

二节点曲线索单元非线性分析

袁行飞, 董石麟

(浙江大学土木系, 杭州 310027)

摘 要: 本文提出了二节点曲线索单元, 对拉索结构进行非线性分析。这种单元不仅能模拟大跨度索元的初始形态, 而且能克服目前广泛使用的二节点直线杆单元精度不高, 多节点曲线索单元自由度大, 内插点坐标难以确定等缺点。文中采用修正的 Lagrangian 坐标描述法, 由卡氏第一定理推导并得出了刚度矩阵的显示表达式, 编制了相应的程序, 并对若干算例进行了计算与比较, 分析结果表明此单元模型有较好的精度, 能适用于塔桅结构、张拉结构等大跨结构形式的非线性分析。

关键词: 二节点曲线索单元; Lagrangian 坐标描述法; 卡氏定理

中图分类号: **文献标识码:** A

1 引言

对受拉索系, 目前国内外学者提出了不少的数值和解析法。就数值法而言, 主要是利用有限单元法采用相应的索单元进行非线性分析, 目前广为大家所知的主要有两种索单元: (1) 二节点直线杆单元^[2]: 将拉索当作二节点直线杆单元来处理, 没有考虑索自重垂度影响, 对索元较短的结构, 如索网结构等误差较小, 但对长索结构如索穹顶结构, 索元的自重垂度较大, 若仍用此单元, 其精度较难保证。(2) 多节点曲线索单元^{[3][5]}: 引入高次函数作索元的插值函数, 考虑了索自重垂度影响, 但节点数较多, 自由度数增加显著, 且不易得出刚度显示表达式, 对大跨多索结构易造成刚度矩阵庞大, 计算机无法处理等缺点。

本文提出的二节点曲线索单元通过引入抛物线假定, 对拉索结构进行非线性分析。它不仅能模拟大跨度索元的初始形态, 而且能克服目前广泛使用的二节点直线杆单元精度不高, 多节点曲线索单元自由度大, 内插点坐标难以确定等缺点。文中采用修正的 Lagrangian 坐标描述法, 由卡氏第一定理推导并得出了刚度矩阵的显示表达式, 编制了相应的程序, 并对若干算例进行了计算与比较, 分析结果表明此单元模型有较好的精度, 能适用于塔桅结构、张拉结构等大跨结构形式的非线性分析。

2 基本假定和位移模式的确定

2.1 基本假定

- (1) 索在弹性阶段工作
- (2) 索是柔性的, 只能承受拉力而不能承受任何弯矩和压力
- (3) 小应变假定
- (4) 考虑索段自重影响, 假定索的几何形状为抛物线

2.2 位移模式的确定

采用拉格朗日描述法, 建立索单元的单元局部坐标系 $ox^1y^1z^1$ 如下: 取索二端点 A_0B_0 所在线为 x^1 轴, 垂直 x^1 轴且在水平面上的线为 y^1 轴, $x^1y^1z^1$ 为右手直角坐标系, 见图1。

由抛物线假定, 取索单元位移模式如下:

$$u = (1 - \frac{x}{L})u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

$$v = (1 - \frac{x}{L})v_1 + \frac{x}{L}v_2$$

$$w = (1 - \frac{x}{L})w_1 + \frac{x}{L}w_2 - \Delta f$$

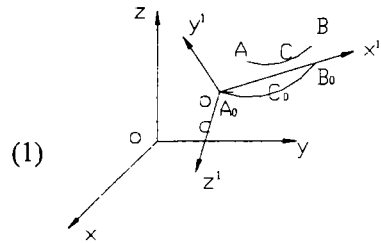


图 1

其中

$$\Delta f = -4 \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}) \Delta f_{\max} = -6 f_{\max} \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}) \Delta L \quad (2)$$

具体推导过程见文献[4], $f_{\max}$ 为跨中垂度, ΔL 为弦长的变化量, $\Delta L = L^1 - L$, L 和 L^1 分别为变形前和变形后的索单元弦长。

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (3)$$

$$L^{1^2} = (x_1 + u_1 - x_2 - u_2)^2 + (y_1 + v_1 - y_2 - v_2)^2 + (z_1 + w_1 - z_2 - w_2)^2 \quad (4)$$

