

文章编号: 1000-4750(1999)02-0134-06

塑性大变形有限元静水压力的改进算法

崔振山, 刘 才

(燕山大学, 秦皇岛 066004)

提 要: 本文针对塑性大变形有限元中静水压力计算精度低的问题, 研究了三维八节点等参元的偏应力导数佳点, 提出了一种改进的静水压力间接积分算法。将该算法应用于金属塑性成型过程的有限元模拟, 较好地解决了大步长情况下应力计算精度低的问题。

关键词: 静水压力; 弹塑性大变形; 有限元

中图分类号:

文献标识码: A

1 引言

修正的 Lagrange(U.L 法)有限元方法已广泛地用于弹塑性大变形的金属成型过程数值模拟研究中, 其本构方程一般是基于 Prandtl-Reuss 流动理论构造的。在应变增量步长很小时, 该方法可以较好地给出应力、应变等解答, 然而, 在应变增量远大于屈服应变量级时, 该方法在计算静水压力时会产生较大误差, 从而会导致应力计算失真。因此, 在有限元计算中, 一般要求应变增量步长要足够小, 例如, 文[1]在模拟铝材挤压时采用的应变增量为 0.1%, 而文[2]则认为应变增量不应超过屈服应变的 1/10。对于塑性成型等大变形问题, 以如此小的应变增量进行计算, 不仅会显著延长计算时间, 而且会增大累积误差。

Alexander 和 Price 提出了一种应用偏应力场计算静水压力的间接计算方法^[3], 该方法根据平衡方程, 由偏应力场的导数得到静水压力的导数, 然后, 从一个单元的自由表面出发, 顺次积分得到各单元的静水压力。然而, 由于偏应力场导数计算的不准确, 以及累积误差随积分路径延长而增大, 使得该方法的计算精度难以保障, 因此该方法没有被广泛采用。本文在偏应力导数精度的理论分析基础上, 提出了偏应力导数佳点概念和逐层积分法, 对这一方法进行修正, 较好地克服了以上两个缺陷, 提高了静水压力和应力的计算精度。

2 Prandtl-Reuss 理论的静水压力计算精度

Prandtl-Reuss 理论给出:

$$d\varepsilon_{ii}^p = 0 \quad (1)$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2)$$

收稿日期: 1997-11

作者简介: 崔振山(1963-), 男, 博士, 副教授, 从事大变形弹塑性有限元法理论和塑性成型数值模拟研究

基金项目: 机械工业部教育司科研基金资助项目

$$d\sigma'_{ij} = 2Gd\varepsilon'_{ij} - 2Gd\lambda\sigma'_{ij} \quad (3)$$

$$d\sigma_m = \kappa d\varepsilon_{ii} \quad (4)$$

其中 G 、 κ 分别为剪切弹性模量和体积弹性模量， $d\lambda$ 为与硬化有关的乘子。采用 U.L 法描述时，由于以 t 时刻平衡构形为参考构形，故可认为 $t = t + \Delta t$ 时刻现时构形坐标 x 等同于 t 时刻参考构形坐标 X ，本构方程中 Jaumann 应力增量和 Green 应变增量的关系可表示为：

$$\Delta\sigma'^j_{ij} = D_{ijkl}\Delta E_{kl} \quad (5)$$

对(5)式令 $i = j$ 进行缩并，并代入 D_{ijkl} 的分量值，可得与(4)式类似的式子：

$$\Delta\sigma'^j_m = \kappa\Delta E_{ii} \quad (6)$$

当应变增量较大时，引起静水压力计算不准的原因有以下两条：

(1) 体积应变

$$\theta = |\delta_y + \Delta u_{i,j}| - 1$$

仅对微小变形，才有 $\theta = \Delta u_{i,j}$ ，在应变增量较大时，用 ΔE_{ii} 取代体积应变误差较大。

(2) 理论上体积应变为弹性应变，而塑性应变 $\Delta E^p_{ii} = 0$ ，但由于计算误差的不可避免，使得数值计算中 $\Delta E^p_{ii} \neq 0$ ，并且在应变增量较大时，塑性应变增量会达到弹性应变增量的几十倍甚至几百倍， ΔE^p_{ii} 的计算值可能会比 ΔE^e_{ii} 大很多，因而 ΔE^p_{ii} 计算误差的存在会使体积应变产生较大的误差。

