

结构可靠度计算的 近似重要性抽样方法及其应用*

程耿东

蔡文学

(大连理工大学工程力学研究所, 大连 116024) (华南理工大学交通学院, 广州 510641)

提 要 本文提出一种近似重要性抽样方法来计算结构可靠度。该方法将结构可靠度计算中的重要性抽样方法与结构优化中的近似重分析技术相结合, 并引入误差带的技巧, 显著减少了蒙特卡罗方法的计算量。运用该方法于结构正常使用极限状态可靠度分析的实例, 表明了该方法用于复杂结构可靠度计算的有效性。

关键词 结构可靠度, 蒙特卡罗法, 重要性抽样, 结构优化, 近似重分析

一、引 言

建立在一次二阶矩(FOSM)理论基础上的结构可靠度, 在功能函数非线性程度很高等许多情况下, 得到的结果误差较大。由于FOSM理论本身缺乏相应的近似误差估计公式, 为了得到较精确的可靠度, 目前只有应用蒙特卡罗方法^[3, 10]。结构可靠度理论中, 蒙特卡罗方法还常用来检验其它近似方法的精确性。但工程结构的失效概率一般很小, 直接应用蒙特卡罗方法进行结构可靠度计算所需要的计算量往往太大, 导致蒙特卡罗方法在工程结构可靠度中的应用受到限制^[1, 3, 10]。

为了克服蒙特卡罗方法计算量太大的缺点, S. nozuka, M^[1]首先建议在结构可靠度分析中应用重要性抽样方法, 在该领域引起了极大兴趣。经过众多学者的研究, 相继产生

* 国家自然科学基金重大项目子课题

本文收稿日期: 1995年3月

了直接法、修正法、自适应方法、球面法等^[2]重要性抽样方法。这些方法与直接蒙特卡罗方法相比较,大大提高了抽样效率,减少了计算量。

但是,在结构可靠度分析,尤其是结构体系的可靠度分析中,功能函数的计算往往需要进行结构整体的有限元分析。在这种情况下,即使重要性抽样方法,所需要的抽样数可能仍然太多,计算量太大。因此,重要性抽样算法目前还仅仅局限在功能函数为基本随机变量的显式函数或结构构件的可靠度分析中^[2~7]。

本文将结构优化领域的近似重分析技术和重要性抽样法相结合,提出近似重要性抽样方法来进一步减少重要性抽样方法的计算量。计算中利用“误差带”技巧解决了近似分析中的误差控制问题。文中给出了将该方法应用于结构正常使用状态下可靠度计算的实现方法,并在实例中对直接蒙特卡罗方法、重要性抽样方法和近似重要性抽样方法三者加以比较,表明了本文方法在保持计算精确度的同时使计算效率得到很大提高。

二、重要性抽样方法

在可靠度分析中,结构的失效概率一般可以表示为:

$$P_f = P[Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0] = \int_{D_f} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

式中, X_1, X_2, \dots, X_n 表示基本随机变量, x_1, x_2, \dots, x_n 为其实现, X 是基本随机变量的向量表示, 其对应的实现为 x 。 $f_X(\cdot)$ 表示基本随机变量的联合概率密度分布函数, $g(\cdot) \geq 0$ 和 $g(\cdot) < 0$ 分别表示结构处于安全区域和失效区域。 D_f 表示由极限状态方程 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0$ 所定义的失效区域。

引入指示函数 $I[g(x_1, x_2, \dots, x_n)]$,

$$I[g(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \begin{cases} 0 & g(\cdot) \geq 0 \\ 1 & g(\cdot) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

利用指示函数, 式(1)可以表示为:

$$P_f = \int_{\Omega} I[g(\cdot)] f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2 \dots dx_n \quad (3)$$

