

夹层板弯曲问题的 Hoff 理论的解析解^{*}

李跃军 程银水

(北京建筑工程学院, 北京 100044)

提 要 本文根据 Hoff 提出的夹层板理论和胡海昌、柳春图对该理论的简化理论, 提出了矩形夹层板弯曲问题的解析解的一般格式, 它可以用于求解各种边界条件下矩形夹层板弯曲问题的 Hoff 理论的解析解。从而, 使得考虑表层抗弯刚度的矩形夹层板弯曲问题求解格式化。

关键词 Hoff 理论, 简化理论, 弯曲问题, 解析解一般格式

一、引 言

1950 年 Hoff 提出了不仅考虑夹心的横向剪切变形, 同时, 还要考虑表层的抗弯性能的夹层板理论^[1]。导出了以表层中面的挠度 W 和上、下表层中面上对应点的连线在变形后的转角 φ_s 、 φ_y 为未知量的三个基本方程。为使求解得到简化, 胡海昌提出用两个函数 ω 、 f 来表示上述的三个变量 φ_s 、 φ_y 、 W ^[2]。柳春图进一步提出函数 ω 可表为两个函数 ω_0 和 ω_1 的组合^[3]。这样, 不仅使求解得到简化, 而且函数的物理意义也很明确。在此基础上, 得到了极少数几种问题的解答^[4]。为寻求 Hoff 理论的一般解析解, 我们研究了各种边界条件下矩形夹层板的弯曲问题, 提出了考虑表层抗弯刚度的各向同性夹层板弯曲问题的解析解的一般格式, 从而使求解这类问题的方法规律化。

^{*} 本文收稿日期: 1996 年 12 月

二、Hoff 理论的基本微分方程

图 1 所示的夹层板, 当用 ω , f 两个函数表示上、下表层中面对应点的连线在变形后的转角 φ_x , φ_y 和表层中面的挠度 W 时, 函数 ω , f 与 φ_x 、 φ_y 、 W 有以下关系

$$\varphi_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2)$$

$$W = \omega - \frac{D}{C} \nabla^2 \omega \quad (3)$$

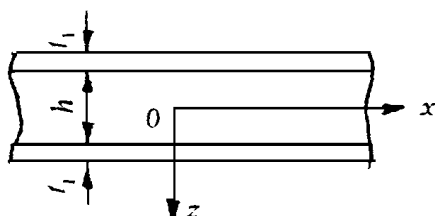


图 1

对于在横向载荷作用下的夹层板的弯曲问题, 函数 ω 和 f 应满足下列基本微分方程

$$(D + 2D_f) \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{2DD_f}{C} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \omega - q = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (1 - \nu_f) \nabla^2 f - Cf = 0 \quad (5)$$

式中

$$D = \frac{(h + t_1)^2 t_1}{2(1 - \nu_f^2)} E_f, \quad C = \frac{(h + t_1)^2}{h} G_c, \quad D_f = \frac{E_f t_1^3}{12(1 - \nu_f^2)}$$

E_f 、 ν_f 为表层的弹性模量和泊桑比;

G_c 为夹心层的剪切弹性模量;

t_1 为表层厚度, h 为夹心层厚度。

为使 (4) 式得到简化, 取

$$\omega = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla^2) \omega_0 + \omega_1 \quad (6)$$

其中

$$D_0 \nabla^4 \omega_0 = q \quad (7)$$

$$\nabla^2 \omega_1 - k^2 \omega_1 = -\frac{q}{k^2 D_0} \quad (8)$$

式中

$$k^2 = \frac{C(D + 2D_f)}{2DD_f} = \frac{C}{D} [1 + 3(1 + \frac{h}{t_1})^2], \quad D_0 = D + 2D_f$$

现将位移和内力以 ω_0 、 ω_1 、 f 表示出来, 则有

$$\varphi_x = \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega_0 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad (9)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial \omega_0}{\partial y} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega_0 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (10)$$

$$W = (1 - \frac{D}{C} \nabla^2)(\omega_1 + \omega_0 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 \omega_0) \quad (11)$$

表层的应力一应变关系与单层板相同, 确定沿表层厚度均匀分布的应力时的弯矩和扭矩可表达为

$$\begin{aligned} M_x' = & -D[(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2}) + \frac{1}{k^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \omega_0 + v_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \omega_0) \\ & + (\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + (1 - v_f) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_y' = & -D[(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}) + \frac{1}{k^2}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \omega_0 + v_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \omega_0) \\ & + (\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - (1 - v_f) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})] \end{aligned} \quad (13)$$

$$M_{xy}' = - (1 - v_f) D [(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \omega_0 + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}))] \quad (14)$$

