

薄壁层合箱梁的无外约束扭转分析*

吴亚平

(兰州铁道学院, 兰州 730070)

提 要 本文在考虑应力沿壁厚非均匀分布前提下, 计入各种耦合效应, 利用复合材料层合板理论对薄壁层合箱梁的“自由”扭转进行了分析, 给出了变形及各铺层应力的计算公式, 并指出, 对于层合箱梁来说, 由于耦合效应使得严格意义上的自由扭转往往不存在, 而只能称之为无外约束扭转。最后, 通过算例对数值结果进行了分析验证。

关键词 复合材料, 箱形梁, 扭转, 应力, 变形

一、引 言

由于复合材料在宇航, 机械及土木工程结构中的广阔应用前景, 使得复合材料结构的力学性能分析变得很重要。然而, 目前对复合材料薄壁构件的分析报道尚不多见, 而且一般均假定应力沿壁厚均匀分布^[1-3], 这样就忽略了沿壁厚各铺层由于铺设角的不同而导致的应力差异, 从而在强度分析中可能会产生较大的误差。本文在抛弃了上述假定的前提下, 考虑各种耦合效应, 利用层合板理论对薄壁层合箱梁的“自由”扭转进行了分析, 结果表明, 在扭转过程中由于耦合效应而产生的铺层间内约束, 可能会导致截面各纤维的纵向变形是非自由的, 此外截面各铺层应力各不相同, 而且不仅有剪应力还可能有正应力及周向应力。因此对于复合材料层合箱梁, 一般情况下, 严格意义上的自由扭转可能不存在, 而只能称之为无外约束扭转。为了便于工程设计应用, 本文给出了无外约束扭转刚度, 转角及应力的计算公式, 并通过算例对数值结果进行了分析。

* 本文收稿日期: 1996 年 11 月

二、基本假定与公式

图 1 所示的层合箱梁由四块壁板组成, 根据梁无外约束扭转时的受力状况及复合材料薄壁梁的特点, 可认为各壁板均处在平面应力状态, 即壁板任一单元体 $dx ds dz$ (见图 1, 2) 上只有翘曲正应力 σ_x (断面翘曲变形受到层间内约束所致), 周向应力 σ_s (对于翼板 $s = y$, 对于腹板 $s = z$) 及剪应力 τ_{xs} 。根据复合材料层合板理论^[4], 任一壁板的第 k 铺层须满足

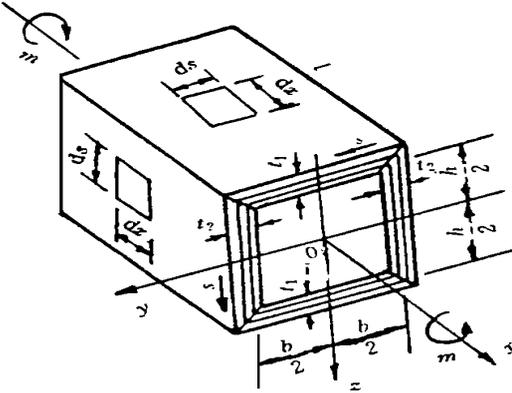


图 1 层合箱梁无外约束扭转状态

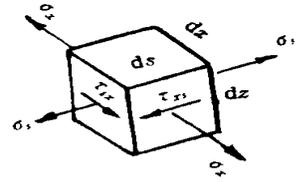


图 2 应力状态

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= Q_{11} \epsilon_x + Q_{12} \epsilon_s + Q_{16} \gamma_{xs} \\
 \sigma_s &= Q_{21} \epsilon_x + Q_{22} \epsilon_s + Q_{26} \gamma_{xs} \\
 \tau_{xs} &= Q_{16} \epsilon_x + Q_{26} \epsilon_s + Q_{66} \gamma_{xs}
 \end{aligned} \quad (1)$$

式中: Q_{ij} 为铺层的偏轴刚度系数, $\epsilon_x, \epsilon_s, \gamma_{xs}$ 分别为正应变, 周向应变及剪应变。在本文分析中, 假设剖面周边没有畸变^[5], 故有 $\epsilon_s = 0$, 并假设沿壁厚方向 ϵ_x, γ_{xs} 保持不变, 故(1)式可变为

