

降阶积分中刚度的奇异性分析

兑关锁

赵国景

(南京理工大学土木工程与力学系, 南京 210094) (中国矿业大学北京研究生部, 北京 100083)

提 要 本文研究了薄厚板壳有限单元统一性理论中, 由于采用降阶积分而使得刚度矩阵产生奇异的问题。得到了根据插值函数来计算刚度矩阵秩的计算公式, 并对几种降阶积分单元进行了验算。

关键词 降阶积分, 罚函数, 奇异性, 多余零能模态

一、引 言

根据薄板理论的基本假设, 其变形完全由横向位移来决定, 而不考虑横向剪切作用。在此前提下, 则位移函数必须为 C^1 类连续才能保证单元的协调性。而厚板则需考虑横向剪切作用, 位移参数不仅有横向位移, 还包括两轴向转角。由于将横向位移与转角作为独立的位移参数, 则位移函数的协调性只要求其 C^0 类连续就可以了。于是人们就试图用考虑横向剪切作用的单元去计算薄板, 利用斜率及横向位移来进行独立插值, 使用罚函数的方法将剪切部分强加上去, 从而把厚板理论和薄板理论联系起来获得了许多优秀的薄厚通用有限单元^[1-3]。

在采用这种方法计算中, 当板厚很小时罚函数就特别大, 若刚度矩阵中约束部分非奇异, 则计算结果产生的误差就相当大, 通常称为剪切自锁现象。为了克服这种现象, 可采用降阶积分的方法, 使刚度矩阵中约束部分奇异, 同时还必须保证整体刚度矩阵为非奇异。但对整体刚度矩阵奇异性的分析确是一个非常复杂的问题, O. C. Zienkiewicz^[1]曾指出在某种情况下, 易证明怎样就一定出现奇异性; 但是证明怎样就一定不出现奇异确较困难。本文根据单元选用的插值函数, 给出了计算刚度矩阵秩的所谓 Q 矩阵法及计算多余零能模态个数的公式, 从而获得了刚度矩阵为非奇异的充分条件。最后通过已有的各种不同

类型降阶积分单元来验证了本文的理论。

二、薄厚板统一性理论

考虑横向剪切变形的板弯曲单元其刚度平衡方程通常可由最小势能原理导出。对线弹性各向同性材料的中厚板单元的能量泛函为

$$U(w, \theta_x, \theta_y) = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_1^T D \varepsilon_1 dx dy + \iint \alpha \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 \right] dx dy - \iint w q dx dy \quad (1)$$

其中, D 为板的弹性矩阵, w 为板的横向位移, k 为剪力校正因子, θ_x 和 θ_y 分别为中面法线变形后绕 x 和 y 轴的转角, G 为剪切弹性模量, E 为弯曲弹性模量, t 为板的厚度。

$\alpha = \frac{kG}{E} \left(\frac{L}{t} \right)^2$, 应变可由转角和其一阶导数给出为 $\varepsilon_1 = (\theta_{yx} - \theta_{xy}, \theta_{yy} - \theta_{xx})^T$ 。

取位移函数和位移模式分别为

$$u = (w, \theta_x, \theta_y)^T, \quad u = \sum_{i=1}^n N_i a_i = N a \quad (2)$$

其中 N_i 为形函数, 且 $a = (a_1, a_2, \dots, a_8)^T$, $a_i = (w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})^T$

由于 U 为二次线性泛函, 利用 δa_i 的独立性, 可得到线性标准形式的平衡方程

$$K a + f = 0 \quad (3)$$

若将能量泛函中的弯曲变形能和剪切变形能分开考虑, 则上式可写为

$$(K_1 + \alpha K_2) a + f = 0 \quad (4)$$

其中

$$U_1 = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \iint [\theta_{xx}^2 + 2\mu\theta_{xx}\theta_{yy} + \theta_{yy}^2 + \frac{1-\mu}{2}(\theta_{xy} + \theta_{yx})^2] dx dy$$

$$U_2 = \iint \alpha \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 \right] dx dy, \quad K_{1ij} = \frac{\partial U_1}{\partial a_i \partial a_j}, \quad K_{2ij} = \frac{\partial U_2}{\partial a_i \partial a_j}$$

随着板厚度的减小弯曲变形能也随之减小, 但横向剪切变形能所引起的误差却以 $\left(\frac{L}{t} \right)^2$ 量级扩大。所以在有限元的计算中一定要尽可能精确地表示横向剪切变形能, 否则将产生剪切自锁现象。即对薄板应尽可能满足 Kirchhoff 假设

