

文章编号: 1000-4750(2007)Sup.I-0032-04

含两个分量的四边形单元面积坐标理论

陈晓明^{1,*}, 岑松^{1,2}, 龙驭球³, 傅向荣⁴

(1. 清华大学航天航空学院, 北京 100084; 2. 破坏力学教育部重点实验室, 北京 100084;

3. 清华大学土木工程系, 北京 100084; 4. 中国农业大学土木工程系, 北京 100083)

摘要: 为了便于构造抗畸变的四边形单元, 建立了一套新的四边形单元面积坐标理论(QAC-2), 并给出了相关的积分和微分公式。该坐标系作为自然坐标, 具有明确的物理意义, 且只含有两个相互独立的坐标分量, 因此易于实现与直角坐标和等参坐标的沟通, 便于理解和应用; 两个坐标分量与直角坐标之间满足线性变换, 在构造单元时易于选择完备的多项式序列, 且多项式的完备次数不会随着网格的畸变而下降, 因此可以保证单元的精度和抗畸变性能。

关键词: 有限元; 四边形元; 面积坐标; 网格畸变; 微分和积分公式

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

A TWO-COMPONENT AREA COORDINATE METHOD FOR QUADRILATERAL ELEMENTS

CHEN Xiao-ming^{1,*}, CEN Song^{1,2}, LONG Yu-qiu³, FU Xiang-rong⁴

(1. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Failure Mechanics Laboratory, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

3. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

4. Department of Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract: In order to construct quadrilateral elements insensitive to mesh distortion, a new kind of quadrilateral area coordinate method, denoted as QAC-2, has been successfully developed. And related differential and integral formulae are also presented. As a natural coordinate system, QAC-2 has explicit physical meanings. It includes only two independent components, Z_1 and Z_2 , which make it easier to communicate with Cartesian coordinates and isoparametric coordinates. Furthermore, since Z_1 and Z_2 are linear functions of Cartesian coordinates x and y , it is convenient to establish a polynomial with high order completeness in Cartesian coordinates by using Z_1 and Z_2 , and this polynomial will keep its completeness order invariable for mesh distortion cases. QAC-2 is a simple and novel tool for developing more accurate and robust quadrilateral element models.

Key words: finite element; quadrilateral element; area coordinate; mesh distortion; differential and integral formulae

在构造四边形单元时, 等参坐标^[1,2]的应用取得了巨大的成功。它有着公式推导简单、易于边界描述、便于进行数值积分等优点, 而且更重要的是它是一种自然坐标, 因此可以克服直角坐标导致的方

向性问题。但是它也有很多不足, 其中最主要的一点是因为它与直角坐标之间不是线性变换, 所以在模拟二次以上直角坐标的完备多项式时比较困难, 这些问题已有文献进行详细讨论^[3]。

收稿日期: 2006-08-22; 修改日期: 2006-11-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10502028); 高等学校全国优秀博士论文作者专项基金资助项目(200242)

作者简介: 陈晓明(1973), 男, 山东人, 博士后, 从事计算固体力学研究;

*岑松(1972), 男, 福建人, 副教授, 工学博士, 从事计算固体力学研究(E-mail: censong@tsinghua.edu.cn);

龙驭球(1926), 男, 湖南人, 教授, 中国工程院院士, 从事结构工程研究;

傅向荣(1972), 男, 湖南人, 副教授, 工学博士, 从事结构工程研究。

基于上述背景,龙驭球等于1997年提出一套含四个坐标分量的四边形面积坐标理论^[4,5](QAC-4),该坐标系除了兼有等参坐标的众多优点以外,还有效克服了等参坐标的上述不足。自QAC-4诞生以来,已先后成功应用于平面膜元^[6]、含转角自由度膜元^[7]、薄板元^[8]、厚薄板单元^[9]以及壳单元^[10]的构造,这些单元普遍表现出精度高,抗网格畸变性能好的优点,反映了四边形单元面积坐标的优越性和继续发展及完善的必要性。