其中 Ω 表示整个基本变量空间。

由概率论, 若 X 为连续随机变量, $f(x)$ 为其概率密度函数, $g(x)$ 为连续实函数, 则 $Y = g(X)$ 也是随机变量。且随机变量 Y 的数学期望为:

$$E(Y) = \int_{\Omega} g(x) f(x) dx \quad (4)$$

引入函数 $h_v(\cdot)$, 称之为重要性抽样函数。 $h_v(\cdot)$ 满足归一化条件:

$$\int_{\Omega} h_v(v_1, v_2, \dots, v_n) dv_1 dv_2 \dots dv_n = 1 \quad (5)$$

式(3)可以等价表示为:

$$P_f = \int_{\Omega} I[g(\cdot)] f_X(\cdot) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\Omega} I[g(\cdot)] \frac{f_X(\cdot)}{h_v(\cdot)} h_v(\cdot) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (6)$$

令 $Y = I[g(\cdot)] \frac{f^X(\cdot)}{h_V(\cdot)}$ 。则 P_f 可看作随机变量 Y 的数学期望, Y 依赖于概率密度函数为 $h_V(\cdot)$ 的基本随机变量 X 。 P_f 的无偏估计为:

$$P_f = E\{Y\} = J_1 = E \left[I[g(\cdot)] \frac{f^X(\cdot)}{h_V(\cdot)} \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[G(\cdot)] \frac{f^X(\cdot)}{h_V(\cdot)} = J_2 \quad (7)$$

通过适当地选择重要性函数 $h_V(\cdot)$, 可以减少 J_2 的方差^[3]。

结构可靠度中, 不同的重要性抽样方法, 其差别主要表现在选择不同的重要性函数 $h_V(\cdot)$ 。根据文^[2]的测试, 这些方法中除球面法外, 其余三种方法—直接法、修正法和自适应方法的性能大致相近。本文的计算中重要性抽样采用直接法。

直接法中, 重要性函数 $h_V(\cdot)$ 可以直接取相互独立的正态分布函数, 其变异系数一般根据原随机变量的分布, 取对应的原随机变量变异系数的 1~2 倍。均值一般取 $f_X(\cdot)$ 的最大可能点, 即所谓 PML (Points of Maximum Likelihood of $f_X(\cdot)$)。其值可以用求解以下数学规划问题得到:

$$\begin{aligned} \max f_X(\cdot) \\ \text{s.t. } Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (P1)$$

在功能函数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为线性函数, 随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 为正态分布的情况下, PML 与 H—L 可靠指标中的“设计验算点”一致^[1]。

由于直接法不需要进行从原空间(X 空间)到标准正态空间(U 空间)的转换; 也不需要随机抽样过程中对相关变量进行变换处理^[3,4,5]。因此, 直接法的计算较为简单。

三、近似重要性抽样方法

下面结合框架结构在正常使用极限状态下最大变形控制的可靠度计算来介绍近似重要性抽样方法。约定基本变量为单元截面几何尺寸和荷载作用, 结构的极限状态为:

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = u(X_1, X_2, \dots, X_n) - \bar{u} < 0 \quad (8)$$

式(8)中 \bar{u} 为最大允许变形值, 采用有限元方法计算。

根据式(7)计算失效概率时, 每抽出一个样本点, 就需要计算一次指示函数 $I[g(\cdot)]$ 来判断样本点是否位于失效区域。在失效面由式(8)确定的情况下, 这意味着每一次抽样就需要进行一次结构整体有限元分析, 其计算量很大。因此, 需要建立有效的功能函数(式(8))近似计算方法来减少结构重分析次数。

将式(8)对基本变量进行 Taylor 展开:

$$Z = g^L(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{oi}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{x_i = x_{oi}} \quad (9)$$

式中 $\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}$ 为位移对基本变量的灵敏度。式(9)给出了近似计算函数 $g(\cdot)$ 的方法,但是从结构优化理论知道,位移 $g(\cdot)$ 和单元截面几何尺寸间的非线性程度较高,即使在 x 很接近 x_0 的情况下,使用式(9)仍会产生较大的误差。

