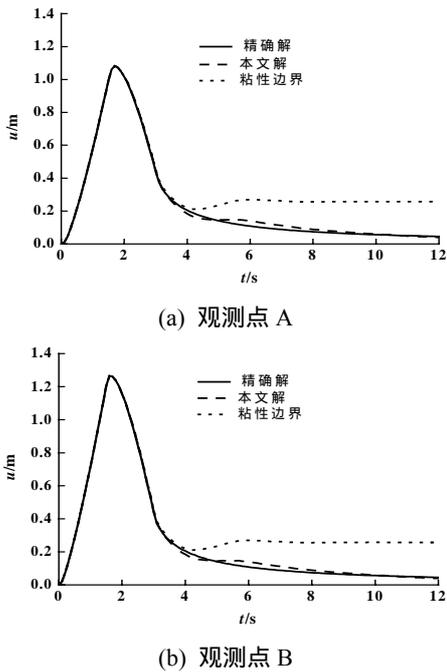


图 4 观测点位移响应比较

Fig.4 Comparisons of the responses at different locations

$$u(t,r) = \frac{p}{\pi G} \frac{1}{\sqrt{t^2 - (r/c_s)^2}} H(c_s t - r) \quad (15)$$

其中， $H$  为单位阶跃函数。

从图中的比较结果可以看出，本文提出的吸收边界是十分有效的。与粘性边界结果相比，本文方法的结果更接近理论解，而随着响应时间的增加，粘性边界结果回不到平衡位置，这正是本文方法优

于粘性边界的地方。这是因为对于零频率或静态情况，粘性边界不起作用，人工边界的精度主要是由其静态特性控制的<sup>[10]</sup>。理论上讲，本文吸收边界条件也和其它人工边界条件一样，只有当人工边界与散射体之间的距离接近无穷大，数值解才会接近真解。但实际计算中，只要人工边界与散射体之间的距离不小于最大特征波长的一半即可获得满意的精度。

### 3.2 混凝土重力坝地震反应分析

为了进一步说明本文方法的有效性，分析了位于均匀弹性岩基半空间上的混凝土重力坝地震反应，其中包括坝与地基的相互作用以及库水的影响。整个计算模型如图 5 所示，其中，坝高 103m，坝的底宽 71m。地震波选用 Koyna 水平地震加速度记录，如图 6 所示。计算中的混凝土重力坝材料参数为：密度 = 2643 kg/m<sup>3</sup>，泊松比 = 0.2，杨氏模量 = 3.1×10<sup>10</sup> Pa；地基的材料参数与坝材料参数相同；库水的材料参数为：密度 = 1000 kg/m<sup>3</sup>，体积模量 = 2×10<sup>9</sup> Pa。计算中只考虑坝体的材料阻尼，阻尼比为 5%。

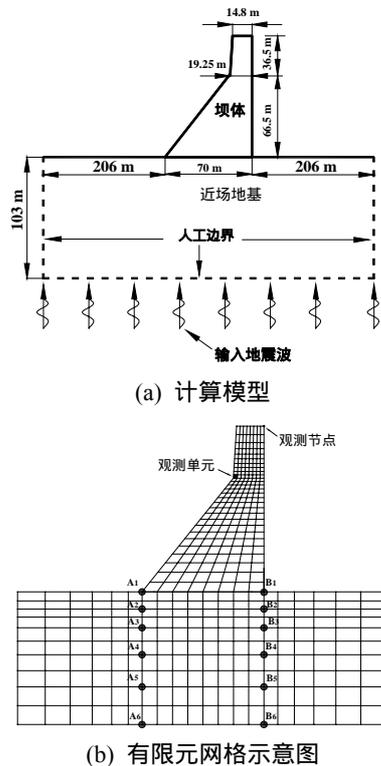


图 5 重力坝地震反应分析

Fig.5 Seismic response analysis of a gravity dam

根据本文提出的方法，在土-结构地震动力相互作用有限元分析中，地震动输入是通过在人工边界上施加等效节点力来实现的，而等效节点力的大小

与入射地震波波速成正比。对于岩石地基，当剪切波垂直入射进入均匀、无阻尼弹性半空间后，在地基表面发生反射，使得地基表面自由场运动幅值为输入运动幅值的两倍<sup>[11]</sup>，基于此原因，对于岩石地基，可按地基表面自由场运动减半作为人工边界上的地震动输入。对于软土地基，可以通过反演地表面自由场运动得到人工边界上的地震动输入运动。

