文章编号：1000-4750(2000)03-116-05

用附加质量与刚度修改结构简谐激励响应

于德介

（湖南大学振动测试研究中心，长沙 410082）

摘　要：对修改结构局部刚度和质量参数，从而使其局部简谐激励响应分量满足给定设计要求的动力修改问题提出了一种求解方法，导出了质量与刚度参数修改结果的通解形式。本文方法仅需利用与结构修改自由度相关联的动柔度参数，计算过程简便。文中算例说明了方法的有效性。

关键词：动力修改；动柔度；动力学设计

中图分类号：O321　　文献标识码：A

1 引言

在结构动态优化设计中，常常会遇到结构振动响应的控制与设计问题，如要求结构某些部位的振动幅值最小，某些部位的振动幅值为给定的设计值等。文献[1]和[2]基于灵敏度分析研究了结构动态响应的修改问题；文献[3]建立了反共振频率灵敏度概念，并利用反共振频率灵敏度分析研究了结构局部隔振问题。本文则对修改结构多个质量与刚度参数，从而使结构局部简谐激励响应分量满足给定设计要求的动力修改问题提出了一种求解方法，并导出了质量与刚度参数修改结果的通解形式。本文方法仅需利用与结构参数修改和响应控制自由度相关联的动柔度参数，计算过程简便。文中算例说明了方法的有效性。

2　基本原理

简谐激励下，修改前结构的振动方程为

$$([K_0]-\omega^2[M_0])\{u_0\}=\{F\} \tag{1}$$

式中$[K_0]$、$[M_0]$分别为修改前结构的刚度与质量矩阵；ω为激励频率；$\{F\}$和$\{u_0\}$分别为激振力幅值和相应的响应幅值。

结构修改后，响应幅值变为$\{u\}$。我们考虑如下两种结构修改情况

(1) 修改结点i上的质量m_i，修改量为δm_i，相应的质量矩阵增量为

收稿日期：1998-11；修订日期：1999-04-16

作者简介：于德介(1957)，男，湖南常德人，教授，博士，主要从事机械系统动力学研究

$$[\Delta M_i]=\delta m_i\{v_m^{(i)}\}\{v_m^{(i)}\}^T$$
$$\{v_m^{(i)}\}=[0\ldots\ldots0\underset{i}{1}0\ldots\ldots0]^T$$

(2) 修改结构某一连接刚度k_i，修改量为δk_i，相应的刚度矩阵增量为

$$[\Delta K_i]=\delta k_i\{v_k^{(i)}\}\{v_k^{(i)}\}^T$$

如果k_i为结点i、j两点之间的连接刚度则

$$\{v_k^{(i)}\}=[0\ldots0\underset{i}{1}0\ldots0-\underset{j}{1}0\ldots0]^T$$

如果k_i为结点i处的支承刚度则

$$\{v_k^{(i)}\}=[0\cdots\cdots0\underset{i}{1}0\cdots\cdots0]^T$$

假定对结构共修改了s个结点质量，t个连接刚度，则修改后结构的振动方程为

$$([K_0]-\omega^2[M_0]+\sum_{i=1}^{t}\delta k_i\{v_k^{(i)}\}\{v_k^{(i)}\}^T-\omega^2\sum_{i=1}^{s}\delta m_i\{v_m^{(i)}\}\{v_m^{(i)}\}^T)\{u\}=\{F\} \tag{2}$$

令

$$\{\alpha\}=[-\omega^2\delta m_1,-\omega^2\delta m_2\cdots-\omega^2\delta m_s,\delta k_1\cdots\delta k_t]^T$$
$$[V]=[\{v_m^{(1)}\}^T,\{v_m^{(2)}\}^T\cdots\{v_m^{(s)}\}^T\{v_k^{(1)}\}^T\cdots\{v_k^{(t)}\}^T]^T$$

则(2)式整理为

$$([K_0]-\omega^2[M_0]+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\{v_i\}\{v_i\}^T)\{u\}=\{F\} \tag{3}$$

式中$r=s+t$，α_i表示附加参数的动刚度。对附加质量，$\alpha_i=-\omega^2\delta m_i$；对附加刚度，$\alpha_i=\delta k_i$，$\{v_i\}$为表示动刚度$\alpha_i$贡献位置的列向量

再令

$$\{y\}=[V]^T\{u\}$$
$$[H_0]=([K_0]-\omega^2[M_0])^{-1}$$
$$\{q\}=\begin{Bmatrix}\alpha_1y_1\\\alpha_2y_2\\\vdots\\\alpha_ry_r\end{Bmatrix}$$