借助于结构优化的近似分析方法,引入中间变量 Y , 定义:

$$y_i = y_i(x_i) \quad (i, \dots, n) \quad (10)$$

y_i 为基本随机变量 x_i 的函数, y_i 称为中间变量。

将功能函数对中间变量 Y 进行 Taylor 线性展开^[8,9], 有:

$$Z \quad g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (y_i(x_i) - y_i(x_{0i})) \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} / \frac{dy_i}{dx_i} \right)_{x_i=x_{0i}} \quad (11)$$

设 K 表示结构总刚度矩阵, U 表示位移向量, P 为外荷载向量。结构的平衡方程为:

$$KU = P \quad (12)$$

由上式, 位移对基本变量的灵敏度为:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = K^{-1} \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} U \right) \quad (13)$$

当 x_i 为截面几何尺寸时, 式(13)简化为:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = - K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} U \quad (14)$$

当 x_i 为荷载作用时, 式(13)简化为:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = K^{-1} \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} \quad (15)$$

利用式(11)计算功能函数的近似值时, 计算精度取决于中间变量 Y 的选取。由式(12), 在 K 不变的情况下, 位移与荷载作用之间呈线性关系。因此, 若基本随机变量 $x_i, i = k, \dots, n$ 代表荷载作用。可定义中间变量 Y 为:

$$y_i = x_i \quad (16)$$

对于截面几何尺寸的中间变量, 根据结构优化的研究^[8,9], 在以弯曲变形为主、轴向变形可以忽略的情况下, 框架结构以截面惯性矩的倒数作为中间变量可以得到位移的高精度近似。因此, 若基本随机变量 $x_i, i = 1, \dots, k-1$ 代表截面几何尺寸。可定义相应的中间变量为:

$$y_i = \frac{1}{I_i(x_i)} \quad (17)$$

上述方法, 即在重要性抽样时, 适当利用式(10)、(11)、(14)和(15)来近似计算功能函数的可靠度计算方法称为近似重要性抽样方法。在框架结构以弯曲变形为主时, 具体应用式(16)和式(17)来代替式(10)。

至此, 近似重要性抽样方法的算法可以归纳为:

(a) 求解优化问题(P1)得 PML 。确定重要性抽样函数 $v(\cdot)$ 的均值及变异系数。

(b) 根据问题特点, 选取一些代表点进行完整结构分析和灵敏度计算, 记这些点的集合为 E 。

(c) 应用重要性函数 $h_V(\cdot)$ 产生一个样本点。

(d) 根据下面将介绍的标准从集合 E 中选择一个代表点, 利用该代表点的位移及其灵敏度, 按式(11) 计算该样本点的位移近似值。

(e) 将近似分析的结果代入式(7) 中, 计算结构的失效概率。

(f) 重复(d)、(e), 直到满足结束条件。

结构可靠度中起抗力作用的因素, 如几何尺寸等, 其离散程度较小, 因此重要性抽样函数中, 对应于抗力的随机变量, 其方差较小。注意到在正态分布中:

$$P\{\mu_X - 3\sigma_X \leq X \leq \mu_X + 3\sigma_X\} = 99.7\%$$

因此, 抽样所得样本点的几何尺寸的变化范围很小。根据计算经验, 步骤(b) 中进行精确结构分析的代表点选取为:

$$x_i = \mu_{x_i} \pm i \cdot \sigma_{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

或

$$x_i = \mu_{x_i} \pm i \frac{\sigma_{x_i}}{2}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{ 即可。}$$

对应于荷载作用的基本变量虽然离散程度较大, 但由于荷载与位移之间呈线性关系, 因此代表点可以同样采用上述方法选取。步骤(d) 中代表点的选取标准是, 首先选取与样本点分量之差同为正或负的代表点。然后, 选择其中与样本点距离最小的。