考虑到体积弹性模量数值很大，由(6)式可见，在体积应变存在计算误差时，该误差在静水压力的计算中被进一步放大，因而应力值会产生较大的误差，甚至会改变正负号。

大量计算表明，在应变增量较大时(例如应变增量步长达到 0.01~0.02)，采用 U.L 法有限元得到的塑性应变和变形仍很准确^[4,5]，特别是采用应力计算的中点正交法则(mean-normal method)^[6]，能够保证偏应力的计算精度，因而通过适当地构造偏应力导数，就可用间接法计算静水压力。

3 静水压力间接计算法的原理及实施

在现时构形上，Cauchy 应力满足平衡方程：

$$\sigma_{y,j} = 0 \quad (7)$$

且

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij}\sigma_m$$

因此

$$\sigma_{m,i} = -\sigma'_{ij,j} \quad (8)$$

当已知偏应力场后，可以得到静水压力的偏导数，因此，在变形固体内，由 A 点到 B 点静水压力的增量为：

$$\Delta\sigma_m = \int_A^B \sigma_{m,i} dx_i \quad (9)$$

如果变形固体存在自由表面，则该自由表面上任一点法向偏应力的负值即为该点的静水压

力。当已知一点的静水压力后, 就可根据(8)式和(9)式计算变形体内任一点的静水压力。

这样得到的静水压力计算精度取决于偏应力场导数计算精度和积分路径的长短, 下面以常用的三维八节点块体等参元为例, 分析偏应力场导数的精度, 并构造积分方案。

3.1 偏应力导数佳点

对于八节点块体等参元, 位移解一般具有二阶精度, Gauss 点处应力解(及偏应力解)具有一阶精度^[7], 而应力导数则仅具有零阶精度。但恰当地选择偏应力导数的计算位置, 可使该导数精度提高一阶。

对于正规剖分的块体线性单元, 由 $2 \times 2 \times 2$ Gauss 点的偏应力 ${}^G\sigma'_{ij}$ 外插得到单元节点偏应力 ${}^D\sigma'_{ij}$:

$${}^D\sigma'_{ij} = \sum_{k=1}^8 N_k ({}^G\sigma'_{ij})_k \quad (10)$$

其中 N_k 为形函数,

$$N_k = \frac{1}{8}(1 + \xi_k \xi)(1 + \eta_k \eta)(1 + \zeta_k \zeta) \quad (11)$$

外插时应注意 Gauss 点自然坐标为单位长度, 而节点自然坐标 $|\xi| = |\eta| = |\zeta| = \sqrt{3}$ 。

当一个节点由 m 个单元共有时, 我们以绕节点平均值作为该节点的偏应力, 即:

$${}^D\bar{\sigma}'_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m ({}^D\sigma'_{ij})_n \quad (12)$$

其中 ${}^D\bar{\sigma}'_{ij}$ 表示平均后的节点偏应力, 其精度不会低于 Gauss 点的精度。

仿照有限元的位移插值方法, 在单元内部由节点偏应力值构造偏应力场:

$$(\sigma'_{ij})_I = \sum_{k=1}^8 N_k ({}^D\bar{\sigma}'_{ij})_k \quad (13)$$

(脚标 I 代表插值)于是得到偏应力分量在单元内的导数为:

$$\frac{\partial (\sigma'_{ij})_I}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial x_j} ({}^D\bar{\sigma}'_{ij})_k \quad (\text{对 } j \text{ 不求和}) \quad (14)$$