确定沿表层厚度不均匀的应力时的弯矩及扭矩可表达为

$$\begin{aligned} M_x'' = & -2Df[(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2}) + (\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C})(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \omega_0 + v_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \omega_0) \\ & - \frac{D}{C} \frac{1}{k^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 \omega_0 + v_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^4 \omega_0) + (\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2}) \\ & - \frac{D}{C}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \omega_1 + v_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \omega_1)] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M_y'' = & -2Df[(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}) + (\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C})(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \omega_0 + v_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \omega_0) \\ & - \frac{D}{C} \frac{1}{k^2}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^4 \omega_0 + v_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 \omega_0) + (\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + v_f \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}) \\ & - \frac{D}{C}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \omega_1 + v_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \omega_1)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$M_{xy}'' = -2(1 - v_f) Df \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1 - \frac{D}{C} \nabla^2)(\omega_1 + \omega_0 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 \omega_0)] \quad (17)$$

夹层板中总弯矩、总扭矩为

$$M_x = M_x' + M_x'' = -D_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\omega_0 + \omega_1) - \frac{1}{k^2} \nabla^2 \omega_1 - \frac{1}{k^4} \nabla^4 \omega_0 - D(1 - \nu_f) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

$$M_y = M_y' + M_y'' = -D_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\omega_0 + \omega_1) - \frac{1}{k^2} \nabla^2 \omega_1 - \frac{1}{k^4} \nabla^4 \omega_0 + D(1 - \nu_f) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

$$M_{xy} = M_{xy}' = M_{xy}'' = - (1 - \nu_f) D_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} + (1 - \nu_f) \frac{D_0}{k^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^4 \omega_0 - (1 - \nu_f) \frac{D}{C} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) - (1 - \nu_f) D_0 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} + (1 - \nu_f) \frac{D_0}{k^2} \nabla^2 \omega_1 \quad (20)$$

夹层板中的总横向剪力为

$$Q_x = -C \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right) \omega_0 + \omega_1 \right] - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} - 2D_f \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W \quad (21)$$

$$Q_y = -C \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right) \omega_0 + \omega_1 \right] - \frac{\partial f}{\partial x} \right\} - 2D_f \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W \quad (22)$$

三、Hoff 理论解析解的一般格式

综前所述可知, Hoff 理论的弯曲问题归结为求解 (5)、(7)、(8) 三个微分方程, 由于每个方程中只含一个未知函数, 可以分别单独求解。

1. $D_0 \nabla^4 \omega_0 = q$ 微分方程的解

该方程为常系数四阶偏微分方程, 其通解可表示为

$$\omega_0 = \omega_{01} + \omega_{02} + \omega_{03} + \omega_{00} \quad (23)$$

其中 ω_{01} 、 ω_{02} 、 ω_{03} 为该方程的齐次解, ω_{00} 为该方程的特解。取

$$\omega_{01} = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \alpha_0 x \quad (23a)$$

代入方程不难得到

$$Y_m(y) = A_m \cosh \alpha_0 y + B_m \alpha_0 y \cosh \alpha_0 y + C_m \sinh \alpha_0 y + D_m \alpha_0 y \sinh \alpha_0 y \quad (23b)$$

从而有

$$\omega_{01} = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_0 y + B_m \alpha_0 y \cosh \alpha_0 y + C_m \sinh \alpha_0 y + D_m \alpha_0 y \sinh \alpha_0 y) \sin \alpha_0 x \quad (23c)$$

同理有

$$\omega_{02} = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cosh \beta_0 x + B_n \beta_0 x \cosh \beta_0 x + C_n \sinh \beta_0 x + D_n \beta_0 x \sinh \beta_0 x) \sin \beta_0 y \quad (23d)$$

再取

$$\omega_{03} = k_0 + k_1 x + k_2 y + k_5 xy \quad (23e)$$

特解 ω_{00} 取作

$$\omega_{00} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \alpha_0 x \sin \beta_0 y \quad (23f)$$

从而得到

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{ch} \alpha_0 y + B_m \alpha_0 y \operatorname{ch} \alpha_0 y + C_m \operatorname{sh} \alpha_0 y + D_m \alpha_0 y \operatorname{sh} \alpha_0 y) \sin \alpha_0 x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \beta_0 x + B_n \beta_0 x \operatorname{ch} \beta_0 x + C_n \operatorname{sh} \beta_0 x + D_n \beta_0 x \operatorname{sh} \beta_0 x) \sin \beta_0 x \quad (24) \\ & + k_0 + k_1 x + k_2 y + k_5 xy + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \alpha_0 x \sin \beta_0 y \end{aligned}$$