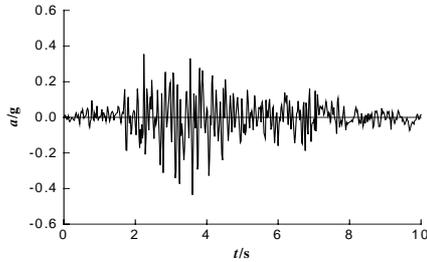


图6 Koyna地震水平加速度

Fig.6 Koyna horizontal ground acceleration

为了验证本文提出的输入方法，这里首先分析没有坝的情况下，在计算域底边受到垂直向上入射的剪切地震波作用下的地基的动力反应。并以如图6所示地震波减半后作为人工边界上的输入地震波。由于假设坝基为均匀、无阻尼弹性岩基，所以，根据前面的论述，地震波在传到自由地表时将发生反射，且自由地表处的总场响应幅值理论上应为输入波幅值的两倍。计算中，取地基长486m，深103m，如图5(a)所示。根据本文提出的方法，在计算区域底边和侧面的每个有限单元节点上分别定义一个水平和垂直弹簧和阻尼器。并根据给定的输入地震波在底边施加等效节点力来实现波的输入。图7给出了沿岩基深度各观测点的总场加速度反应时程，其中，沿岩基深度各观测点的位置如图5(b)所示。从图中可以看出，剪切地震波由底部向上传播并在自由地表发生反射，自由地表处的总场加速度幅值非常接近输入波幅值的两倍。这和理论结果是吻合的，因此，本文的地震输入方法得到验证。

最后，分析了混凝土重力坝-地基-库水系统的地震反应。假设发生地震时的库水深为91.75m，由于本文主要是分析坝与地基相互作用，为了简化计算，库水的影响采用 Westergaard<sup>[12]</sup>附加质量模型。为了进行比较，还计算了无质量地基模型下的坝体响应，即只考虑了地基的柔性，而忽略了地基的惯性和阻尼效应。图8给出了分析比较结果，其中图8(a)为坝顶上游面观测节点的位移反应时程，观测节点的位置如图5(b)所示。图8(b)给出了坝体下游面观测单元的最大主应力反应时程，观测单元的位

置如图5(b)所示。从比较结果可以看出，无限地基的辐射阻尼的影响是显著的。与无质量地基模型相比，考虑无限地基的辐射阻尼的影响后，坝体的地震响应明显减弱，这和文献[1]中的结论是吻合的。

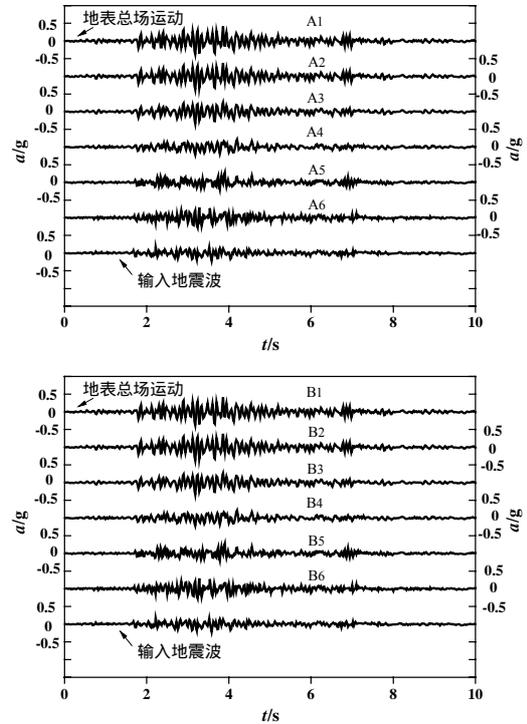
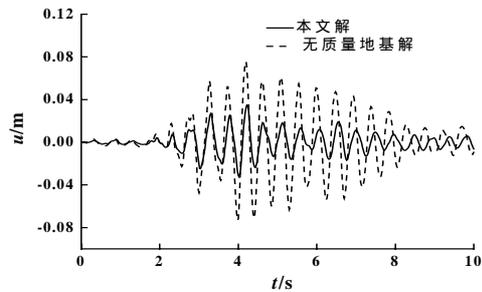
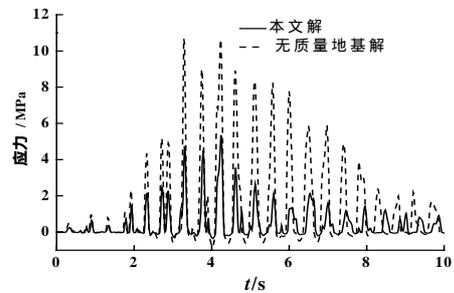


图7 沿岩基深度各观测点水平总场加速度反应(无坝)

Fig.7 Total horizontal acceleration responses at different points along the rock foundation (no dam present)