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= Q_{11} \epsilon_x + Q_{16} \gamma_{xs} \\
 \sigma_s &= Q_{21} \epsilon_x + Q_{26} \gamma_{xs} \\
 \tau_{xs} &= Q_{16} \epsilon_x + Q_{66} \gamma_{xs}
 \end{aligned} \quad (2)$$

设 t_r, p 分别为第 r 块壁板的厚度及铺层层数, t_k 为壁板第 k 铺层厚度, 则有 $t_r =$

$\sum_{k=1}^p t_k$ (其中对于翼板有 $r = 1$ 及 $p = m$; 对于腹板有 $r = 2$ 及 $p = n$), 另设第 r 块壁板截面上的平均应力列阵及内力流列阵分别为 $[\sigma_x^*, \sigma_s^*, \tau_{xs}^*]_r^T$ 及 $[q_x, q_s, q_{xs}]_r^T$ 则有

$$\begin{aligned} q_x &= \sum_{k=1}^p \alpha_k \sigma_x^* \\ q_s &= \sum_{k=1}^p \alpha_k t_k = \sum_{k=1}^p \alpha_k \tau_{xs}^* \\ q_{xs} &= \sum_{k=1}^p \alpha_k \tau_{xs}^* \end{aligned} \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式,并令第 r 块壁板的平均偏轴刚度系数 $(Q_{ij}^*)_r = \sum_{k=1}^p (Q_{ij})_k t_k / t_r$, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= Q_{11}^* \varepsilon_x \\ \tau_{xs}^* &= Q_{21}^* \varepsilon_x + Q_{66}^* \gamma_{xs}^* \end{aligned} \quad (4)$$

考虑到无外约束扭转时梁截面须满足 $\int_A \sigma_x^* dA = 0$, $\int_A \sigma_x^* z dA = 0$, $\int_A \sigma_x^* y dA = 0$, 可得 $\sigma_x^* = 0$, 将其与(4)、(2)两式联立可得

$$[\gamma_{xs}, \varepsilon_x, \sigma_s^*]_r^T = [1, -\alpha_{16r}, B_{26}^*]_r^T \begin{Bmatrix} \tau_{xs}^* \\ G_r \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$[\alpha_x, \alpha_s, \tau_{xs}^*]_k^T = [B_{16}, B_{26}, B_{66}]_k^T \begin{Bmatrix} \tau_{xs}^* \\ G_r \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\alpha_{16r} = (Q_{16}^*)_r / (Q_{11}^*)_r$, 可称之为拉(压)剪耦合系数。 $G_r = (Q_{66}^*)_r - \alpha_{16r} (Q_{16}^*)_r$, $B_{26r}^* = (Q_{26}^*)_r - (Q_{21}^*)_r \alpha_{16r}$, $B_{16k} = (Q_{16})_k - \alpha_{16r} (Q_{11})_k$, $B_{26k} = (Q_{26})_k - \alpha_{16r} (Q_{21})_k$, $B_{66k} = (Q_{66})_k - \alpha_{16r} (Q_{16})_k$ 。

由(5)、(6)两式可见,只需确定 $(\tau_{xs}^*)_r$ 即可确定第 r 块壁板及其各铺层上的所有应变及应力分量。此外,只有各壁板上均有 $\alpha_{16r} = 0$,梁截面各壁板上才有 $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial x} = 0$ (轴向位移 $u_r = \text{常量}$)。若不满足上述条件则各铺层的纵向变形是非自由的。因此,对于复合材料层合箱梁,一般不存在严格意义上的自由扭转。

设梁截面的扭转角为 φ ,第 r 块壁板沿 x 向(轴向)的位移为 u_r ,则根据薄壁梁自由扭转的经典理论^[5]可得

$$(\gamma_{xs})_r = \frac{\partial u_r}{\partial s} + \rho_r \frac{d\varphi}{dx} \quad (7)$$