当 $\alpha \ll 1$ 时, $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$, 由(3)、(4)简化可得:

$$\Delta L \approx (u_2 - u_1) + \frac{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}{2L} \quad (5)$$

把公式(2)、(5)代入(1), 忽略高阶项得:

$$\{u\} = [N] \{u\}_e \quad (6)$$

其中, $\{u\}_e = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2\}^T$, 为节点位移向量; $[N]$ 为形函数, 表示如下:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ -6 \frac{f_{\max}}{L} \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}) & 0 & 1 - \frac{x}{L} & 6 \frac{f_{\max}}{L} \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}) & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

3 非线性有限元平衡方程的建立

3.1 非线性几何关系

设变形前索上一点 $C_0(x, y, z)$ ，变形后到 $C(x+u, y+v, z+w)$ ，见图1。

则变形前和变形后弧微元长度分别为：

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (7)$$

$$ds' = \sqrt{(1+u')^2 + (y'+v')^2 + (z'+w')^2} dx \quad (8)$$

得伸长应变

$$\varepsilon_x = \frac{ds'}{ds} - 1 = \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2 + 2u' + 2y'v' + 2z'w' + u'^2 + v'^2 + w'^2}{1 + y'^2 + z'^2}} - 1 \quad (9)$$

由小应变假定并忽略高阶微量，可得：

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{(u_2 - u_1)}{L}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(v_2 - v_1)}{L}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 4f_{\max} \left(\frac{2x}{L^2} - \frac{x}{L} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{(w_2 - w_1)}{L} - 6 \frac{f_{\max}}{L} \left(\frac{2x}{L^2} - \frac{x}{L} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

3.2 物理关系

根据虎克定律，应力、应变的物理关系为

$$\sigma = E\varepsilon + \sigma_0 \quad (12)$$

式中， E 为弹性模量， σ_0 为初始应力。

3.3 平衡方程的建立

索单元的应变能

$$U = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EA \varepsilon_x^2 + P \varepsilon_x \right) dx \quad (13)$$

把公式(10)、(11)代入(13)并忽略高阶微量，可得：

$$\begin{aligned} U = & \left\{ \frac{(u_2 - u_1)^2}{L} + \frac{16f_{\max}^2 (w_2 - w_1)^2}{3L^3} + \frac{576f_{\max}^4 (u_2 - u_1)^2}{5L^5} + \frac{576f_{\max}^4}{5L^6} (u_2 - u_1) \alpha \right. \\ & - \frac{16f_{\max}^2}{L^3} (u_2 - u_1)^2 - \frac{16f_{\max}^2}{L^4} (u_2 - u_1) \alpha + \frac{(u_2 - u_1)}{L^2} \alpha \\ & - \frac{16f_{\max}}{L^3} (u_2 - u_1)(w_2 - w_1)^2 + \frac{12f_{\max}^2}{L^4} (u_2 - u_1)^3 \left. \right\} + P \left\{ (u_2 - u_1) \right. \\ & \left. - \frac{8f_{\max}^2}{L^2} (u_2 - u_1) - \frac{4f_{\max}^2}{L^3} \alpha + \frac{1}{2L} \alpha + \frac{6f_{\max}^2}{L^3} (u_2 - u_1)^2 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$\alpha = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2$$

由卡氏第一定理 $\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i$ 可得:

$$k_e u + P_\sigma = F_i \quad (15)$$

其中 P_σ 为初始应力等效节点荷载, 可由下式表示:

$$P_\sigma = -A\sigma[1 - 8(\frac{f_{\max}}{L})^2] \quad (16)$$

k_e 为单元刚度矩阵, 可由下式表示:

$$k_e = k_L + k_{NL} + k_\sigma \quad (17)$$

式中 k_L 为线性刚度矩阵, k_{NL} 为非线性刚度矩阵, k_σ 为几何刚度矩阵。由公式(11)~(16)可得 k_e 显示表达式。

k_e 可以简写为:

$$k_e = \begin{bmatrix} \sum k_i^1 & -\sum K_i^1 \\ -\sum K_i^1 & \sum K_i^1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

k_i^1 是 3×3 的对称矩阵, i 分别为 L, NL, σ , 具体形式如下:

$$k_L^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\beta_1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix} \quad k_\sigma^1 = \begin{bmatrix} \frac{P}{L}\beta_3 & 0 & 0 \\ & \frac{P}{L}\beta_4 & 0 \\ sym & & \frac{P}{L}\beta_4 \end{bmatrix}$$

$$k_{NL}^1 = \begin{bmatrix} \frac{3EA}{2L^2}(u_2 - u_1)\beta_5 & \frac{EA}{2L^2}(v_2 - v_1)\beta_1 & \frac{EA}{2L^2}(w_2 - w_1)\beta_2 \\ & \frac{EA}{2L^2}(u_2 - u_1)\beta_1 & 0 \\ sym & & \frac{EA}{2L^2}(u_2 - u_1)\beta_2 + \frac{16}{3} \frac{EA}{L} (\frac{f_{\max}}{L})^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

上述表达式中各系数分别为:

$$\beta_1 = 1 - 16(\frac{f_{\max}}{L})^2 + \frac{576}{5}(\frac{f_{\max}}{L})^4, \quad \beta_2 = \beta_1 - 16(\frac{f_{\max}}{L})^2$$

$$\beta_3 = 4(\frac{f_{\max}}{L})^2, \quad \beta_4 = 1 - 8(\frac{f_{\max}}{L})^2, \quad \beta_5 = \beta_1 + 12(\frac{f_{\max}}{L})^2$$

当不考虑垂度影响时, $\frac{f_{\max}}{L} = 0$, 得 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 1$, $\beta_3 = 0$, 此时, 刚度矩阵同

二节点直线杆单元, 这是合理的。

3.4 坐标变换矩阵和节点等效荷载

经坐标变换后, 可得整体坐标系 $oxyz$ 下单元的非线性平衡方程, 然后将其集成成结构整体平衡方程如下:

$$KU = P_e + P_q - P_\sigma \quad (20)$$

式中, K 为整体刚度矩阵

$$K = \sum T^T k_e T \quad (21)$$

$$T \text{ 为坐标变换矩阵, } T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

矩阵中各元素如下:

$$l_1 = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m_1 = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad n_1 = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$l_2 = \frac{-(y_2 - y_1)}{S}, \quad m_2 = \frac{x_2 - x_1}{S}, \quad n_2 = 0$$

$$l_3 = -m_2 n_1, \quad m_3 = l_2 n_1, \quad n_3 = \frac{S}{L}$$

另外, 在公式(20)右端中, P_e 为节点荷载, P_q 为均布荷载引起的等效节点荷载, $P_q = \int N q dx$, P_e 同上。分别把各项代入公式(20), 得结构整体平衡方程, 采用Newton-Raphson法便可求解。

4 算例分析

根据上述步骤编制了相应程序, 并对下列两个算例进行了计算和比较, 分析结果表明此单元具有较好的精度。

例1 图2为集中荷载作用下两端水平支承的悬索, 跨度为16m, 索中水平张力 $H=85.15\text{kN}$, 集中荷载的间距为4m, 初始状态的荷载值分别为 $P_1 = P_2 = P_3 = 16\text{kN}$, 最大垂度为 $f=1.503\text{m}$, 悬索的截面积为 $A=10\text{cm}^2$, 弹性模量为 $E=18000\text{kN/cm}^2$ 。求荷载改变为 $P_1=20\text{kN}$, $P_2=20\text{kN}$, $P_3=16\text{kN}$ 时各荷载作用点的垂度以及各索段的张力。采用四个单元进行计算, 结果如下:

		文献[6]解析解 计算结果	文献[5]五节点 计算结果	本文 计算结果
荷载作用点的 垂度(cm)	1	116	115.70	115.84
	2	152	151.79	151.98
	3	108	108.05	108.18
索段的平均张 力(kN)	(1)	104.1	104.28	104.14
	(2)	100.4	100.56	100.41
	(3)	100.6	100.75	100.68
	(4)	103.6	103.73	103.61