$\{y\}$是一组与结构修改自由度相关联的广义响应分量，由于$q_i=\alpha_iy_i$表示动刚度α_i在广义响应y_i下产生的弹性力与惯性力，因此$\{q\}$是一组与$\{y\}$相应的广义力分量，$[H_0]$是修改前结构的动柔度矩阵。引入上述记号，(3)式可进一步整理为

$$\{u\}+[H_o][V]\{q\}=\{u_0\} \tag{4}$$

在(4)式两边前乘矩阵$[V]^T$，并记$\{y_0\}=[V]^T\{u_0\}$有

$$\{y\}=\{y_0\}-[H_v^{(0)}]\{q\} \tag{5}$$

式中

$$[H_v^{(0)}]=[V]^T[H_0][V] \tag{6}$$

假定结构修改后，响应$\{u\}$的p个分量$(p\le r)u_{j1},u_{j2},\cdots,u_{jp}$等于给定设计值，记

$$\{z\}=[u_{j1},\ u_{j2}\cdots u_{jp}]^T$$

则有

$$\{z\}=[G]^T\{u\}$$

对修改前结构则相应有

$$\{z_0\}=[G]^T\{u_0\}$$

在(4)式两边前乘矩阵$[G]^T$有

$$[H_{gv}^{(0)}]\{q\}=\{z_0\}-\{z\} \tag{7}$$

式中

$$[H_{gv}^{(0)}]=[G]^T[H_0][V] \tag{8}$$

$[H_v^{(0)}]$、$[H_{gv}^{(0)}]$的元素仅与结构修改自由度和响应控制自由度相关联的动柔度参数有关。根据模态分析理论[4]，动柔度矩阵$[H_0]$ i行j列的元素可从下式计算

$$H_{ij}^{(0)}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\varphi_{il}\varphi_{jl}}{m_l(\omega_l^2-\omega^2)} \tag{9}$$

式中ω_l、m_l分别为修改前结构第l阶固有频率与模态质量，φ_{il}、φ_{jl}分别为第l阶固有振型的第i、j个分量。从(6)、(8)、(9)三式即可求出矩阵$[H_v^{(0)}]$、$[H_{gv}^{(0)}]$的各个元素。

现讨论质量与刚度修改量的求解。先从方程(7)求解广义力列阵$\{q\}$。由于$p\leqslant r$，方程(7)为欠定方程，从方程(7)并不能得到广义力$\{q\}$的唯一解。根据线性方程组理论[5]，$\{q\}$的通解为

$$\{q\}=[H_{gv}^{(0)}]^+(\{z_0\}-\{z\})+([I]-[H_{gv}^{(0)}]^+[H_{gv}^{(0)}])\{\beta\} \tag{10}$$

式中$\{\beta\}$是任意的r维向量，而$[H_{gv}^{(0)}]$是矩阵$[H_{gv}^{(0)}]$的 Moore-penrose 广义逆。在矩阵$[H_{gv}^{(0)}]$行满秩情况下

$$[H_{gv}^{(0)}]^+=[H_{gv}^{(0)}]^T([H_{gv}^{(0)}]\ [H_{gv}^{(0)}]^T)^{-1}$$

矩阵$([I]-[H_{gv}^{(0)}]^+[H_{gv}^{(0)}])$的秩应为$r$-$p$，以$\{d_i\}$表示$([I]-[H_{gv}^{(0)}]^+[H_{gv}^{(0)}])$的$r$-$p$个线性无关列向量，则(10)式可进一步表示为

$$\{q\}=[H_{gv}^{(0)}]^+(\{z_0\}-\{z\})+\sum_{i=1}^{r-p}\beta_i\{d_i\} \tag{11}$$

式中$\beta_i(i=12\cdots)$为任意常数。

(11)式代入(5)，则可求得广义响应列阵$\{y\}$为

$$\{y\}=\{y_0\}-[H_v^{(0)}][H_{gv}^{(0)}]^+(\{z_0\}-\{z\})-\sum_{i=1}^{r-p}\beta_i[H_v^{(0)}]\{d_i\} \tag{12}$$