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y = 0 \quad (5)$$

由罚函数法知, 薄板问题的求解等价于下面无约束问题的求解

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \iint \varepsilon_1^T D \varepsilon_1 dx dy + \iint \alpha \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 \right] dx dy - \iint w q dx dy \right\} \quad (6)$$

而这正是考虑横向剪切变形能的泛函极值问题, 所以两种板理论就可以用罚函数的方法将其统一了起来^[1]。

然而将罚函数用于薄板的有限元计算中去, 虽然可以绕过单元的 C^1 连续性要求的困难, 但随之而来却出现了其它的问题。随着板厚度的减小, α 迅速增长, 使得(4)式退化为

$$K_2 a = -\frac{f}{\alpha} \rightarrow 0$$

所以只有当 K_2 奇异时, 才能保证(3)有非恒零解。但为保证解的唯一性, 又必须要求整体刚度矩阵为非奇异。所以对刚度矩阵奇异性的研究是非常必要的。

三、刚度矩阵的奇异性分析

通常刚度矩阵的计算都是采用高斯数值积分获得, 一般采用精确数值高斯积分求得的刚度矩阵总能为非奇异的, 但采用所谓降阶积分, 即采用较少的高斯积分点个数, 就不能保证刚度矩阵的非奇异性, 使得这种积分不实用。但为了保证 K_2 的奇异性, 通常采用降阶积分来计算 K_2 , 用精确数值高斯积分来计算 K_1 。由此可见刚度矩阵的奇异性是和高斯积分点个数的选取直接相关, 所以下面讨论高斯积分点的个数和刚度矩阵的关系。由于整体刚度矩阵的秩完全由单元刚度矩阵决定, 因而, 首先讨论单元刚度矩阵的秩。

根据高斯数值积分的定义

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (7)$$

式中 m, n 为高斯积分的个数, W_i 为加权系数, ξ_i, η_j 为 i, j 积分点的局部坐标。

对考虑横向剪切的板单元刚度矩阵可表示为

$$K^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_i^T D B_j W_i W_j |J_{ij}| = H^T G H \quad (8)$$

$$H = (B_{11}^T, B_{12}^T, \dots, B_{1m}^T, B_{21}^T, \dots, B_{2m}^T)^T$$

$$G = \begin{bmatrix} D\beta_{11} & & & 0 \\ & D\beta_{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D\beta_{mm} \end{bmatrix}, \quad \beta_{ij} = W_i W_j |J_{ij}|$$

其中 $|J|$ 为雅可比行列式, $|J_{ij}|$, B_{ij} 分别为 $|J|$ 与 B 在局部坐标 (ξ_i, η_j) 点的取值。

为了计算单元刚度矩阵的秩, 先给出下面的引理

引理1 对于任意矩阵 $A_{m \times n}$ 都有: 秩($A^T A$) = 秩(A)

引理2 对任意矩阵 $A_{m \times n}$ 和正定矩阵 $B_{m \times m}$ 都有: 秩($A^T B A$) = 秩(A)

由于单元刚度矩阵中的 G 显然为正定矩阵, 则由上面的引理可推出

定理1 秩(K^*) = 秩(H)

由于矩阵 H 是由矩阵 B 在各高斯积分点的值组成, 所以讨论刚度矩阵的秩, 只需要讨论矩阵 B 的秩就可以了。若将矩阵 B 的行数称为节点的独立关系数, 可知矩阵 H 的行数则为高斯积分点个数乘上每个节点的独立关系数, 将其称之为总的独立关系数, 将刚度

矩阵的行数或列数（节点数乘节点变量数）称为总自由度数。若令 b 为高斯积分点个数， k 为每点的独立关系数， j 为总自由度数，可知 H 为一 $b \times k$ 行， j 列的矩阵，所以

$$\text{秩}(K^e) = \text{秩}(H) \leq \min(b \times k, j)$$

总体刚度矩阵的秩也可通过上面的方法来讨论。在文献^[1]中曾给出

定理2 引入边界条件为 e 个，那么方程组 (3) 有唯一物理意义解的必要条件是

$$b \times k - j + e \geq 0 \quad (9)$$

但我们知道重要的是是否有唯一解，即充分条件，而不是必要条件。如果我们能将刚度矩阵的秩计算出来的话，一切问题就解决了，下面我们来研究矩阵 B 的秩，取局部坐标为 ξ, η ，位移模式取为

$$w = d^T p, \quad \theta_x = b^T p, \quad \theta_y = c^T p \quad (10)$$

$$d = (d_1, d_2, d_3, \dots)^T, \quad b = (b_1, b_2, b_3, \dots)^T, \quad c = (c_1, c_2, c_3, \dots)^T, \quad p = (1, \xi, \eta, \xi^2, \dots)^T$$

