

应变软化岩土材料内扩孔问题解析解

王晓鸿, 王家来, 梁发云

(同济大学土木工程学院, 上海 200092)

摘 要: 依据试验结果, 本文对岩土材料的剪胀和应变软化特性进行了恰当的简化后, 利用弹塑性理论和体积平衡原理, 推导出能反映岩土体的剪胀和应变软化的岩土体内扩孔问题的全部解析解, 讨论了岩土体的扩容和剪胀对扩孔结果的影响, 并对一些工程现象进行了解释。

关键词: 剪胀; 应变软化; 极限扩孔压力

中图分类号: TU431 **文献标识码:** A

1 前言

扩孔理论是分析沉桩效应和多种土工测试的理论基础, 具有重要的实际意义。对于许多岩土材料, 如岩石、硬粘土、结构化粘土、紧密封砂等具有明显的软化和剪胀现象, 传统的 Visic^[1]扩孔理论就显不足^[2], 已有一些文献^{[3][4][5]}讨论了这个问题, 并给出了该问题的逐步求解方法, 但未能给出问题的解析解。本文则更进一步, 给出了问题的解析解。

2 分析模型

2.1 受力模型

图1为无限岩土体中扩孔问题的分析示意图。在圆孔壁处作用扩孔压力 P , 在无限远处受静水压力 P_0 作用。在 P 较小时, 孔周围土体处于弹性状态; 当 P 达到某一定值时, 周围土体进入塑性; 随着 P 的增大, 孔周围将形成一个软化区。压力继续增大, 孔周围的岩土体将达到残余强度, 在孔周围形成三个区: 弹性区、软化区和塑性流动区。图中 a 为孔半径, R_1 为软化区半径, R_2 为塑性流动区半径。

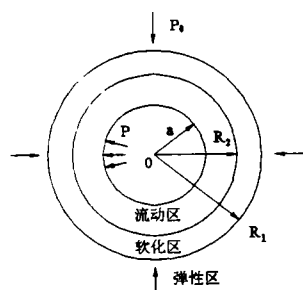


图1 扩孔力学模型

2.2 岩土体特性模型

岩土体为莫尔—库仑材料, 根据实验, 其应力应变关系以及 $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ 一曲线和 $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ 曲线皆可用图2的三折线模型来描述^[5]。这里 ε_1 、 ε_3 为大小主应变, ε_v 为体积应变, ε_1^p 、

收稿日期: 1998-02-18; 修订日期: 1998-08-28

基金项目: 地质灾害防治与工程地质环境保护国家专业实验室和自然科学基金项目(59738160)

作者简介: 王晓鸿(1970), 博士

ε_3^p 、 ε_1^p 、 $\varepsilon_3^{p'}$ 和 $\varepsilon_1^{p'}$ 为峰后局部坐标系内的塑性应变，以压为正，拉为负。参数 β 、 f 、 H 和 H 的值皆可由试验测得。根据受力，本文中 σ_r 、 σ_θ 、分别与 σ_1 、 σ_3 相对应，应变符号也有相同的对应关系。