QAC-4采用与三角形单元面积坐标相类似的定义方式,单元内每个点具有四个坐标分量,其中只有两个分量相互独立,这样做的优点是与三角形面积坐标的相互沟通,单元可以退化为三角形,并且易于边界描述,不足的是与直角坐标和等参坐标的关系变得复杂,因此使得假定一个具有较高的完备次数的单元位移场多项式变得比较困难。

为了解决上面的问题,本文提出只含两个坐标分量的四边形面积坐标QAC-2作为四边形面积坐标理论的补充,两类坐标互相沟通,可以单独使用,也可以配合使用。

1 QAC-2 的定义

为了可以建立两个相互独立的坐标分量,首先建立新的定义方式,其相关的物理意义参见图1。

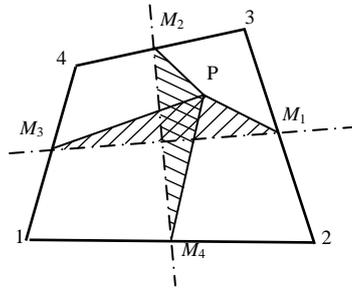


图1 QAC-2 的定义
Fig.1 Definition of QAC-2

图1中P为四边形内任意一点,而M₁, M₂, M₃和M₄为各边中点,定义两个三角形的面积:

$$A_1 = S(\Delta PM_2M_4), \quad A_2 = S(\Delta PM_3M_1) \quad (1)$$

当三角形结点顺序为逆时针时, A₁、A₂为正,否则为负。则两个坐标分量可以定义为:

$$Z_1 = 4 \frac{A_1}{A}, \quad Z_2 = 4 \frac{A_2}{A} \quad (2)$$

其中A为四边形的面积。从图1可以看出:显然每个点的坐标是惟一的,且两个坐标是相互独立的。

该坐标系满足与QAC-4的线性变换关系:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2(L_3 - L_1) + (g_2 - g_1), \\ Z_2 &= 2(L_4 - L_2) + (g_3 - g_2) \end{aligned} \quad (3)$$

其中L_i(i=1,2,3,4)为QAC-4的四个坐标分量,而g_i(i=1,2,3,4)为四边形单元的特征参数^[4,5]。因为QAC-2仍然要采用这些特征参数,因此简记为:

$$\bar{g}_1 = g_2 - g_1, \quad \bar{g}_2 = g_3 - g_2 \quad (4)$$

当单元退化为矩形时, \bar{g}_1 和 \bar{g}_2 均等于0。借助 \bar{g}_1 和 \bar{g}_2 各角点和中点坐标值分别为:

$$\begin{aligned} 1. & (-1 + \bar{g}_2, -1 + \bar{g}_1) & 2. & (1 - \bar{g}_2, -1 - \bar{g}_1) \\ 3. & (1 + \bar{g}_2, 1 + \bar{g}_1) & 4. & (-1 - \bar{g}_2, 1 - \bar{g}_1) \\ M_1 & (1, 0) & M_2 & (0, 1) \\ M_3 & (-1, 0) & M_4 & (0, -1) \end{aligned} \quad (5)$$

2 QAC-2 用直角坐标和等参坐标表示

因为QAC-2是QAC-4的线性函数,所以将L₁, L₂, L₃, L₄的直角坐标表达式代入式(3),可以得到Z₁, Z₂的直角坐标表达式:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{A} [(a_3 - a_1) + (b_3 - b_1)x + (c_3 - c_1)y] + \bar{g}_1, \\ Z_2 &= \frac{1}{A} [(a_4 - a_2) + (b_4 - b_2)x + (c_4 - c_2)y] + \bar{g}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

同样,上式也可以简记为:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{A} [\bar{a}_1 + \bar{b}_1x + \bar{c}_1y] + \bar{g}_1, \\ Z_2 &= \frac{1}{A} [\bar{a}_2 + \bar{b}_2x + \bar{c}_2y] + \bar{g}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \\ b_i &= y_j - y_k, \quad i, j, k = \overline{1, 2, 3, 4} \\ c_i &= x_k - x_j, \\ \bar{a}_1 &= a_3 - a_1, \quad \bar{b}_1 = b_3 - b_1, \quad \bar{c}_1 = c_3 - c_1 \\ \bar{a}_2 &= a_4 - a_2, \quad \bar{b}_2 = b_4 - b_2, \quad \bar{c}_2 = c_4 - c_2 \end{aligned} \quad (8)$$