式中 $\alpha_0 = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_0 = \frac{n\pi}{b}$, a 、 b 为矩形板边长, m 、 n 为正整数, A_{mn} 为与横向荷载有关的待定常数, k_0 、 k_1 、 k_2 、 k_5 是与板的四个角点挠度有关的系数, 把它称之为角点挠度系数。

2 $\nabla^2 \omega_1 - k^2 \omega_1 = \frac{q}{k^2 D_0}$ 微分方程的解

把该方程的解同样取作一个齐次解和一个特解之和

$$\omega_1 = \omega_{11} + \omega_{10} \quad (25)$$

设齐次解

$$\omega_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(y) \sin \alpha_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin \beta_0 y \quad (25a)$$

经分析不难得出

$$\omega_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} (M_m \operatorname{ch} sy + S_m \operatorname{sh} sy) \sin \alpha_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \operatorname{ch} rx + T_n \operatorname{sh} rx) \sin \beta_0 y \quad (25b)$$

式中

$$S = \pm \alpha_0^2 + k^2, \quad \gamma = \pm \beta_0^2 + k^2$$

特解需根据 q 的具体表达式给出。这里假设 $q(x, y) = q$, 则其特解不难看出

$$\omega_{10} = A_1 = \frac{q_0}{k^4 D_0} \quad (25c)$$

则通解为

$$\omega_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (M_n \operatorname{ch} sy + S_m \operatorname{sh} sy) \sin \alpha_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \operatorname{ch} rx + T_n \operatorname{sh} rx) \sin \beta_0 y + \frac{q_0}{k^4 D_0} \quad (26)$$

3 $\nabla^2 f - \frac{2C}{D(1-\nu_f)} f = 0$ 微分方程的解

(5) 式改写为以上形式后, 再令 $A = \frac{2C}{D(1-\nu_f)}$ 使齐次方程化为

$$\nabla^2 f - Af = 0 \quad (27a)$$

设通解为

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} F_1(y) \cos \alpha_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} F_2(y) \cos \beta_0 y \quad (27b)$$

代入方程不难得到

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} (Q_m \operatorname{ch} p y + R_m \operatorname{sh} p y) \cos \alpha_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n \operatorname{ch} t x + V_n \operatorname{sh} t x) \cos \beta_0 y \quad (27)$$

式中

$$p = \pm \sqrt{\alpha_0^2 + A}, \quad t = \sqrt{\beta_0^2 + A}$$

四、解析解中待定系数的确定

由含有 X_0 、 X_1 和 f 的三个微分方程 (7)、(8) 和 (5) 可知, 这三个函数的微分方程是互不耦合的。但是, 必须强调指出, 对于具体问题, 在边界条件的表达式中, 它们确是耦合的。因此, 在利用边界条件确定系数时, 必须联立求解。

关于上述三个方程的解析解的表达式中, 共有待定系数 20 个, 可由矩形板四个边的十六个边界条件和四个角点的挠度来确定^[5]。

1. A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 、 A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 和 M_m 、 S_m 、 N_m 、 T_n 的确定

为了简化计算, 把矩形板四个板边 $x=0$, y ; $x=a$, y ; x , $y=0$; x , $y=b$ 的挠度和法向弯矩分别表示为带补充项和不带补充项的正弦级数如下

$$W(0, y) = \sum_{n=1}^J E_n \sin \beta_0 y + W_{ob} \frac{y}{b} + W_{00} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (28)$$

$$W_{xc}(0, y) = \sum_{n=1}^J E_n E_{nc} \sin \beta_0 y \quad (29)$$

$$W_{xd}(0, y) = \sum_{n=1}^J E_n E_{nd} \sin \beta_0 y \quad (30)$$

$$W(a, y) = \sum_{n=1}^J J_n \sin \beta_0 y + W_{ab} \frac{y}{b} + W_{a0} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (31)$$

$$W_{xc}(a, y) = \sum_{n=1}^J F_n E_{nc} \sin \beta_0 y \quad (32)$$

$$W_{xd}(a, y) = \sum_{n=1}^J F_n E_{nd} \sin \beta_0 y \quad (33)$$

$$W(x, 0) = \sum_{m=1}^J K_m \sin \alpha_0 x + W_{a0} \frac{x}{a} + W_{00} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (34)$$

$$M_{yc}(x, 0) = \sum_{m=1}^J E G_{mc} \sin A_0 x \quad (35)$$

$$M_{yd}(x, 0) = \sum_{m=1}^J E G_{md} \sin A_0 x \quad (36)$$

$$M(x, b) = \sum_{m=1}^J E L_m \sin A_0 x + W_{ab} \frac{x}{b} + W_{0b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (37)$$