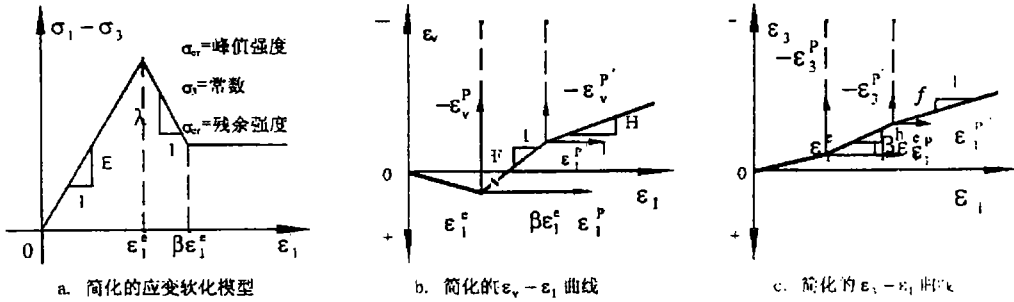


图2 简化的岩土体特性模型

根据莫尔—库仑准则，土体屈服函数为：

$$\sigma_r = M\sigma_\theta + \sigma_0 \quad (1)$$

式中 $M = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi)$ ， φ 为材料的内摩擦角。在初始屈服时， $\sigma_0 = \sigma_c$ ， σ_c 为土体的峰值强度；在软化区内， $\sigma_0 = \sigma_c - \lambda \varepsilon_r^p$ ， σ_r^p 为软化区内的径向塑性应变；在塑性流动区， $\sigma_0 = \sigma_{cr}$ ， σ_{cr} 为土体的残余强度。

在软化区内，根据图2，流动法则为：

$$h\varepsilon_r^p + k\varepsilon_\theta^p = 0 \quad (2)$$

式中 k 为一系数， $k=1$ 对应于柱形孔， $k=2$ 对应于球形孔，下同。

在塑性流动区，则有：

$$f\varepsilon_r^{p'} + k\varepsilon_\theta^{p'} = 0 \quad (3)$$

3 扩孔的弹塑性解析

3.1 弹性区 ($R_1 \leq r$)

平衡方程为：

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + k \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4)$$

几何方程为：

$$\varepsilon_r = -\frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{u}{r} \quad (5)$$

利用虎克定律可以求得弹性区的应力场为：

$$\sigma_r = P_0 \left[1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k+1} \right] + \sigma_{R1} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k+1}, \quad \sigma_\theta = P_0 \left[1 - \frac{1}{k} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k+1} \right] - \frac{1}{k} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k+1} \quad (6)$$

式中 σ_{R1} 为 $r = R_1$ 处的径向应力，由式(1)及式(6)，可得：

$$\sigma_{R1} = [(k+1)MP_0 + k\sigma_c] / (M+k) \quad (7)$$

径向净位移为：

$$u = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{R_1}{k} \left(\frac{R_1}{r}\right)^k (\sigma_{R_1} - P_0) = B \frac{R_1}{k} \left(\frac{R_1}{r}\right)^k \quad (8)$$

式中 $B = (1+\nu)(\sigma_{R_1} - P_0)/E$ 。

在弹性区和软化区交界处，由几何方程可得该处极限弹性应变为：

$$\varepsilon_r^e = -k\varepsilon_\theta^e = B \quad (9)$$

3.2 软化区($R_2 \leq r < R_1$)

在该区内总应变可写为：

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p \quad (10)$$

式中 ε_r^p 和 ε_θ^p 为软化区的塑性应变。由上式及式(2)、(9)可得软化区内位移协调方程如下：

$$h \frac{du}{dr} + k \frac{u}{r} = -B(h-1) \quad (11)$$

由边界条件： $u|_{r=R_1} = BR_1/k$ ，可得软化区位移解为：

$$u = -\frac{h-1}{h+k} rB + \frac{(k+1)h}{(h+k)k} BR_1 \left(\frac{R_1}{r}\right)^{\frac{k}{h}} \quad (12)$$

从而，在软化区内有：

$$\sigma_\theta = \sigma_c - \frac{(k+1)B\lambda}{h+k} \left[\left(\frac{R_1}{r}\right)^{1+\frac{k}{h}} - 1\right] \quad (13)$$

在软化区与流动区交界处， $r = R_2$ ， $\sigma_\theta = \sigma_{cr}$ ，又： $\lambda = (\sigma_c - \sigma_{cr})/(\beta - 1)B$

代入式(13)可得两塑性区的半径之比为：

$$\alpha = R_2/R_1 = \left[\frac{k+1}{(h+k)\beta - h + 1}\right]^{\frac{1}{1+\frac{k}{h}}} \quad (14)$$