(a) 观测节点位移反应



(b) 观测单元最大主应力反应

图8 重力坝地震反应

Fig.8 Seismic responses of the gravity dam

## 4 结论

本文给出了能直接在时域内分析二维土-结构地震动力相互作用的有限元过程。从柱面波动方程出发,提出了能同时实现地震动输入和透射散射波的方法,这种方法非常简单有效、且容易在有限元法中实现。实际计算中,只要人工边界与散射体之间的距离不小于最大特征波长的一半即可获得满意的精度。另外,本文方法是直接在时域中推求的,因而可直接应用于土-结构系统非线性地震反应分析中。同时本文方法结合 Newmark 时间积分是无条件稳定的。算例分析结果验证了这种方法的精度和有效性。

### 参考文献:

- [1] 徐艳杰, 张楚汉, 金峰. 非线性拱坝-地基动力相互作用的 FE-BE-IBE 模型[J]. 清华大学学报, 1998, 30(11): 99~103.  
Xu Yanjie, Zhang Chuhan, Jin Feng. Model of FE-BE-IBE coupling for soil-structure interaction on nonlinear response of arch dams [J]. Journal of Tsinghua University, 1998, 30(11): 99~103. (in Chinese)
- [2] 陈厚群. 当前我国水工抗震中的主要问题和发展动态[J]. 振动工程学报, 1997, 10(3): 253~257.  
Chen Houqun. The main problems and developments in seismic studies on hydraulic structures in china [J]. Journal of Vibration Engineering, 1997, 10(3):

- 253~257. (in Chinese)
- [3] Clough RW. Nonlinear mechanisms in the seismic response of arch dams [C]. International Conference on Earthquake Engineering, Skopje, Yugoslavia, 1980.
- [4] Givoli D. Non-reflecting boundary conditions [J]. Journal of Computational Physics, 1991, 94: 1~29.
- [5] Lysmer J, Kuhlemeyer RL. Finite dynamic model for infinite media [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), 1969, 95: 859~877.
- [6] 邱流潮, 金峰. 无限介质中波动分析的显式时域辐射边界 [J]. 清华大学学报, 2003, 43(11): 1530~1533.  
Qiu Liuchao, Jin Feng. Explicit time-domain radiation boundaries for analysis of wave propagation in unbounded media [J]. Journal of Tsinghua University, 2003, 43(11): 1530~1533. (in Chinese)
- [7] Kellezi L. Local transmitting boundaries for transient elastic analysis [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000, 19: 533~547.
- [8] Whitham GB. Linear and nonlinear waves [M]. New York: Wiley, 1974.
- [9] Guddati MN, Tassoulas JL. Characteristics methods for transient analysis of wave propagation in unbounded media [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 164: 187~206.
- [10] Wolf JP, Song C. Finite-element modeling of unbounded media [M]. New York: Wiley, 1996.
- [11] Kramer SL. Geotechnical earthquake engineering [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [12] Westergaard H M. Water pressures on dams during earthquakes [J]. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1933, 98: 418~433.

(上接第 41 页)

### 参考文献:

- [1] 徐继祖, 李维扬, 汪克让. 海洋工程结构动力分析[M]. 天津: 天津大学出版社, 1992.  
Xu Jizu, Li Weiyang, Wang Kerang. Structural dynamic analysis of ocean engineering [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1992. (in Chinese)
- [2] Fjeld S, Flogeland S. Deepwater platforms problem areas [C]. In: European Offshore Petroleum Conference and Exhibition, 1980, 223~234.
- [3] Bar-Avi P, Benaroya H. Non-linear dynamics for an articulated tower in the ocean [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 190(1): 77~103.
- [4] Nagamani K, Ganapathy C. Finite element analysis for nonlinear dynamic response for articulated towers [J]. Computers & Structures, 1996, 59(2): 213~223.
- [5] Suneja B P, Datta T K. Active control for ALP with improved performance function [J]. Ocean Engineering, 1998, 25(10): 817~835.
- [6] Bar-Avi P, Benaroya H. Response for a two degrees for freedom articulated tower to different environmental conditions [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1996, 31(5): 717~741.
- [7] Raghothama, Narayanan S. Bifurcation and chaos for an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method [J]. Ocean Engineering, 2000, 27: 1087~1107.
- [8] Haritos N. Modelling the inertial force dominant response for compliant offshore structures in 3-dimensional wave environments [J]. Environment International, 1995, 21(5): 637~645.
- [9] Bar-Avi P. Dynamic response for an offshore articulated tower [D]. Rutgers, The State University for New Jersey, 1996. 42~43.
- [10] 李玉成. 波浪对海上建筑物的作用[M]. 北京: 海洋出版社, 1990.  
Li Yucheng. Action for the Wave to Offshore Architecture [M]. Beijing: Ocean Press, 1990. (in Chinese)
- [11] Issacson M. Wave and current forces on a fixed offshore structure [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1989, 15: 937~947.