若令 $p_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ 分别为 p, w, θ_x, θ_y 在点 (x_i, y_i) 的取值，而且

$$P_0 = (p_1^T, p_2^T, \dots)^T, \quad w_0 = (w_1, w_2, \dots)^T, \quad \theta_{x0} = (\theta_{x1}, \theta_{x2}, \dots)^T, \quad \theta_{y0} = (\theta_{y1}, \theta_{y2}, \dots)^T$$

则由位移模式可知 $d = P_0 w_0, b = P_0 \theta_{x0}, c = P_0 \theta_{y0}$ ，将其代入 (10) 式可得

$$w = p^T P_0 w_0, \quad \theta_x = p^T P_0 \theta_{x0}, \quad \theta_y = p^T P_0 \theta_{y0} \quad (11)$$

其导数为

$$\frac{\partial w}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial p^T}{\partial(\cdot)} P_0 w_0, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial p^T}{\partial(\cdot)} P_0 \theta_{x0}, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial p^T}{\partial(\cdot)} P_0 \theta_{y0} \quad (12)$$

若再设 $u_0 = (w_0, \theta_{x0}, \theta_{y0})$ ，由于向量 u_0 和位移向量 a 只是元素的先后顺序不同，所以一

定存在一初矩阵 L ，能满足 $u_0 = La$ 。设 $V = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} L$ ，则式 (12) 可写为

$$\frac{\partial w}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial(\cdot)} Va, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial p^{(2)}}{\partial(\cdot)} Va, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial p^{(3)}}{\partial(\cdot)} Va \quad (13)$$

其中 $p^{(1)} = (p^T, 0, 0)$, $p^{(2)} = (0, p^T, 0)$, $p^{(3)} = (0, 0, p^T)$ ，由此可得

$$\varepsilon = (z\theta_{yx}, -z\theta_{xy}, z(\theta_{yy} - \theta_{xx}), (w_y - \theta_x), (w_x + \theta_y))^T = QVa \quad (14)$$

$$Q = (z \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}, -z \frac{\partial p^{(2)}}{\partial y}, z(\frac{\partial p^{(3)}}{\partial y} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}), (\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} - p^{(2)}), (\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + p^{(3)}))^T \quad (15)$$

$$= (zQ_1, Q_2)^T$$

由式(11)可知 $B = QV$ ，由于 V 为满秩矩阵，则通过引理1，可得到：秩(B)=秩(Q)。

若将矩阵 H 用变量矩阵 Q 在各高斯积分点的取值来表示，那么

$$H = (Q_{11}^T, Q_{12}^T, \dots, Q_{1m}^T, Q_{21}^T, \dots, Q_{nm}^T)^T \begin{bmatrix} V & & 0 \\ & V & \\ & & \ddots \\ 0 & & & V \end{bmatrix}$$

由定理1 和上式, 则就可以得出

定理3 刚度矩阵的秩可通过 Q 矩阵来计算, 并有

$$\text{秩}(K^e) = \text{秩}(Q_{11}^T, Q_{12}^T, \dots, Q_{1m}^T, Q_{21}^T, \dots, Q_{nm}^T) \quad (16)$$

由此可知, 单元刚度矩阵秩的计算可转化为 Q 矩阵秩的计算。通过后面的计算就会发现变量矩阵 Q 在高斯积分点的取值所组成的矩阵的秩是较好求的, 那么刚度矩阵的秩也就不难计算了, 由此而来刚度矩阵的奇异性也就完全可以判断了。

另一方面, 采用精确数值积分所求得的刚度矩阵, 在平衡方程中只需将刚体位移模态消除, 就可以使刚度矩阵非奇异, 但采用了较低阶的降阶高斯数值积分, 即使消除刚体位移模态, 刚度矩阵也可能仍为奇异的, 我们称由降阶积分所造成的刚度矩阵的奇异为结构存在多余零能模态, 刚度矩阵的亏为多余零能模态个数, 其关系可写为下面形式^[4]

$$\text{多余零能模态的个数} = \text{刚度矩阵的行数} - \text{秩}(H) - \text{单元刚体模态个数} \quad (17)$$

因此通过上面的分析公式, 不但可以判断出是否存在多余零能模态, 而且还可以确定出多余零能模态的个数。

四、计 算 实 例

下面通过各个参考文献中所给出的降阶积分单元位移模式, 用本文的 Q 矩阵计算方法来进行分析并计算其单元刚度矩阵的秩。

例1. 文献[2]中所构造的单元为双线性四节点四边形单元, 在矩形情况下其位移模式为

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \theta_x = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy, \theta_y = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy$$