再由平衡方程式(4)和屈服准则式(1)以及边界条件：

$$\sigma_r|_{r=R_1} = \frac{(k+1)MP_0 + k\sigma_c}{k+M} \quad (15)$$

可解得软化区内应力解为：

$$\sigma_r = \frac{(k+1)P_0M + k\sigma_c}{M+k} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{k(1-\frac{1}{M})} + \frac{(h+k)\sigma_c + (k+1)\lambda B}{k(h+k)(M-1)} \left[\left(\frac{R_1}{r}\right)^{k(1-\frac{1}{M})} - 1\right] \quad (16)$$

$$+ \frac{(k+1)B\lambda}{M(H+k)[1+k(1/h+1/M-1)]} \left[\left(\frac{R_1}{r}\right)^{k(1-\frac{1}{M})} - \left(\frac{R_1}{r}\right)^{1+\frac{k}{h}}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{M} \left\{ \sigma_r - \sigma_c + \frac{(k+1)B\lambda}{h+k} \left[\left(\frac{R_1}{r}\right)^{1+\frac{k}{h}} - 1\right] \right\} \quad (17)$$

3.3 塑性流动区($a \leq r < R_2$)

流动区内总应变可以写为：

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r|_{r=R_1} + \varepsilon_r^{p'}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta|_{r=R_1} + \varepsilon_\theta^{p'} \quad (18)$$

由几何方程式(5)、流动法则式(3)和软化区的解及上式，可得塑性流动区内位移协调方程为：

$$f \frac{du}{dr} + k \frac{u}{r} = -[(f-n)\beta + h-1]B \quad (19)$$

边界条件 $\varepsilon_r|_{r=R_1} = \beta B$ 可得流动区的位移解为:

$$u = -\frac{(f-h)\beta + h-1}{f+k} B_r + \frac{(h+k)\beta - h+1}{f+k} \cdot \frac{fBR_2}{k} \left(\frac{R_2}{r}\right)^{\frac{k}{f}} \quad (20)$$

在流动区内, $\sigma_0 = \sigma_{cr}$ 。由平衡方程式(4)和屈服准则式(1)以及边界条件: $\sigma_r|_{r=R_2} = P$, 可得流动区内的应力场解答为:

$$\sigma_r = (P + \frac{\sigma_{cr}}{M-1}) \left(\frac{a}{r}\right)^{k(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_{cr}}{M-1}, \sigma_\theta = \frac{1}{M} [(P + \frac{\sigma_{cr}}{M-1}) \left(\frac{a}{r}\right)^{k(1-\frac{1}{M})} - \frac{M}{M-1} \sigma_{cr}] \quad (21)$$

3.4 塑性区半径

在 $r = R_2$ 处, 径向应力连续, 从而有:

$$\begin{aligned} & \frac{(k+1)MP_0 + k\sigma_{cr}}{k+M} \alpha^{-k(1-\frac{1}{M})} + \frac{(h+k)\sigma_{cr} + (k+1)\lambda B}{k(h+k)(M-1)} [\alpha^{-k(1-\frac{1}{M})} - 1] \\ & + \frac{(k+1)\lambda B}{M(h+k)[1+k(1/h+1/M-1)]} [\alpha^{-k(1-\frac{1}{M})} - \alpha^{-(1+\frac{k}{h})}] \\ & = A = (P + \frac{\sigma_{cr}}{M-1}) \left(\frac{a}{R_2}\right)^{k(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_{cr}}{M-1} \end{aligned} \quad (22)$$

式中 A 由左端式子定义。由上式可解得塑性区半径为:

$$R_2 = a[(A + \frac{\sigma_{cr}}{M-1}) / (P + \frac{\sigma_{cr}}{M-1})]^{-\frac{1}{k(1-\frac{1}{M})}}, \quad R_1 = R_2 / \alpha \quad (23)$$