下面我们证明, (14)式给出的偏应力导数精度在单元形心处将比其它位置的高一阶。

考察(13)式的插值精度。插值 $(\sigma'_{ij})_I$ 有余项:

$$\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_I = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}(\eta^2 - 1) \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1) \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \zeta^2} + o(h^2) \quad (15)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_I]}{\partial \xi} &= \xi \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \xi^2} + o(h^3) \\ \frac{\partial [\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_I]}{\partial \eta} &= \eta \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \eta^2} + o(h^3) \\ \frac{\partial [\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_I]}{\partial \zeta} &= \zeta \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \zeta^2} + o(h^3) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 h 为单元的特征尺寸。偏应力导数的余项为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\sigma'_{ij})_1}{\partial x_j} &= \frac{\partial [\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_1]}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial [\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_1]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\ &\quad + \frac{\partial [\sigma'_{ij} - (\sigma'_{ij})_1]}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \quad (\text{对 } j \text{ 不求和}) \end{aligned} \quad (17)$$

由 Jacobian 行列式性质可知, 对于正规剖分, 有

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right|, \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right| \leq \frac{C}{h} \quad (18)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \xi^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \xi^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \xi^2} \right| \leq C_1 h^2 \quad (19)$$

其中 C 、 C_1 是与 h 无关的常数。将(16)式与(18)式代入(17)式, 得到

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\sigma'_{ij})_1}{\partial x_j} \leq \left[\xi \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \eta^2} + \zeta \frac{\partial^2 \sigma'_{ij}}{\partial \zeta^2} + o(h^3) \right] \frac{C}{h} \quad (20)$$

容易看出, 在单元形心, 由于 $\xi = \eta = \zeta = 0$, 故

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\sigma'_{ij})_1}{\partial x_j} \leq o(h^2) \quad (21)$$

即单元形心处偏应力导数精度比其它位置的高一阶, 因此称单元形心为偏应力导数佳点。

以上分析同样适用于其它线性单元(如平面四节点单元)。对于二次元, Gauss 点为应力佳点, 偏应力具有与位移同阶的精度^[7], 以 Gauss 点为基准, 通过插值可得到偏应力场, 该偏应力场的导数佳点同样在单元形心处。

3.2 两点间静水压力增量

对于线性单元, 依上述插值过程计算单元形心处的偏应力导数和静水压力导数, 并假设两相邻单元形心间静水压力导数呈线性变化, 沿着由单元 1 形心 A 到单元 2 形心 B 的直线积分路径, 静水压力变化为:

$$\Delta \sigma_m = \bar{\sigma}_{m,i} \Delta x_i \quad (22)$$

$$\bar{\sigma}_{m,i} = \frac{1}{2} [(\sigma_{m,i})_A + (\sigma_{m,i})_B], \quad \Delta x_i = (x_i)_B - (x_i)_A$$

3.3 自由表面处的静水压力

在包含自由表面的单元上, 由 Gauss 点偏应力可以插值得出自由表面形心处的偏应力 σ'_{ij} , 设自由表面的外法线方向余弦为 n_i , 由该表面法向应力为零, 可得形心处静水压力,

$$\sigma_m = -\sigma'_N = -\sigma'_{ij} n_i n_j \quad (23)$$

因而从任一自由表面出发, 由(22)式即可得到所有单元的静水压力。

3.4 逐层积分法

由于偏应力存在计算误差, 并且在相邻两单元形心间假设静水压力的导数呈线性变化, 均会给 $\Delta \sigma_m$ 带来一定误差。随着积分路径的延长, 累积误差将会加大, 而缩短积分路径可

以减少累积误差。因此，我们取所有带自由表面的单元为积分出发点，作为积分的第一层，将所有与第一层相邻的单元作为第二层，…。这种积分方法可称为逐层积分法。对于一般的塑性成型问题，都存在较多的自由表面，利用这一方法可以显著提高积分精度。