步骤(f) 中的结束条件, 可以取抽样达到预先指定的次数或失效概率的方差满足指定的精度为止。文中实例的结束条件采用前一种方法。

在上列方法中, 由于引入近似方法来计算功能函数, 不可避免地会产生误差。结构优化中, 约束函数高精度的近似所产生的误差对优化结果影响很小。而在重要性抽样中, 由于具体问题的特殊性, 较小的近似误差也可能会对最终结果产生较大的影响。例如图 1 中, 若 A 点为某次抽样所得样本点的精确位置, 位于失效面附近的失效区域内, B 点为对该样本进行近似计算所得的位置, 位于失效面附近的安全区域内。即使 A、B 两点之间的误差(距离) 很小, 但只要 A、B 仍然保持在失效面两侧, 这一误差就很可能对失效概率产生较大的影响。因为此次抽样的样本实际上位于失效区域内, 在重要性抽样方法中, 该样本根据式(8) 将对失效概率有一定的贡献。而近似分析由于得出样本位于安全区域内, 因此不再对失效概率有贡献。

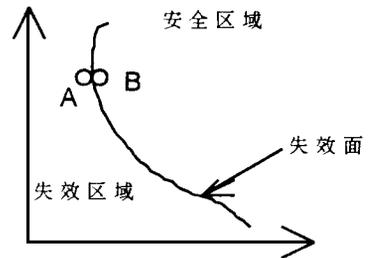


图 1

为了避免图 1 中情况所产生的误差, 引进误差带的概念。所谓误差带, 是指变量空间中, 由超曲面(平面) $Z = g(\cdot) = u - (\bar{u} -) = 0$ 和 $Z = g(\cdot) = U - (\bar{u} +) = 0$ 所夹的区域。其中 Δ 称为误差带宽度。将上列算法中的步骤(d) 修改为: 当近似分析的结果位于于

为了避免图 1 中情况所产生的误差, 引进误差带的概念。所谓误差带, 是指变量空间中, 由超曲面(平面) $Z = g(\cdot) = u - (\bar{u} -) = 0$ 和 $Z = g(\cdot) = U - (\bar{u} +) = 0$ 所夹的区域。其中 Δ 称为误差带宽度。将上列算法中的步骤(d) 修改为: 当近似分析的结果位于于

差带时, 此次近似分析的结果被认为不可靠, 需要进行完整的结构重分析; 当近似分析的结果位于误差带之外时, 接受此次近似分析的结果。这样, 选择适当的误差带宽度 Δ 就可以在在一定程度上控制近似分析的误差。当 Δ 很大时, 近似重要性抽样方法就退化为重要性抽样方法。

四、算 例

例中单元截面几何尺寸取为截面积。截面惯性矩与截面积之间的关系取 $I = \alpha \cdot A^\gamma$ 。优化问题(P1) 经过对目标函数变换后, 应用 Sc tkovsk 的序列二次规划程序 NLPQLD 求解。

例 图 2 所示为三跨十二层平面框架结构。最大允许变形为 $u_{\max} = 9.6\text{cm}$, $E = 2.0 \times 10^7 \text{kN/m}$, 随机变量的有关参数见表 1。

表 1

随机变量	分布类型	均值及变异系数	α	γ
截面积 A1(边柱 1~6 层, 中柱 7~12 层)	对数正态	(0.25, 0.1) m^2	8.333E-2	2.0
截面积 A2(边柱 7~12 层)	对数正态	(0.16, 0.1) m^2	8.333E-2	2.0
截面积 A3(中柱 1~6 层)	对数正态	(0.36, 0.1) m^2	8.333E-2	2.0
截面积 A4(中柱与边柱之间的梁, 1~12 层)	对数正态	(0.20, 0.1) m^2	2.667E-2	2.0
截面积 A5(中柱之间的梁, 1~12 层)	对数正态	(0.15, 0.1) m^2	2.0E-2	2.0
荷载作用 P	极值型	(30.0, 0.25) kN		

直接蒙特卡罗方法抽样次数 $N = 5000$, $P_f = 3.644E-2$, 可靠指标 $\beta = 1.80$ 。

重要性抽样方法抽样次数 $N = 500$, $P_f = 4.144E-2$, 可靠指标; $\beta = 1.74$
 $N = 1000$, $P_f = 3.935E-2$, $\beta = 1.76$ 。