3.5 最终扩孔压力和最大塑性区半径

根据体积平衡条件, 有:

$$\frac{2k}{k+1} (\alpha^{k+1} - \alpha_i^{k+1}) \pi = \frac{2k\pi}{k+1} [R_1^{k+1} - (R_1 - u_{R_1})^{k+1}] + \Delta_1 + \Delta_2 \quad (24)$$

式中 u_{R_1} 为 $r = R_1$ 处的径向位移。 α_i 为孔原半径, Δ_1 , Δ_2 分别为软化区和流动区的体积变形。由软化区的位移解可得:

$$\Delta_1 = 2k\pi \int_{R_1}^{R_2} (\varepsilon_r + k\varepsilon_\theta) r^k dr = -2k\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{du}{dr} + k \frac{u}{r}\right) r^k dr = \frac{2k}{k+1} LR_1^{k+1} \pi \quad (25)$$

$$\text{式中} \quad L = \left\{ (h-1)(1 - \alpha^{k+1}) - \frac{(k+1)}{k} h[1 - \alpha^{k(1-\frac{1}{h})}] \right\} \cdot (k+1)B / (h+k)$$

由流动区的位移解可得:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 2k\pi \int_a^{R_2} (\varepsilon_r + k\varepsilon_\theta) r^k dr = 2k\pi \int_a^{R_2} \left(-\frac{du}{dr} - k \frac{u}{r}\right) r^k dr \\ &= \frac{2k\pi}{k+1} \{S[1 - (a/R_2)^{k+1}] - T[1 - (a/R_2)^{k(1-\frac{1}{f})}]\} B \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{式中} \quad S = [(f-h)\beta + h-1](k+1)B / (f+k)$$

$$T = [(h+k)\beta - h + 1](K+1)Bf/[k(f+k)]$$

将式(25)、(26)及 $u_{R_1} = BR_1/k$ 代入式(24), 略去 a_i 和 u_{R_1} 的高次项, 有:

$$(1+S)(a/R_{2\max})^{k+1} - T(a/R_{2\max})^{k(1-\frac{1}{f})} = ((k+1)/B+L)\alpha^{-(k+1)} + S - T \quad (27)$$

由上式即可解出最大塑性区半径 $R_{2\max}$ 和 $R_{1\max} = R_{2\max}/\alpha$ 。

将式(27)的解代入式(22), 可得最终扩孔压力:

$$P_L = (A + \frac{\sigma_{cr}}{k-1})(\frac{R_{2\max}}{a})^{k(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_{cr}}{k-1} \quad (28)$$

4 计算讨论

4.1 关于结果的讨论

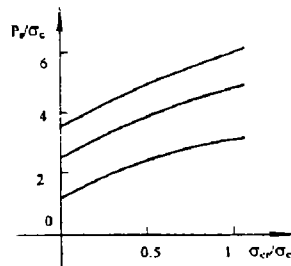
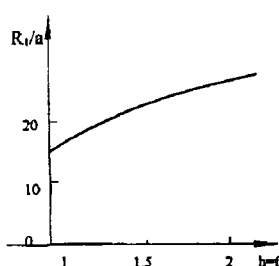
以上文中的分析是建立在孔周围已形成三个区域的基础之上的。如果土体尚未进入塑性流动阶段或土体为硬化材料, 则以上结果不再适用。

由式(7)可得, 当压力 P 达到 $P_f = [(k+1)kP_0 + k\sigma_c]/(k+M)$ 时, 孔周围土体强度达到峰值, 开始进入软化阶段。在式(16)令 $r = a = R_2$, 则可得孔周围进入流动区的扩孔压力为: $P_f = A$, 式中 A 的定义在式(22)中给出。

如果扩孔压力小于 P_f , 孔周围土体处于弹性区, 由弹性解确定应力分布。如果 $P_f < P_L \leq P_f$ 或土体为硬化材料时, 此时软(硬)化区半径由式(17)和内边界条件确定; 而在体积平衡方程中令 $\Delta = 0$, 就可求得最大塑性区半径 R_1 , 代回式(17)即可确定最终扩孔压力。当材料为 Tresca 材料时, 如不计 P_0 , 此时以 $h = f = k = 1$, 由式(27), 则所得结果与文[1]的结果是一致的。