$$M_{yc}(x, b) = \sum_{m=1}^J E H_{mc} \sin A_0 x \quad (38)$$

$$M_{yd}(x, b) = \sum_{m=1}^J E H_{md} \sin A_0 x \quad (39)$$

其中 W_{00} 、 W_{0b} 、 W_{a0} 、 W_{ab} 是矩形夹层板四个角点的挠度。

然后, 把板边坐标 $(0, y)$ 、 (a, y) 、 $(x, 0)$ 、 (x, b) 代入 W 、 M_{xc} 、 M_{xd} 、 M_{yc} 、 M_{yd} 的表达式 (11)、(12)、(15)、(13)、(16) 中可以得到由 f 表示的与上述表达式对应的四组方程

$$W(0, y) = \left(1 - \frac{D}{C^2}\right) (X_0 + X_0 + \frac{1}{k^2} X_0)(0, y) \quad (40)$$

$$W_{xc}(0, y) = -D \left\{ \left(\frac{5}{5x^2} + v_f \frac{5}{5y^2} \right) \left[\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) X_0 + X_1 \right] + (1 - v_f) \frac{5^2 f}{5x5y} \right\} (0, y) \quad (41)$$

$$W_{xd}(0, y) = -2Df \left\{ \left(\frac{5}{5x^2} + v_f \frac{5}{5y^2} \right) \left[X_0 + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C} \right) X_0 \right] - \frac{D}{Ck^2} X_0 + \left(1 - \frac{D}{C}\right) X_1 \right\} (0, y) \quad (42)$$

另外三组方程 (43)、(44)、(45)、(46)、(47)、(48)、(49)、(50)、(51) 表达式完全与 (40)、(41)、(42) 类同, 只不过 X_0 、 X_1 、 f 三个函数的变量 (x, y) 不再取 $(0, y)$, 而依次分别取作 (a, y) 、 $(x, 0)$ 和 (x, b) 。故不再重复写出。

显然式 (28) = (40); (29) = (41); (30) = (42); (31) = (43); , , ; (39) = (51), 共 12 个方程。应用这 12 个方程可以把 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 、 A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 、 M_m 、 S_m 、 N_n 、 T_n 这 12 个系数转化为边界挠度系数 I_n 、 J_n 、 K_m 、 L_m 和边界弯矩系数 E_{nc} 、 F_{nc} 、 G_{mc} 、 H_{mc} 、 E_{nd} 、 F_{nd} 、 G_{md} 、 H_{md} 及边界转角系数 Q_m 、 R_m 、 U_n 、 V_n 的确定问题。从而使计算大大简化。

为确定上述的边界挠度系数、弯矩系数及转角系数等 16 个系数, 可应用四条板边上共 16 个边界条件, 常用的边界条件有

简支边: W 、 M_{nc} 、 M_{nd} 、 $U_s = 0$ (或等于已知值)

固支边: W 、 $\frac{5M}{5n}$ 、 U_n 、 $U_s = 0$ (或等于已知值)

自由边: $Q = Q_n + \frac{5M_{sd}}{5s}$ 、 M_{nc} 、 M_{nd} 、 M_{sc} (或为已知值)

式中 n 为边界外法线方向, s 为边界切线方向。因在边界上 n 与 x 或 y 重合, 而 s 则与

y 或 x 重合, 所以, 其方向余弦只可能取 1 或 0 两个数值, 计算十分方便。

同时, 在通常边界下的矩形板, 四个边上的挠度和法向弯矩至少有四个是已知的或等于零, 从而使确定系数工作进一步简化。

2 角点挠度系数 k_0 、 k_1 、 k_2 、 k_5 的确定

k_0 、 k_1 、 k_2 、 k_5 是四个角点挠度的线性组合。设四个角点的挠度为 W_{00} 、 W_{a0} 、 W_{0b} 、 W_{ab} , 则

$$k_0 = W_{00} \quad (52)$$

$$k_1 = \frac{1}{a} (W_{a0} - W_{00}) \quad (53)$$

$$k_2 = \frac{1}{b} (W_{0b} - W_{00}) \quad (54)$$

$$k_5 = \frac{1}{ab} (W_{ab} + W_{00} - W_{a0} - W_{0b}) \quad (55)$$

在通常边界条件下, 矩形板最多有两个自由角点, 所以, 在 W_{00} 、 W_{a0} 、 W_{0b} 、 W_{ab} 四个角点挠度中不为零的不超过两个, 这样角点挠度系数 k_0 、 k_1 、 k_2 、 k_5 中, 也最多只有两个不等于零。对无自由角点的矩形夹层板, 则四个系数全部为零。

五、解 答 实 例

图 2 所示四边固定支承的夹层板边长分别为 a 、 b , 其上作用均布横向荷载 q_0 , 求该问题的解答。

由前边的分析可知, 求解此类问题的解答归结为确定一系列待定系数, 从而得到 X_0 、 X_1 及 f 三个函数, 进一步可由这三个函数求出挠度 W 及内力等结果。所以在该算例中, 为节约篇幅, 只给出系数的确定分析过程, 其它计算分析略去。