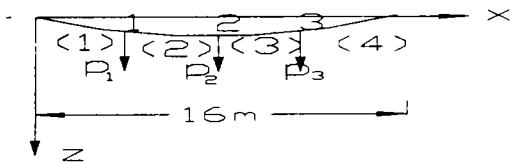


图 2

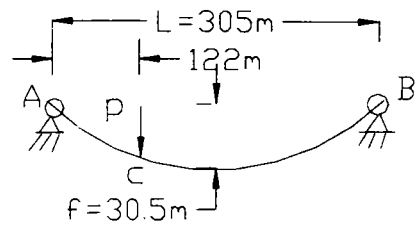


图 3

例2 图3为一大垂度单索($f_0/L=10\%$)，单位长度自重为 $q=46.5\text{N/m}$ ，自重垂度 $f=30.5\text{m}$ ，跨度 $=305\text{m}$ ，弹性模量为 $E=1.3\times10^{11}\text{Pa}$ ，截面积为 $=550\text{mm}^2$ ，跨中作用一集中荷载 $P=35.6\text{kN}$ ，采用两个单元进行计算，结果如下：

	文献[7]杆单元计算结果	文献[3]五节点计算结果	本文计算结果
C点的垂度(cm)	5.62	5.57	5.56

5 结论

从上述算例分析可得出下列结论：

- 1、本文提出的位移模式是合理的，其显式刚度矩阵具有较高的精度。
- 2、采用Newton-Raphson法求解有限元非线性方程，有较好的收敛速度和稳定性。
- 3、本文提出的二节点曲线索单元具有较好的精度，能适用于塔桅结构、张拉结构等大跨结构形式的非线性分析。用此单元还可进行形态分析理论、预应力计算方法、施工跟踪计算理论的研究。

参考文献：

[1] 金问鲁. 悬索结构计算理论[M]. 浙江科学技术出版社， 1981.

[2] 钱若军, 李亚铃, 夏绍华. 空间结构计算[M]. 南京: 河海大学， 1989.

[3] 唐建民. 索穹顶结构非线性分析的曲线索单元有限元法[J]. 同济大学学报， 1996, 24(1):6~10.

[4] 张其林. 预应力结构非线性分析的索单元理论[J]. 工程力学， 1993, 10(4): 93~101.

[5] 董明, 夏绍华. 张力结构的非线性有限元分析[J]. 计算力学学报， 1997, 14(3):268~275.

[6] 李著璟. 特殊结构[M]. 北京: 机械工业出版社， 1981.

[7] Prem Krishna. Cable suspended roofs[M]. New York: McGraw Hill， 1978. 44~56.

(下转46页)

- [5] Yunus S M. A study of different hybrid elements with and without rotational DOF for plane stress/plane strain problems[J]. Comput Struct, 1988, 30(5): 1127-1133.
- [6] Bergan P G, Felippa C A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1985, 50:26-69.
- [7] Allmax D J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis[J]. Comput Struct, 1984, 19(1):1-8.
- [8] 王选民. 高层建筑结构计算机分析的研究[D]. 博士学位论文, 长沙: 湖南大学, 1996,3.

A TRIANGULAR ELEMENT AND TWO TRIANGULAR PRISM ELEMENTS WITH ROTATIONAL DOF

WANG Xuan-min , LIU Guang-dong

(Institute of Structural Engineering, Hunan University, Changsha, 410082, P. R. China)

Abstract: Three elements with rotational DOF are presented: a 3-node triangular element which has two translational and a rotational DOFs per node, two 6-node triangular prism elements which have three translational and three rotational DOFs per node. These elements with simple formulation do not contain any spurious zero energy mode. Numerical results demonstrate that the elements have very good accuracy.

Key words: triangular element; triangular prism element; finite element; structural analysis

(上接64页)

A TWO-NODE CURVED CABLE ELEMENT FOR NONLINEAR ANALYSIS

YUAN Xing-fei , DONG Shi-lin

(Dept. of Civil Engineering, Zhejiang University , Hangzhou 310027)

Abstract: A two-node curved cable element is presented for nonlinear analysis of cable structures, in which the cable's initial shape of long-span structure is considered. The present method overcomes the disadvantages of two other widely used elements: two-node linear bar element which has low precision and multi-node element which is difficult to computerize for many D.O.F. Based on Updated Lagrangian Formulation, the stiffness matrix is derived explicitly according to the First Castigliano's Theory. Program has been developed and some examples are analyzed. The results show that the proposed element is reliable and applicable for the analysis of long-span structures, such as cable-stayed towers and tension structures.

Key words: two-node curved cable element; Lagrangian Method; Castigliano's Rule