由此可确定出 p 向量为 $p = (1, x, y, xy)$, 其导数及在原点的取值为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (0, 1, 0, y), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = (0, 0, 1, x), \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_0 = (0, 1, 0, 0), \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_0 = (0, 0, 1, 0)$$

在此单元中, 每节点的自由度为 3, 应变分量个数为 5, 可知单元刚度为一 12×12 阶矩阵, 那么由 (15) 可构造出一 5×12 阶 Q 矩阵, 其表示式如下

$$Q = \begin{bmatrix} zQ_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_{5 \times 12}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial p}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}_{3 \times 12}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial y} & -p & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & 0 & p \end{bmatrix}_{2 \times 12}$$

取 Q 矩阵中第二列减去第九列;第三列加第五列,这样就得到经初等变换后的 Q 矩阵为一前三列为零的矩阵。可知不管采用几点高斯积分,刚度矩阵的秩至少要亏3。由(16)可计算出刚度矩阵的秩为9,这点与文献[2]中的计算结果完全一致,与本单元有3个刚体模态的结论也是一致的,用公式(17)可计算出这种单元没有多余零能模态出现。

若本单元对弯曲部分采用上面的精确积分,而对剪切部分采用一点积分,那么 Q_1 不变,而 Q_2 将为在原点的取值,即

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

使用与前面相同的方法可得到前三列全部为零,而第四列本身为零,若第十一列加于第六列又使第六列为零,所以单元刚度矩阵的秩至少要亏5。而由实际计算结果知其秩恰好为7,由公式(17)可计算出这种单元的多余零能模态个数为2。

例2. 文献[5]中采用与文[2]相同的位移模式,只是对整个刚度矩阵都进行一点高斯积分。那么所构造出的 Q 矩阵即为其在原点的取值,即

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q_2 与前相同,由式(16)可计算出刚度矩阵的秩为5。此结论与文献[5]中的结果完全相同,由式(17)可计算出这种单元的多余零能模态个数为7。

例3. 文献[6]中采用与文[2]有相同位移模式的矩形单元,只是对刚度矩阵中弯曲部分采用 2×2 精确数值积分,而对剪切部分分别采用 1×2 , 2×1 的降阶积分。所谓 1×2 积分是指对 $x=0$ 时,保留 y ,而 2×1 积分是指对 $y=0$ 时,保留 x 。下面使用与前面相同的方法来分析矩形单元,知 Q_1 不变,而 Q_2 将为

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x & -1 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

若将 Q_1 的第一行乘 x 加至 Q_2 第二行; Q_2 第一行减 Q_1 第二行乘 y ,最后得到的矩阵正好就是没降阶时的 Q_2 矩阵,由例1知这种单元的秩为9,并且没有多余零能模态产生,这与实际计算结果完全相同。

参 考 文 献

- 1 O C Zienkiewicz, R L Taylor and J M Too. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. Inter. J. Numer. Meth. Engng., 1971; (3): 275-290
- 2 T J R Hugh. A simple and efficient finite element. Inter. J. Numer. Meth. Engng., 1977; (12): 275-290
- 3 E D L Pugh, E Hinton and O C Zienkiewicz. A study of quadrilateral plate bending element with 'reduced integration'. Inter. J. Numer. Meth. Engng., 1978; (13): 1059-1079
- 4 兑关锁. 薄厚有限单元的通用性及刚度矩阵的奇异性(硕士学位论文). 中国矿业大学北京研究生部,

1989

- 5 M Mukhopadhyay and D K Dinker. Isoparametric linear bending element and one point integration. Comput. Struct., 1978; (9): 365-369
- 6 G Prathap and S Viswanath. An optimally integration four-node quadrilateral plate bending element. Inter. J. Numer. Meth. Engng., 1983; (19): 831~840

THE SINGULARITY OF THE ELEMENT STIFFNESS MATRIX FOR THE REDUCED INTEGRATION

Dui Guansuo

Zhao Guojing

(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094) (China University of Mining and Technology, Beijing 100083)

Abstract The singularity of thick and thin plate element stiffness matrix due to the use of the reduced integration on the basis of the finite element is investigated. A formula based on the interpolation for the rank of the element stiffness matrix is presented, and some reduced integration elements are examined.

Key words reduced integration, penalty function, singularity, spurious zero energy mode