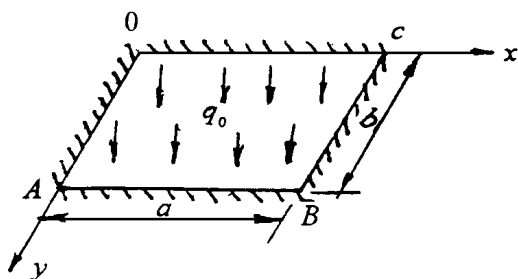


图 2

1. 确定 k_0 、 k_1 、 k_2 、 k_5

由给定的支承条件有 $W_{00} = W_0 = 0$, $W_{a0} = W_C = 0$, $W_{0b} = W_A = 0$, $W_{ab} = W_B = 0$, 所以由式 (52)、(53)、(54)、(55) 可得到

$$k_0 = k_1 = k_2 = k_5 = 0 \quad (A)$$

2 确定 I_n 、 J_n 、 K_m 、 L_m 、 E_{nc} 、 F_{nc} 、 E_{nd} 、 F_{nd} 、 G_{nc} 、 G_{nd} 、 H_{nc} 、 H_{nd} 、 Q_m 、 R_m 、 U_n 、 V_n

首先, 由四个固支边的挠度均为零即

$$W(0, y) = W(a, y) = W(x, 0) = W(x, b) = 0$$

代入式 (28)、(31)、(34)、(37) 中, 得到

$$I_n = J_n = K_m = L_m = 0 \quad (B)$$

其次, 由四个固支边切向转角为零的条件 $(U_x)_{y=0} = (U_x)_{y=b} = (U_y)_{x=0} = (U_y)_{x=a} = 0$ 代入公式 (9)、(10) 中求得

$$V_n = -\frac{B_0}{tc} E_{nc} \quad (C)$$

$$U_n = \frac{B_0 \text{ch} t a}{tc \text{sh} t a} E_{nc} - \frac{B_0}{tc \text{sh} t a} F_{nc} \quad (D)$$

$$R_m = \frac{A_0}{cp} G_{mc} \quad (E)$$

$$Q_m = -\frac{A_0 \text{ch} p b}{cp \text{sh} p b} G_{mc} + \frac{A_0}{cp \text{sh} p b} H_{mc} \quad (F)$$

把以上四式代入公式 (27) 中, 得到函数 f

$$\begin{aligned} f = & \int_{m=1}^J \left[-\frac{A_0 \text{ch} p b}{cp \text{sh} p b} G_{mc} + \frac{A_0}{p \text{ch} p a} H_{mc} \right] \text{ch} p y + \frac{A_0}{cp} G_{mc} \text{sh} p y \cos A_0 x \\ & + \int_{n=1}^J \left[\frac{B_0 \text{ch} t a}{tc \text{sh} t a} E_{nc} - \frac{B_0}{tc \text{sh} t a} F_{nc} \right] \text{ch} t x - \frac{B_0}{tc} E_{nc} \text{sh} t x \cos B_0 y \end{aligned} \quad (56)$$

再由公式 (24)、(26) 及前述把待定系数 A_m 、 B_m 、 N_n 、 T_n 转化为矩形板的边界挠度系数、转角系数和弯矩系数的方法可以得到 X_0 、 X_1 的表达式