近似重要性抽样方法取不同误差带宽度 Δ 和样本数的计算结果见表 2。

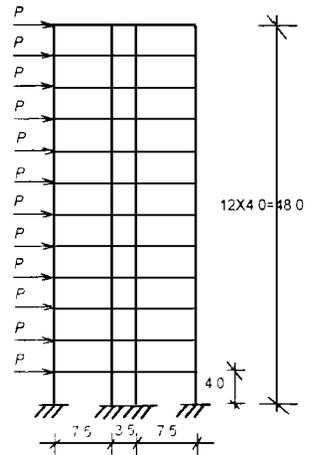


图 2 (图中所示尺寸单位: 米)

表 2

情况数	误差带宽 Δ	相对宽度	分析次数	失效样本数	样本总数	失效概率	可靠指标
1	1.0	10.4%	254	516	1000	4.010E-2	1.75
2	0.8	8.3%	202	517	1000	4.010E-2	1.75
3	0.5	5.2%	119	526	1000	4.898E-2	1.66
4	0	0%	0	610	1000	5.112E-2	1.64
5	1.0	10.4%	118	269	500	5.427E-2	1.61
6	0.8	8.3%	99	269	500	5.427E-2	1.61
7	0	0%	0	301	500	6.509E-2	1.51

数值计算结果表明,取误差带宽度 Δ 为最大允许位移的 10% 左右时,近似重要性抽样方法的计算量只有重要性抽样法的 1/4,而精度大致相等。

五、结 论

通过将重要性抽样方法和近似重分析技术相结合,本文提出的近似重要性抽样方法使结构重分析量显著减少。结构正常使用极限状态可靠度分析的算例表明,近似重要性抽样方法不仅提高了计算效率,而且具有工程所需要的足够计算精度,可以应用于实际工程结构可靠度分析中。

参 考 文 献

- 1 S nozuka, M. Basic analysis of structural safety. J Struct Engrg, ASCE, 1983; 109(3)
- 2 Englund, S and Rackwitz, R. An benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. Struct Safety, 1993; 12(4)
- 3 Melchers, R E. Structural Reliability Analysis and Prediction. Ellis Horwood Ltd, 1987
- 4 Melchers, R E. Importance sampling in structural system. Struct Safety, 1989; 6(1)
- 5 Melchers, R E. Search-based importance sampling. Struct Safety, 1990; 9(2)
- 6 Maes, M A, Breitung, K and Dupuis, D J. Asymptotic importance sampling. Struct Safety, 1993; 12(4)
- 7 Ibrahim, Y. Observations on application of importance sampling in structural reliability analysis. Struct safety, 1991; 9(4)
- 8 Cheng, G D. Introduction to structural optimization: Theory, Method and Solution. Department of solid mechanics, Technical University of Denmark, 1992
- 9 程耿东. 工程结构优化设计基础. 北京: 水利电力出版社, 1984
- 10 吴世伟编著. 结构可靠度分析. 北京: 人民交通出版社, 1990

APPROXIMATE IMPORTANCE SAMPLING TECHNIQUE AND ITS APPLICATIONS IN STRUCTURAL RELIABILITY

C eng Gengdong

Ca Wenxue

(Dal an Un vers ty of Tec nology)

(Sout h C na Un vers ty of Tec nology)

Abstract In t s paper, t e approx mate mportance sampl ng tec n que s presented for structural rel ab l ty evaluat on. T e tec n que comb nes mportance sampl ng met od n structural rel ab l ty w t approx mate reanalys s tec n ques n structural opt m zat on, and can greatly decrease comput ng t me of Monte Carlo met od. Example of frame struc- ture s prov ded to s ow t e met od and ts effect veness.

Key words structural rel ab l ty, Monte Carlo, mportance sampl ng, structural op- t m zat on, approx mate reanalys s