将L₁, L₂, L₃, L₄的等参坐标表达式代入式(2),并整理可以得到Z₁, Z₂的等参坐标表达式:

$$Z_1 = \xi + \bar{g}_2 \xi \eta, \quad Z_2 = \eta + \bar{g}_1 \xi \eta \quad (9)$$

从式(7)可以看出, Z₁, Z₂与直角坐标之间保持线性关系;从式(9)可以看出当单元退化为矩形时, Z₁, Z₂与等参坐标相同,否则与等参坐标保持二次关系;并且从一定意义上讲, QAC-2是对等参坐标的修正,结合角点和中点坐标, QAC-2的单元的畸变也是在等参坐标的基础上发生的。

3 QAC-2 的微分与积分公式

3.1 微分公式

Z_1, Z_2 的一阶微分变换式为:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial}{\partial Z_2} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Z_1, Z_2 的二阶微分变换式为:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A^2} \begin{bmatrix} \bar{b}_1^2 & \bar{b}_2^2 & 2\bar{b}_1\bar{b}_2 \\ \bar{c}_1^2 & \bar{c}_2^2 & 2\bar{c}_1\bar{c}_2 \\ \bar{b}_1\bar{c}_1 & \bar{b}_2\bar{c}_2 & \bar{b}_1\bar{c}_2 + \bar{b}_2\bar{c}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial Z_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \partial Z_2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

3.2 边界法向导数与切向导数

各边的法向导数为:

$$\frac{\partial}{\partial n_i} = -\frac{1}{l_i} [b_i \ c_i] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{A l_i} [b_i \ c_i] \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial}{\partial Z_2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

各边的切向导数为:

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{1}{l_i} [c_i \ -b_i] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A l_i} [c_i \ -b_i] \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial}{\partial Z_2} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

其中

$$l_i = \sqrt{b_i^2 + c_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

3.3 积分公式

Z_1, Z_2 的任意幂函数在单元内的积分公式为:

$$\iint_A Z_1^m Z_2^n dA = \frac{A}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i C_n^j \bar{g}_2^i \bar{g}_1^j P \quad (15)$$

其中

$$P = \frac{[1 - (-1)^M][1 - (-1)^N]}{MN} + \bar{g}_1 \frac{[1 - (-1)^{M+1}][1 - (-1)^N]}{(M+1)N} +$$

$$\bar{g}_2 \frac{[1 - (-1)^M][1 - (-1)^{N+1}]}{M(N+1)} \quad (16)$$

$$M = m + j + 1, \quad N = n + i + 1$$

$$\text{当 } M, N \text{ 均为奇数时: } P = \frac{4}{MN}$$

$$\text{当 } M, N \text{ 均为偶数时: } P = 0$$

$$\text{当 } M \text{ 均为奇数, } N \text{ 均为偶数时: } P = \frac{4}{M(N+1)} \bar{g}_2$$

$$\text{当 } M \text{ 均为偶数, } N \text{ 均为奇数时: } P = \frac{4}{(M+1)N} \bar{g}_1$$

证明:

将 Z_1, Z_2 用等参坐标表示, 则 Z_1, Z_2 的任意幂函数在单元内面积积分可以表示为:

$$\iint_A Z_1^m Z_2^n dA = \iint_A [\bar{g}_2 \xi \eta + \bar{g}_1] [\bar{g}_1 \xi \eta + \eta]^n |J| d\xi d\eta \quad (17)$$