$$\begin{aligned} X_0 = & \int_{m=1}^J \frac{1}{2DA_0^2} \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2)^2 [1 + (1 - \nu_f) \frac{D}{C} A_0^2] \text{sh}^2 A_0 b \left[A_0 (S^2 - A_0^2) \right. \\ & \left. [1 - \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2)] [a \text{sh} A_0 y - y \text{sh} A_0 b \text{ch} A_0 (y - b)] - 2A_0^2 [1 + (\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C}) \right. \\ & \left. \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2) - \frac{1}{k^2} (S^2 - A_0^2)] \text{sh} A_0 b \text{sh} A_0 (y - b) \right] G_{mc} \\ & + 4D_f A_0^2 \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2) \text{sh}^2 A_0 b \left[A_0 (S^2 - A_0^2) [y \text{sh} A_0 b \text{ch} A_0 (y - b) - b \text{sh} A_0 y] \right. \\ & \left. - 2A_0^2 [1 - \frac{1}{k^2} (S^2 - A^2)] \text{sh} A_0 b \text{sh} A_0 (y - b) \right] G_{md} \\ & + 2DA_0^2 \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2) [1 + (1 - \nu_f) \frac{D}{C} A_0^2] \text{sh}^2 A_0 b \left[(S^2 - A_0^2) (y \text{ch} A_0 y \text{sh} A_0 b \right. \\ & \left. - b \text{ch} A_0 b \text{sh} A_0 y) + 2A_0 [1 + (\frac{D}{C} - \frac{1}{k^2}) (S^2 - A_0^2)] \text{sh} A_0 b \text{sh} A_0 y \right] H_{mc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_0}{4D_f B_0^2} \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh}^2 B_0 a \left[- (S^2 - A_0^2) [\gamma \operatorname{ch} A_0 y \operatorname{sh} A_0 b - b \operatorname{ch} A_0 b \operatorname{sh} A_0 y] \right. \\
& - 2A_0 \left[1 - \frac{1}{k^2} (S^2 - A_0^2) \right] \operatorname{sh} A_0 b \operatorname{sh} A_0 y \left. \right] H_{md} \\
& + \frac{p A_0 (1 - v_f) \left[1 - \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2) \right]}{2A_0^2} \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2) \left[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} A_0^2 \right] \operatorname{sh}^2 A_0 b \left[- A_0 y (S^2 - A_0^2) \operatorname{sh} p b \operatorname{ch} A_0 y \operatorname{sh} A_0 b \right. \\
& - 2A_0^2 \left[1 + \left(\frac{D}{C} - \frac{1}{k^2} \right) (S^2 - A_0^2) \right] \operatorname{sh} p b \operatorname{sh} A_0 b \operatorname{sh} A_0 y + A_0 b (S^2 - A_0^2) \operatorname{sh} p b \operatorname{ch} A_0 b \operatorname{sh} A_0 y \left. \right] Q_m \\
& + \frac{p (1 - v_f)}{2} \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2)^2 \left[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} A_0^2 \right] \operatorname{sh}^2 A_0 b \left[2A_0^0 \left[1 + \frac{1}{k^2} (S^2 - A_0^2) \right] \right. \\
& + \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2)^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C} \right) \left. \right] \operatorname{sh} A_0 b \left[\operatorname{sh} A_0 (y - b) - \operatorname{sh} A_0 y \operatorname{ch} p b \right] \\
& + (S^2 - A_0^2) \left[1 - \frac{D}{C} (S^2 - A_0^2) \right] \left[\operatorname{ch} A_0 (y - b) - \operatorname{ch} A_0 y \operatorname{ch} p b \right] y \operatorname{sh} A_0 b \\
& - (1 - \operatorname{ch} A_0 b \operatorname{ch} p b) b \operatorname{sh} A_0 y \left. \right] R_m \} \sin A_0 x \\
& + \frac{1}{E_{n=1}} \left\{ \frac{1}{2D_f B_0^2} \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2) \left[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2 \right] \operatorname{sh} B_0 a \left[B_0 (r^2 - B_0^2) \left[1 - \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2) \right] \right. \right. \\
& @ \left[a \operatorname{sh} B_0 x - x \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{ch} B_0 (x - a) \right] - 2B_0^2 \left[1 + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C} \right) \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2)^2 \right. \\
& - \frac{1}{k^2} (r^2 - B_0^2) \left. \right] \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{sh} B_0 (x - a) \left. \right] E_{nc} \\
& + \frac{1}{4D_f B_0^2} \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh}^2 B_0 a \left[B_0 (r^2 - B_0^2) \left[x \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{ch} B_0 (x - a) - a \operatorname{sh} B_0 x \right] \right. \\
& + 2B_0^2 \left[1 - \frac{1}{k^2} (r^2 - B_0^2) \right] \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{sh} B_0 (x - a) \left. \right] E_{nd} \\