式中 ρ_r 为壁板中线切线到扭心 O 的垂直距离。

由于截面上的扭矩 $T = \oint (\tau_{xs}^*)_r t_r \rho_r ds$,故可得

$$(\tau_{xs}^*)_r = \frac{T}{\Omega_r} \quad (8)$$

式中 $\Omega = \oint \rho_r ds$ 为 ρ_r 所围面积的两倍。考虑(5)、(9)式及 $\sigma_x^* = 0$,则(3)式可写为

$$[q_x, q_s, q_{xs}]_r^T = [0, B_{26}^*/G, 1]_r^T \frac{T}{\Omega} \quad (9)$$

由(5), (8), (7) 式可得

$$\frac{\partial u_r}{\partial s} = \frac{T}{G_{rt_r} \Omega} - \varphi \frac{d\varphi}{dx} \quad (10)$$

将(10) 式沿周向 S 积分一圈后可得

$$0 = \frac{T}{\Omega} \oint \frac{ds}{G_{rt_r}} - \frac{d\varphi}{dx} \Omega \quad (11)$$

将(11) 式沿 x 向积分后得

$$\varphi = \frac{Tl}{Gk} \quad (12)$$

式中 l 为梁段长, Gk 为层合箱梁截面扭转刚度, 对于图 1 所示层合箱梁, Gk 可写为

$$Gk = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{G_{rt_r}}} = \frac{(2bh)^2}{2b \frac{2}{G_1 t_1} + 2h \frac{2}{G_2 t_2}} = \frac{2b^2 h^2}{b \frac{2}{G_1 t_1} + h \frac{2}{G_2 t_2}} \quad (13)$$

式中: $G_{rt_r} = (Q_{66}^*)_{rt_r} - \alpha_{16r} (Q_{16}^*)_{rt_r} = \sum_{k=1}^p (Q_{66})_{ktk} - \alpha_{16r} \sum_{k=1}^p (Q_{16})_{ktk}$ ($r = 1$ 时, $p = m$ 。
 $r = 2$ 时, $p = n$); b, h 分别为壁板中心线所围矩形的宽及高。

若在(13) 式中不考虑耦合效应, 即令 $\alpha_{16r} = 0$, 则(13) 式与文献[6] 中的扭转刚度表达式相同, 可见本文公式的适用范围及精确度都更好。

本文中的(6), (8), (9), (12), (13) 式即可用来计算薄壁层合箱梁无外约束扭转时的应力及转角。

三、算例及结语

碳纤维薄壁梁截面尺寸如图 3 所示, 壁板为 6 层铺设。现分别对 $[0^\circ / \pm 45^\circ_2 / 0^\circ]_T$ 及 $[0^\circ / 45^\circ_4 / 0^\circ]_T$ 两种铺设条件下的无外约束扭转进行分析。各铺层的偏轴刚度系数为^[6]:

$$0^\circ: Q_{11} = 115640 \text{ MPa}, Q_{12} = 3224.2 \text{ MPa}, Q_{66} = 4664.8 \text{ MPa}, Q_{16} = Q_{26} = 0。$$

$\pm 45^\circ: Q_{11} = 37730 \text{ MPa}, Q_{12} = 28322 \text{ MPa}, Q_{66} = 29792 \text{ MPa}, Q_{16} = Q_{26} = \pm 26362 \text{ MPa}。$ 对于第一种铺设条件, 经计算得 $\alpha_{16} = 0$, 则本文(13) 式的计算结果与文献[6] 的计算结果相同, 根据文献[6] 的实验值及本文或文献[6] 的计算值(两者相同), 图 4 给出了 100mm 梁段长(即取 $l = 100 \text{ mm}$) 内的相对扭转角 φ 与扭矩 T 之间关系的实验值与计算值的比较。

对于第二种铺设条件, $\alpha_{16} = 0.2759$ 。经用本文公式计算, 表 1 给出了两种铺设条件下的扭转角, 应力流, 及各铺层应力的比较。根据以上图表可得以下几点认识:

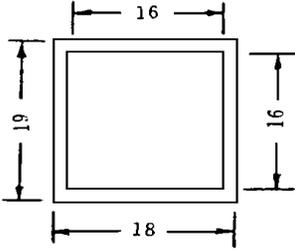


图3 层合箱梁截面尺寸(单位: mm)