其中 $|J|$ 为 Jacobi 行列式, 由四结点等参元形函数可以得到:

$$|J| = \frac{A}{4} [1 + \bar{g}_1 \xi + \bar{g}_2 \eta] \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)得:

$$\begin{aligned} \iint_A Z_1^m Z_2^n dA &= \frac{A}{4} \iint_A \xi^m \eta^n (1 + \bar{g}_2 \eta)^m (1 + \bar{g}_1 \xi)^n (1 + \bar{g}_1 \xi + \bar{g}_2 \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{A}{4} \iint_A \xi^m \eta^n \sum_{i=0}^m C_m^i \bar{g}_2^i \eta^i \sum_{j=0}^n C_n^j \bar{g}_1^j \xi^j (1 + \bar{g}_1 \xi + \bar{g}_2 \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{A}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i C_n^j \bar{g}_2^i \bar{g}_1^j \cdot \\ &= \iint_A (\xi^{m+j} \eta^{n+i} + \bar{g}_1 \xi^{m+j+1} \eta^{n+i} + \bar{g}_2 \xi^{m+j} \eta^{n+i+1}) d\xi d\eta = \\ &= \frac{A}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i C_n^j \bar{g}_2^i \bar{g}_1^j P \end{aligned} \quad (19)$$

证明完毕。

为了方便应用, 在此给出低次幂函数的积分公式。

一次项积分公式为:

$$\iint_A \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} dA = \frac{A}{3} \begin{Bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

二次项积分公式为:

$$\iint_A \begin{Bmatrix} Z_1^2 \\ Z_2^2 \\ Z_1 Z_2 \end{Bmatrix} dA = \frac{A}{3} \begin{Bmatrix} \bar{g}_2^2 + 1 \\ \bar{g}_1^2 + 1 \\ \bar{g}_1 \bar{g}_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

三次项积分公式为:

$$\iint_A \begin{Bmatrix} Z_1^3 \\ Z_1^2 Z_2 \\ Z_1 Z_2^2 \\ Z_2^3 \end{Bmatrix} dA = \frac{A}{15} \begin{Bmatrix} 3\bar{g}_1(\bar{g}_2^2 + 1) \\ \bar{g}_2^3 + 2\bar{g}_2 \bar{g}_1^2 + 5\bar{g}_2 \\ \bar{g}_1^3 + 2\bar{g}_2^2 \bar{g}_1 + 5\bar{g}_1 \\ 3\bar{g}_2(\bar{g}_1^2 + 1) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Z_1, Z_2 的任意幂函数在单元边界的边积分公式为:

在边 23 上:

$$\int_0^1 Z_1^m Z_2^n d\bar{s} = \frac{1}{2}(1 + \bar{g}_1)^n \sum_{i=0}^m C_m^i \bar{g}_2^i \frac{1 - (-1)^{n+i+1}}{n+i+1} \quad (23)$$

在边 34 上:

$$\int_0^1 Z_1^m Z_2^n d\bar{s} = -\frac{1}{2}(1 + \bar{g}_2)^m \sum_{i=0}^n C_n^i \bar{g}_1^i \frac{1 - (-1)^{m+i+1}}{m+i+1} \quad (24)$$

在边 41 上:

$$\int_0^1 Z_1^m Z_2^n d\bar{s} = -\frac{1}{2}(-1)^m (1 - \bar{g}_1)^n \sum_{i=0}^m C_m^i \bar{g}_2^i \frac{1 - (-1)^{n+i+1}}{n+i+1} \quad (25)$$

在边 12 上:

$$\int_0^1 Z_1^m Z_2^n d\bar{s} = \frac{1}{2}(-1)^n (1 - \bar{g}_2)^m \sum_{i=0}^n C_n^i \bar{g}_1^i \frac{1 - (-1)^{m+i+1}}{m+i+1} \quad (26)$$

其中 \bar{s} 是 \bar{jk} ($jk = 23, 34, 41, 12$) 上无量纲坐标。

证明:

以边 23 为例, $Z_1^m Z_2^n$ 可以用等参坐标表示为:

$$|J| = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 a_i + \frac{1}{8} (b_2 c_4 - b_4 c_2) \xi + \frac{1}{8} (b_3 c_1 - b_1 c_3) \eta = \frac{A}{4} [1 + \bar{g}_1 \xi + \bar{g}_2 \eta] \quad (27)$$