相应的附加动刚度参数为

$$\alpha_i=q_i/y_i \qquad (i=1,2\cdots r) \tag{13}$$

(13)式即为结构附加动刚度的通解形式。在(11)、(12)两式中选取一组β_i值，从(13)式

即可求得一组相应的附加动刚度值。需要指出的是，虽然满足结构响应修改要求的附加动刚度有无穷多组，但使 $J=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2$ 极小的附加动刚度仅有一组，我们称此组 α_i 为最小修改量解，以(13)式为约束条件，采用优化方法不难求出与最小修改量解对应的 β_i 值。此外，为了保证结构参数修改结果易于在工程上实现，除集总参数系统外，对一般工程结构应使附加质量与附加刚度大于 0。因此，对 $\alpha_i>0$，应选择在相应自由度上附加刚度，附加刚度值 $\delta k_i=\alpha_i$，对 α_i<0，则应选择在相应自由度上附加质量，附加质量值 $\delta_{m_i}=-\alpha_i/\omega^2$。当然，亦可选择一组适当的 β_i 值保证附加质量与附加刚度大于 0。如果需要同时计及结构附加构件的质量与刚度，则构件的质量与刚度应满足 $\delta k_i-\omega^2\delta m_i=\alpha_i$。

以下我们考虑两种特殊情况

1) 在结点 i 上修改结点质量 m_i，使 $u_l=0$

此时有 $[H_v^{(0)}]=H_{li}^{(0)}$，$[H_{gv}^{(0)}]=H_{ii}^{(0)}$，从(5)、(7)两式可解得

$$\delta m_i=-\frac{1}{\omega^2(H_{ii}^{(0)}u_{i0}-H_{li}^{(0)}u_{l0})} \tag{14}$$

式中 u_{i0}、u_{l0} 分别为修改前结构在 i，l 点的响应幅值。

2) 修改 i、j 两点的连接刚度 k_i，使 u_l=0

此时有 $[H_v^{(0)}]=H_{li}^{(0)}+H_{lj}^{(0)}-2H_{ij}^{(0)}$,$[H_{gv}^{(0)}]=H_{ii}^{(0)}-H_{ji}^{(0)}$，从(5)、(7)两式可解得

$$\delta k_i=\frac{u_{l0}}{(H_{ii}^{(0)}-H_{ji}^{(0)})(u_{i0}-u_{j0})-(H_{li}^{(0)}+H_{lj}^{(0)}-2H_{ij}^{(0)})u_{l0}} \tag{15}$$

3 算例

例 1：图 1 所示为一个五自由度弹簧质量系统，系统参数为 m_1=3.0kg；m_2=m_3=2.0kg；m_4=m_5=1.0kg；k_1=3200N/m；k_2=2400N/m；k_3=1600N/m；k_4=k_5=800N/m。

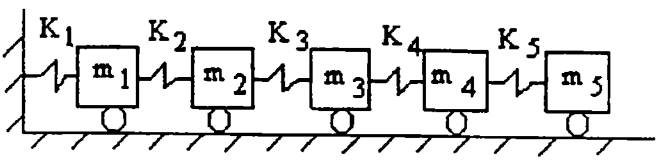

图 1 五自由度弹簧质量系统

假定在质量 3 上作用简谐激振力，激励频率为 50rad/s，现修改质量 m_1 与 m_2，使质量 m_5 振幅为 0，用本文方法解得

$$\delta m_1=(0.2472-0.4\beta)/(0.462+0.5263\beta)$$
$$\delta m_2=0.3130+0.8081\beta$$

考虑以下三组 β 取值情况

(1) β=−0.3873，求得 δm_1=1.545kg；δm_2=0

(2) β=−0.1573，求得 δm_1=0.4401kg；δm_2=0.3369kg

此组解为最小修改量解

(3) β=0.1658，求得 δm_1=0.3280kg， δm_2=0.447kg

文献[3]利用反共振频率灵敏度，经 5 次迭代求得两组解分别为

$$\delta m_1=1.506\text{kg};\quad \delta m_2=0$$

$$\delta m_1=0.302\text{kg};\quad \delta m_2=0.447\text{kg}$$

但文献[3]为近似解，本文则为精确解。

例 2: 图 2 所示为一悬臂梁，梁长 L=3m；弯曲刚度 EI=100(N·m^2)；密度 ρA=1.0(kg/m)。将梁划分为 6 个单元，用有限元法计算其简谐激励响应。在结点 3 上作用简谐激振力，激励频率 ω=60rad/s。