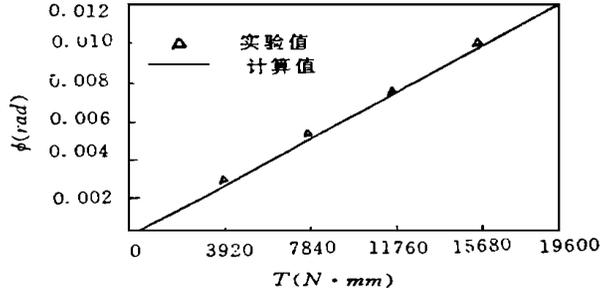


图4 $\varphi - T$ 关系

表1 变形及应力计算结果

参 数	φ/Tl (rad/N·mm ²)	q_s/T (MPa·N ⁻¹)	q_{xs}/T (MPa·N ⁻¹)	0°铺层		±45°(45°)铺层	
				$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$	$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$	$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$	$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$
铺设条件				$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$	$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$	$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$	$(\sigma_x)_k/\tau_{xs}^*$
[0/±45° ₂ /0]	6.07×10 ⁻⁹	0	3.36×10 ⁻³	0	0	0.218	±1.231 ±1.231 1.391
[0/45° ₄ /0]	7.84×10 ⁻⁹	2.45×10 ⁻³	3.36×10 ⁻³	-1.926	-0.054	0.282	0.963 1.120 1.360

(1) 尽管两种铺设条件下截面上的剪力流 q_{xs} 相同,但在第一种铺设条件下 $\alpha_{16} = 0$, 故有 $\epsilon_x = 0$, 梁处在严格意义上的自由扭转状态。但由于耦合效应,在 ±45° 铺层上仍然有正应力 $(\sigma_x)_k$ 及周向应力 $(\sigma_\theta)_k$, 这与各向同性材料梁不同。在第二种铺设条件下,由于 $\alpha_{16} \neq 0$, $\epsilon_x \neq 0$, $q_s \neq 0$, 耦合效应特别显著,梁处在无外约束扭转状态下。转角 φ 与前者相比增大,两者比值为 1.293, 即耦合效应对扭转刚度的影响达 29.3%。应力与前者相比变化更为显著,且各铺层上所有应力分量不为零,可见前者的 ±45° 角铺层能减小耦合效应。

(2) 各铺层剪应力 $(\tau_{xs})_k$ 与 τ_{xs}^* 相比差别较大,即说明若假设 τ_{xs} 沿壁厚均匀分布将引起较大误差。

(3) 本文所提出的方法及公式具有准确和实用的特点,可为理论研究及工程设计提供参考。

参 考 文 献

- 1 晏飞. 复合材料单闭室薄壁梁弯曲与扭转分析. 力学与实践, 1994; (1): 37- 40
- 2 张雷, 虞爱民. 非线性薄壁复合曲梁广义变分原理之研究. 应用力学学报, 1995; (2): 52- 58
- 3 Seong Min Jeon, Maeng Hyo Cho and In Lee. Static and dynamic analysis of composite box beams using large deflection theory. Int. J. Computers & Structures, 1995; 57(4): 635- 642
- 4 Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L. . The behaviour of structural composite materials. Martinus Ni-

John Publishers, 1986

- 5 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析(上). 北京: 中国铁道出版社, 1983
- 6 成传贤, 罗又华, 章向群等. 碳纤维矩形薄壁梁弯曲和扭转刚度研究, 力学与实践. 北京: 北京大学出版社, 1985: 111- 115

TORSION ANALYSIS OF COMPOSITE THIN- WALLED BOXBEAMS WITHOUT EXTERNAL RESTRAINT

Wu Yaping

(Lanzhou Railway Institute)

Abstract In this paper, considering that stresses along wall thickness are distributed non-uniformly, a theory of torsion analysis of composite thin-wall boxbeams without external restraint, based on the theory of composite laminated plates, was developed. In the theory, various coupled effects were taken into account and formulas of deformation and stress were presented. The results of analysis indicate that due to coupled effects, in general, the pure torsion of composite boxbeam may not exist, so a concept of torsion without external restraint is suggested. Finally, the numerical results are verified and analysed.

Key words composite, box beam, torsion, stress, deformation