在边 23 上有 $\xi = 1, \eta = 2\bar{s} - 1, d\bar{s} = d\eta/2$, 所以:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Z_1^m Z_2^n d\bar{s} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Z_1^m Z_2^n d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \eta^n [1 + \bar{g}_2 \eta]^m (1 + \bar{g}_1)^n d\eta = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \bar{g}_1)^n \int_{-1}^1 \eta^n [1 + \bar{g}_2 \eta]^m d\eta = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \bar{g}_1)^n \int_{-1}^1 \eta^n \sum_{i=0}^m C_m^i \bar{g}_2^i \eta^i d\eta = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \bar{g}_1)^n \sum_{i=0}^m C_m^i \bar{g}_2^i \int_{-1}^1 \eta^{n+i} d\eta = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \bar{g}_1)^n \sum_{i=0}^m C_m^i \bar{g}_2^i \frac{1 - (-1)^{n+i+1}}{n+i+1} \end{aligned} \quad (28)$$

证明完毕。

4 结论

本文建立了含两个坐标分量的四边形面积坐标论 QAC-2, 并给出了相关的基本公式。与 QAC-4 相比, 除保留了自然坐标以及与直角坐标线性变换等主要优点以外, 消除了多余的坐标分量, 使得坐标系更加简洁, 与直角坐标的沟通更加自然。两类坐标互为补充, 使得四边形面积坐标理论更为完整, 且便于推广应用于解析试函数法等其它领域。

参考文献:

- [1] Taig I C. Structural analysis by the matrix displacement method [R]. Engl. Electric Aviation Report, 1961: S017.
- [2] Irons B M. Engineering application of numerical integration in stiffness method [J]. J. AIAA, 1966, 14: 2035~2037.
- [3] Lee N S, Bathe K J. Effects of element distortion on the performance of isoparametric elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1993, 36: 3553~3576.
- [4] 龙驭球, 李聚轩, 龙志飞, 岑松. 四边形面积坐标理论 [J]. 工程力学, 1997, 14(3): 1~11.
Long Yuqiu, Li Juxuan, Long Zhifei, Cen Song. Area-coordinate theory for quadrilateral elements [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(3): 1~11. (in Chinese)
- [5] 龙志飞, 李聚轩, 岑松, 龙驭球. 四边形单元面积坐标的微分和积分公式 [J]. 工程力学, 1997, 14(3): 12~20.
Long Zhifei, Li Juxuan, Cen Song, Long Yuqiu. Differential and integral formulas for area coordinates in quadrilateral elements [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(3): 12~20. (in Chinese)
- [6] Chen X M, Cen S, Long Y Q, Yao Z H. Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method [J]. Computers & Structures, 2004, 82(1): 35~54.
- [7] 陈晓明, 龙驭球, 须寅. 面积坐标法构造含转角自由度的四结点膜元 [J]. 工程力学, 2003, 20(6): 6~11.
Chen Xiaoming, Long Yuqiu, Xu Yin. Construction of quadrilateral membrane elements with drilling DOF using area method [J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(6): 6~11. (in Chinese)
- [8] 龙志飞, 李聚轩, 岑松, 龙驭球. 采用面积坐标的四边形板弯曲单元 [J]. 工程力学, 1997, 14(4): 1~10.
Long Zhifei, Li Juxuan, Cen Song, Long Yuqiu. A quadrilateral plate bending element by using area coordinate method [J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(4): 1~10. (in Chinese)
- [9] 岑松, 龙驭球. 采用面积坐标的四边形厚薄板通用单元 [J]. 工程力学, 1999, 16(2): 1~15.
Cen Song, Long Yuqiu. Quadrilateral thin-thick plate bending element by using area coordinate method [J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(2): 1~15. (in Chinese)
- [10] Cardoso R P R, Yoon J W, Valente R A F. A new approach to reduce membrane and transverse shear locking for one-point quadrature shell elements: linear formulation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(2): 214~249.