4 数值算例

考察一个铝块在粗糙平板间镦粗问题^[4]。铝块的初始体积为 $40 \times 20 \times 20\text{mm}$ ，根据对称性取其八分之一划分了 $12 \times 6 \times 6$ 个三维八节点块体单元(见图 1)。取铝的弹性模量为 $E=70\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu=0.34$ ，应变硬化函数为

$$Y = 50 + 21 \text{Ln} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_p + 0.00465}{0.00465} \right) + 9 e^{4.5(\bar{\varepsilon}_p - 0.6909)} \quad \text{MPa} \quad (\bar{\varepsilon}_p \leq 0.7)$$
$$Y = 164.8 + 72(\bar{\varepsilon}_p - 0.7) \quad \text{MPa} \quad (\bar{\varepsilon}_p > 0.7)$$

采用 U.L 法弹塑性有限元计算，本构方程采用 Jaumann 应力增量和与转动无关的应变表示，对于边界摩擦问题引入了摩擦单元的计算方法，摩擦因子 $m=0.7$ ，以上参数同文[4]。计算采用了割线增量法，总压下量为 40.2%，分别用大位移增量步(每步压下量 2%)和小位移增量步(每步压下量 0.2%)进行计算，并分别用间接法和 Prandtl-Reuss 理论的直接法计算了静水压力。图 2 和图 3 是用本文静水压力计算法得出的接触面上沿两条中心线的单位压力分布和静水压力分布在两种步长下的计算结果。图 4 则给出了小步长下用 Prandtl-Reuss 理论的直接算法得出的接触面上沿中心线 x 轴的单位压力分布和静水压力分布。对接触面上的接触压力进行积分可给出总压力，其中采用本文静水压力计算法得出的在小步长和大步长下的总压力计算值分别为 206.75kN 和 188.64kN，采用 Prandtl-Reuss 理论的直接算法给出的相应于小步长下的总压力为 572.43kN。文[4]采用弹塑性有限元法并应用了 Alexander 和 Price^[3]的静水压力计算法，给

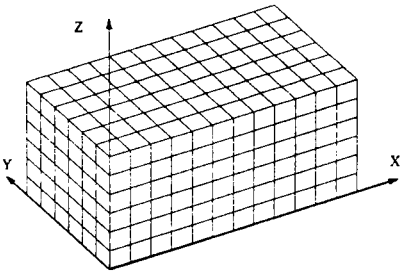


图 1 八分之一铝块的网格划分

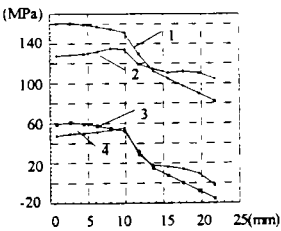


图 2. 静水压力间接算法得到的接触面沿中心线 x 轴单位接触压力和静水压力分布。

1、2：步长压下量为 0.2%和 2%的单位接触压力。3、4：相应于 1、2 的静水压力。

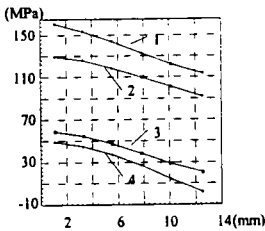


图 3. 静水压力间接算法得到的接触面沿中心线 y 轴单位接触压力和静水压力分布。

1、2：步长压下量为 0.2%和 2%的单位接触压力。3、4：相应于 1、2 的静水压力。

出的总压力为 120kN，而该文的实测值为 220kN。与实测值比较，本文方法得出的总压力计算误差分别为 6%(小步长)和 14.3%(大步长)，其精度比 Alexander 和 Price 的方法有大幅度的提高。而即使采用小步长计算，直接算法得到的总压力误差也超过了 160%。比较图 2 和图 4 可见，采用静水压力的直接算法和间接算法几乎不影响偏应力大小，应力的差别仅取决于静水压力，可见，对于塑性大变形问题，应力计算误差主要决定于静水压力的计算精度。采用静水压力间接算法时，以上两种步长得到的应力数值差别不大，故可以使用较大步长进行计算。