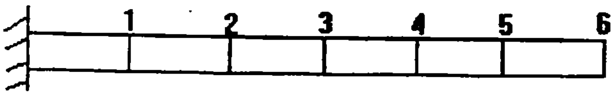

图 2 悬臂梁示意图

以 u_i 表示结点 i 处的挠度响应分量，考虑以下两种响应修改情况

(1) 在结点 6 上附加质量或支承刚度，使 $u_2=0$

从(14)式解得 α_6=-530.3N/m，即应在结点 6 上附加质量 δm_6=0.147kg

(2) 在结点 2、4、6 上附加质量或支承刚度，使 $u_2=u_6$，且 $u_2=u_2^{(0)}$

用本文方法解得

$$\alpha_2=-327.6-4739\beta$$

$$\alpha_4=-(1880\beta-17.96)/(0.7197\beta-0.2171)$$

$$\alpha_6=-208.4+3814\beta$$

与最小修改量解对应的 β 值为 β=-0.0006，相应的结点附加质量与支承刚度分别为 δm_2=0.0902kg； δk_4=87.75N/m； δm_6=0.0585kg。

4 结语

本文提出了一种结构简谐激励响应的修改方法，该方法通过修改结构多个质量与刚度参数使结构简谐激励响应满足给定设计要求。一般来讲，在作结构修改时，附加质量较易在工程上实施。因此，用本文方法修改结构简谐激励响应时，宜选取结点质量作为修改参数，并通过调节通解中的待定常数尽可能使 $\delta m_i \geq 0$。本文虽然只讨论了无阻尼振动系统简谐激励响应的修改，但这一方法亦能推广应用于阻尼振动系统。

参考文献：

[1] 施荣明，朱德懋. 多频优化与频响优化的结构动力学设计[J].航空学报,1992; 13(9):534-537.

[2] 荣见华，葛祖德，姚起杭. 动态优化中的动响应高阶修改及灵敏度分析[J]. 航空学报，1992; 13(9): 529-533.

[3] 张军，方向明. 反共振频率的灵敏度分析及应用[J]. 振动工程学报, 1996; 9(1): 9-15.

[4] 周传荣，赵淳生. 机械振动参数识别及其应用[M]. 北京：科学出版社，1989.

[5] 何旭初. 广义逆矩阵的基本理论和计算方法[M]. 上海：上海科学技术出版社，1985. (下转 137 页)

对于榫齿，靠近盘外缘的齿根处总Mises应力最大，最大应力为850MPa，该处的温度约为700℃，材料在这个温度下的屈服极限为690MPa，强度极限为1050MPa，由此可以看出该处将发生屈服，中间齿的齿根处的最大应力为770MPa，也超过了屈服极限，所以，在榫齿部分靠近盘外缘的两个齿根处也发生屈服。

参考文献：

[1] 宋兆泓. 航空燃气涡轮发动机强度设计[M]. 北京航空学院出版社, 1987. 24-25.
[2] 饶寿期. 有限元法和边界元法基础[M]. 北京航空航天大学出版社, 1990. 109-118.
[3] 中国航空发动机总公司. 航空发动机设计用材料数据手册[Z], 1990.
[4] ALGOR FEAS(SUPER SAP 91年版)用户手册[Z]. 1991, 9: 53-55.

THE THERMAL-ELASTIC STRESS ANALYSIS OF HIGH PRESSURE TURBINE PLATE

MENG Chun-ling[1], RAO Shou-qi[2]

(1. The Beijing Light Industry Institute, Beijing 100037; 2. The Beijing Aeronautics and Astronautics University, Beijing 100083)

Abstract: ALGOR, a familiar finite element program, was employed to conduct three-dimension thermal-elastic stress analysis of an engine's high pressure turbine plate and its tenon tooth. The thermal-elastic stress distributions of plate and its tenon tooth were obtained and applied to the design of the engine. Boundary elements were used when calculating.

Key words: High-pressure turbine plate; Tenon; finite element

---

(上接120页)

MODIFYING THE DYNAMIC RESPONSE OF A STRUCTURE TO HARMONIC EXCITATION BY USING OF MASS AND STIFFNESS ADDITION TECHNIQUE

YU De-jie

(Vibration Measurement & Research Centre, Hunan University, Chansha 410082)

Abstracts: This paper presents a method for estimating the added stiffness and mass on a structure so that the dynamic response of the structure to harmnonic excitation can meet the pre-determined requirements. The analysis is made through generalized inverse theory with the use of modal data. The general expressions of the added mass and stiffness parameters are derived. This method uses only the dynamic flexibility data on the degrees of freedom associated with the modifying parameters, therefore, it is simple in computation and experimentation. Numerical examples are given to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: dynamic modification; dynamic flexibility; dynamic design