& + \frac{1}{2D_f B_0^2} \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2)^2 \left[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2 \right] \operatorname{sh}^2 B_0 a \left[\left(1 - \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2) \right) B_0 \right. \\
& @ \left[(r^2 - B_0^2) (x \operatorname{ch} B_0 x \operatorname{sh} B_0 x \right. \\
& - a \operatorname{ch} B_0 a \operatorname{sh} B_0 x) + 2B_0 \left[1 + \left(\frac{D}{C} - \frac{1}{k^2} \right) (r^2 - B_0^2) \right] \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{sh} B_0 x \left. \right] F_{nc} \\
& + \frac{B_0}{4D_f B_0^2} \frac{D}{C} (r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh}^2 B_0 a \left[- (r^2 - B_0^2) \left[x \operatorname{ch} B_0 x \operatorname{sh} B_0 a - a \operatorname{ch} B_0 a \operatorname{sh} B_0 x \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2B_0[1 + \frac{1}{k^2}(r^2 - B_0^2)] \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{sh} B_0 x] F_{nd} \\
 & + \frac{tB_0(1 - v_f)[1 - \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)]}{2B_0^2 \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 [1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2] \operatorname{sh}^2 B_0 a} [-B_0 x (r^2 - B_0^2) \operatorname{sh} t a \operatorname{ch} B_0 x \operatorname{sh} B_0 a \\
 & - 2B_0^2 [1 + (\frac{D}{C} - \frac{1}{k^2})(r^2 - B_0^2)] \operatorname{sh} t a \operatorname{sh} B_0 a \operatorname{sh} B_0 x + B_0 a (r^2 - B_0^2) \operatorname{sh} t a \operatorname{ch} B_0 a \operatorname{sh} B_0 x] U_n \\
 & + \frac{t(1 - v_f)}{2 \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 [1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2] \operatorname{sh}^2 B_0 a a} [2B_0 [1 - \frac{1}{k^2}(r^2 - B_0^2) + \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 @ \\
 & (\frac{1}{k^2} - \frac{D}{C})] \operatorname{sh} B_0 a [\operatorname{sh} B_0 (x - a) - \operatorname{sh} B_0 x \operatorname{ch} t a] + (r^2 - B_0^2) [1 - \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)] [(\operatorname{ch} B_0 (x - a) \\
 & - \operatorname{ch} B_0 x \operatorname{ch} t a) x \operatorname{sh} B_0 a - (1 - \operatorname{ch} B_0 a \operatorname{ch} t a) a \operatorname{sh} B_0 x]] V_n \} \sin B_0 y + \sum_{m=1}^J \sum_{n=1}^E A_{mn} \sin A_0 x \sin B_0 y \\
 & \quad \quad \quad (57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \sum_{m=1}^J \{ \frac{\operatorname{sh} s(y - b)}{D[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} A_0^2] \frac{D}{C}(S^2 - A_0^2)^2 \operatorname{sh} s b} G_{mc} - \frac{\operatorname{sh} s(y - b)}{2D_f \frac{D}{C}(S^2 - A_0^2)^2 \operatorname{sh} s b} G_{md} \\
 & + \frac{tA_0(1 - v_f) \operatorname{sh} p b \operatorname{sh} s y}{[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} A_0^2] \frac{D}{C}(S^2 - A_0^2)^2 \operatorname{sh} s b} Q_m - \frac{tA_0(1 - v_f) [\operatorname{sh} s(y - b) - \operatorname{sh} s y \operatorname{ch} p b]}{[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} A_0^2] [\frac{D}{C}(S^2 - A_0^2)^2 \operatorname{sh} s b]} R_m \\
 & - \frac{\operatorname{sh} s y}{D[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} A_0^2] \frac{D}{C}(S^2 - A_0^2)^2 \operatorname{sh} s b} H_{mc} + \frac{\operatorname{sh} s y}{2D_f \frac{D}{C}(S^2 - A_0^2)^2 \operatorname{sh} s b} H_{md} \} \sin A_0 x \\
 & + \sum_{n=1}^J \{ \frac{\operatorname{sh} r(x - a)}{D[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2] \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh} r a} E_{nc} - \frac{\operatorname{sh} r(x - a)}{2D_f \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh} r a} E_{nd} \\
 & + \frac{tB_0(1 - v_f) \operatorname{sh} t a \operatorname{sh} r x}{[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2] \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh} r a} U_n - \frac{tB_0(1 - v_f) [\operatorname{sh} r(x - a) - \operatorname{sh} r x \operatorname{ch} t a]}{[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2] [\frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh} r a]} V_n \\
 & - \frac{\operatorname{sh} r x}{D[1 + (1 - v_f) \frac{D}{C} B_0^2] \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh} r a} F_{nc} + \frac{\operatorname{sh} r x}{2D_f \frac{D}{C}(r^2 - B_0^2)^2 \operatorname{sh} r a} F_{nd} \} \sin B_0 y \\
 & + \frac{q_0}{k^4 D_0} \\
 & \quad \quad \quad (58)
 \end{aligned}$$