5 结论

1、本文提出了应用偏应力导数佳点和逐层积分法来构造的静水压力间接算法，较好地解决了大变形下应力的计算精度问题，并允许使用较大的应变增量步长进行计算，提高了弹塑性大变形有限元法的计算效率。

2、由于静水压力的间接计算仅取决于偏应力场，因而本文方法独立于有限元法的计算过程，可以方便地加入到现有的大变形弹塑性有限元程序中，实现对这些程序的改造。也可以作为刚塑性有限元求解静水压力的方法。

参考文献：

- [1] 张波. 铝合金热挤压有限元模拟及裂纹研究(博士学位论文). 清华大学, 1992
- [2] Wang N M. Numerical Analysis of Forming Process. Ed. Pittman F T, John Wiley & Sons. 1984:117
- [3] Alexander J M and Price J W H. Finite Element Analysis of Hot Metal Forming. 18th MTDR Conf, 1977: 267-274
- [4] Pillinger I, The Prediction of Metal Flow and Properties in Three-dimensional Forgings Using the Finite Element Method, Ph.D.Thesis, University of Birmingham, UK,1984
- [5] Liu Cai(刘才), Finite Element Modelling of Deformation and Spread in Slab Rolling, Int. J. Mech. Sci., 1987,29(4): 271-283
- [6] Nagteggal J C and de Jong J E, Some Computational Aspects of Elastic-plastic Large Strain Analysis, In: Oden J T eds. Computational Methods in Nonlinear Mechanics, Amsterdam, North-Holland Pub,1980:303-339
- [7] 陈传森. 有限元法及其提高精度的分析. 湖南科学技术出版社, 1982

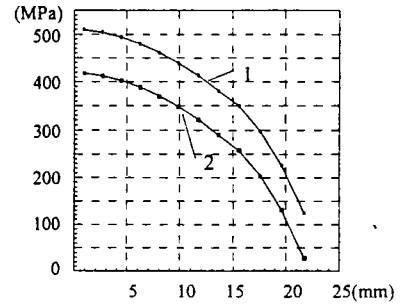


图 4. 静水压力直接算法得到的接触面上沿中心线 x 轴的单位压力和静水压力分布(步长压下量 0.2%)。1：单位压力；2：静水压力

- [3] 吴晓. 弹性直杆热膨胀状态下的非线性振动. 工程力学, 1996;4:129-134
- [4] 吴晓. 转子系统热膨胀状态下固有横振频率. 振动与冲击, 1998;1:63-69
- [5] 吴晓. 三参数地基上矩形板热振动固有频率. 振动与冲击(已录用)
- [6] Raju, K K and Rao, G V. Thermal postbuckling of a square plate resting on an elastic foundation by finite element method. Computers and Structures. 1988; 28(2): 195-199

THE NONLINEAR NATURAL THERMAL VIBRATION OF RECTANGULAR ORTHOTROPIC PLATES

WU Xiao

MA Jian-xun

(1. Changde Senior College, Hunan 415000; 2. Xian Jiaotong University, Shanxi 210018)

Abstract: The nonlinear natural thermal vibration of rectangular orthotropic plates is studied by improved L - P method and Galerkin principle, and the effects of temperature, ratio of length and width etc. to natural thermal vibration frequency are discussed.

Key words: orthotropic, rectangular plate, thermal vibration, temperature, ratio of length and width, frequency

(上接 139 页)

A MODIFIED HYDROSTATIC STRESS CALCULATION METHOD FOR LARGE DEFORMATION ELASTOPLASTIC FINITE ELEMENT

CUI Zhen-shan LIU Cai

(Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: To solve the problem of poor accuracy in calculation of the hydrostatic stress in large deformation elastoplastic finite element, the paper presented a study on the super-accuracy locations of deviatoric stress derivatives for 3-D 8-node iso-parametric element, and established a modified indirect integral method for hydrostatic stress. Application of the method in the finite element simulation of metal forming process obtains a good accuracy in stress calculation with large strain increments.

Key words: hydrostatic stress, elastoplastic large deformation, finite element