4.2 剪胀和软化对扩孔的影响

图 3 给出了不同的软化区和剪胀程度对柱形孔的影响。计算参数取为: $E = 10^5 \text{ kPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_c = 10^3 \text{ kPa}$ 。由图可以看出: 随着剪胀的增大, 最大塑性区半径和最终扩孔压力也随之增大; 而残余强度越低, 最终扩孔压力也随之降低。



(a) 剪胀对柱形孔扩张最大塑性区半径的影响 (b) 剪胀和软化对柱形孔扩张最终扩张应力的影响

图 3 软化和剪胀对柱形孔的影响

由于 Vesic 在处理 $\Delta < 0$ 时取 $\Delta = 0$, 相当于图中 $h = f = 1$ 的情况。显然在有剪胀的土体中 Vesic 理论所计算的最大塑性区半径比实际要小。

图 4 比较了不考虑剪胀和软化及考虑两种因素的土体径向压力分布计算结果。图中 I

是 Vesic 预测值, 曲线 II 为本文公式计算结果。计算参数为: $h=f=1.5$, $\beta=1.5$, $\sigma_{cr}/\sigma_c=0.3$, 其余同前。

由图可以看出, 在靠近孔壁周围土体内的径向压力在不考虑剪胀和软化时, 比考虑这两个因素时要大; 但在此范围之外, 则正相反。文[6]中观测的结论正是这一趋势的反映。

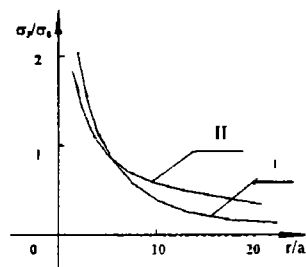


图 4 径向应力分布

5 结论

本文利用弹塑性理论获得了具有软化和剪胀特性的土体中柱形、球形扩孔的全部解析解答, 大大简化了计算分析过程, 便于实际应用。

本文的计算表明, 剪胀与软化对扩孔的影响是显著的。剪胀越大, 相应的塑性区半径和最终扩孔压力也大; 残余强度越低, 最终扩孔压力也降低。

本文结果克服了传统理论的不足, 可以用来分析结构性粘土等具有软化和剪胀土体中沉桩的挤土效应以及其它土工现场试验成果。

参考文献:

- [1] Vesic, A S. Expansion of Cavities in Infinite Soil Mass[J]. ASCE-JSMFD, 1972, 98(3): 265-290.
- [2] 张际如. 砂性土内球形孔扩张的能量平衡分析及其应用[J]. 土木工程学报, 1994, 27(4): 37-44.
- [3] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑材料软化特性的柱形孔扩张问题[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(4): 10-19.
- [4] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的弹脆塑性软化柱形孔扩张问题[J]. 河海大学学报, 1996, 24(4): 65-72.
- [5] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的线性软化柱形孔扩张问题[J]. 岩土力学与工程学报, 1997, 16(6): 550-557.
- [6] 唐世栋. 用有效应力原理分析桩基承载力的变化过程[D]. 上海: 同济大学, 1990.

ANALYTICAL SOLUTION TO EXPANSION OF CAVITY IN STRAIN-SOFTENING MATERIALS

WANG Xiao-hong, WANG Jia-lai, LIANG Fa-yun

(Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract: On the basis of experiment results, a simplified geomaterial behavior model is given. By using elasto-plastic theory, the analytical solution to the expansion of cavities is presented. The solution takes the strain-softening and shear dilation into consideration. Through volume-balance equation, the limit expansion pressure and plastic zone are presented in this paper as well. The effect of softening and shear dilation on expansion are examined. It is shown that the results in this paper are in good agreement with other available data.

Key words: shear dilation; strain-softening; limit expansion pressure