因 q_0 为均匀分布的, 这时只取 $m, n = 1, 3, 5, \dots$ 。

把 (C) 、 (D) 、 (E) 、 (F) 四式代到 (57) 和 (58) 中, 就只剩下 E_{nc} 、 E_{nd} 、 F_{nc} 、 F_{nd} 和

G_{mc} 、 G_{md} 、 H_{mc} 、 H_{md} 共八个待定系数。

然后, 由对称性可知, $E_{nc} = F_{nc}$; $E_{nd} = F_{nd}$; $G_{mc} = H_{mc}$; $G_{md} = H_{md}$ 。从而就只有四个待定系数。

最后, 应用四个固支边上法向转角均为零的条件:

$$OA \text{ 边: } (U_x)_{x=0} = \left\{ \frac{5}{5x} (X_0 + X_1 + \frac{1}{k^2} x_0) + \frac{5f}{5y} \right\}_{x=0} = 0 \quad (a)$$

$$BC \text{ 边: } (U_x)_{x=a} = \left\{ \frac{5}{5x} (X_0 + X_1 + \frac{1}{k^2} x_0) + \frac{5f}{5y} \right\}_{x=a} = 0 \quad (b)$$

$$OC \text{ 边: } (U_y)_{y=0} = \left\{ \frac{5}{5y} (X_0 + X_1 + \frac{1}{k^2} x_0) - \frac{5f}{5x} \right\}_{y=0} = 0 \quad (c)$$

$$AB \text{ 边: } (U_y)_{y=b} = \left\{ \frac{5}{5y} (X_0 + X_1 + \frac{1}{k^2} x_0) - \frac{5f}{5x} \right\}_{y=b} = 0 \quad (d)$$

把(56)、(57)、(58)表示的 X_0 、 X_1 、 f 代入以上四个方程中, 联立求解便得到了 $E_{nc} = F_{nc}$ 、 $E_{nd} = F_{nd}$ 、 $G_{mc} = H_{mc}$ 、 $G_{md} = H_{md}$ 系数, 从而, 可求得 Q_m 、 R_m 、 U_n 、 V_n , 这样三个函数 X_0 、 X_1 、 f 就完全确定了。由于所得系数表达式冗长而略去不写, 但由(a)、(b)、(c)、(d) 联立求解已十分明显无疑了。

为了描述四边固支夹层板在均布横向载荷作用下挠度随坐标的变化, 我们取 $a = b$, $t_1 : h = 0.05$, $D/ca^2 = 0.03$, $v_f = 0.3$, 且仅取 $m, n = 1, 3$ 前两项计算。选取 $x/\frac{a}{2}$ 作为横坐标, W 以 $(q_0 a^4/D_0) \times 10^{-3}$ 为单位, 绘出三条曲线如图 3 所示。从

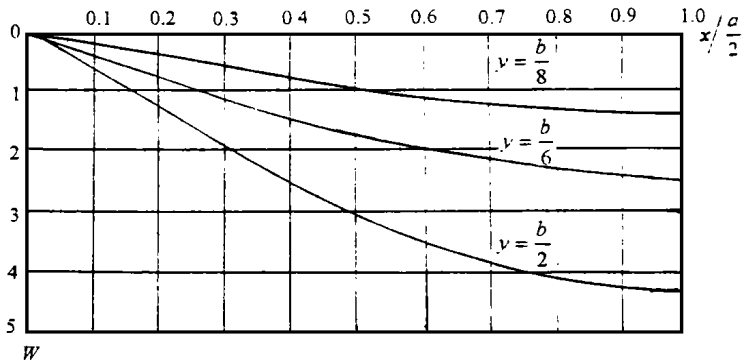


图 3

中可以看出, 最大挠度 $W(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = 4.32$ 。这个数值较文献[4]中相同条件下按着 Reissner 理论得到的 $W_{\max} = 0.00357 \frac{q a^4}{D}$ 要大; 而较按 0 пьсакоб) 杜庆华理论计算的对边简支, 另对边固支, 其它条件相同下的 $W_{\max} = 0.00576 \frac{q a^4}{D_0}$ 要小许多。

参 考 文 献

- 1 Hoff N J. Bending and buching strength of rectangular sandwich panela. NACA TN 2225, 1950
- 2 胡海昌. 多向同性夹层板反对称小挠度若干问题. 力学学报, 1963; 6(1)
- 3 柳春图. 夹层板方程的变换和四边简支矩形夹层板的变形问题. 力学学报, 1965; 8(4)
- 4 中科院力学所固体力学室板壳组. 夹层板壳的弯曲稳定和振动. 科学出版社, 1977
- 5 程银水, 邵震豪. Reissner 矩形板的弯曲问题. 上海力学, 1994; 15(1)

ANALYTICAL SOLUTION OF BENDING PROBLEM FOR HOFF SANDWICH PLATES

Li Yaojun Cheng Yinshui
(Beijing Institute of Civil Engineering)

Abstract On the basis of Hoff. s theory of sandwich plates and the simplification of that theory by Haichang Hu and Chuntu Liu, a general form of analytic solution to bending problem for rectangular sandwich plates is presented in this paper. Using this general form of solution, the bending problem for sandwich rectangular plates with various ordinary boundary conditions can be solved effectively. Thereby a format for solving bending problem analytically can be obtained.

Key words sandwich plates, Hoff. s theory, simplified theory, general form of analytical solution, bending problem